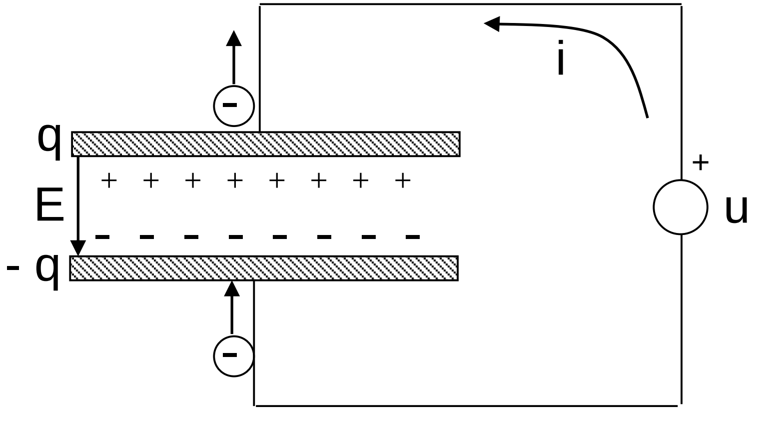
Bloque 2
Análisis de circuitos alimentados en corriente alterna

Fundamentos de Ingeniería Eléctrica

3.1. Condensadores y bobinas

Condensadores

Un condensador es un elemento pasivo capaz de almacenar potencia a través del campo eléctrico.



• Dos placas metálicas separadas una distancia d y con un dieléctrico entre ellas que impide un flujo de carga.

•En régimen permanente: circuito abierto. Tensión en bornes igual a la aplicada anteriormente.

• La tensión en bornes es fruto de un trasvase de carga en *dt* inicial. También hay polarización.

•Inicialmente poca oposición al paso de carga.

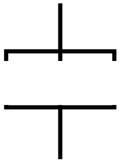
• Se establece un campo eléctrico que almacena la potencia suministrada por la fuente.

Capacidad

- La carga desplazada es proporcional a la tensión aplicada

$$q = Cu$$

C = Capacidad
SI: [F]=Faradios



C

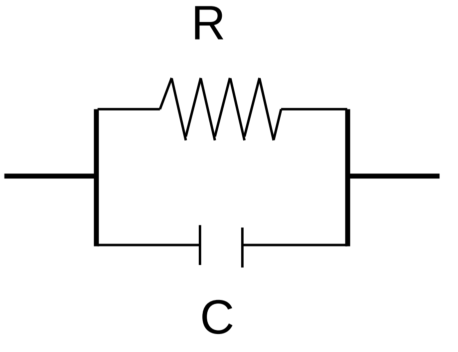
- La capacidad de un condensador depende de su geometría

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}$$

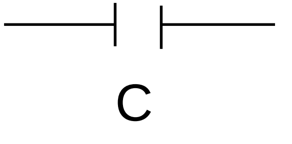
donde $\varepsilon_0 = 8{,}85 \frac{pF}{m}$

Condensadores

- Los condensadores reales suelen presentar pérdidas

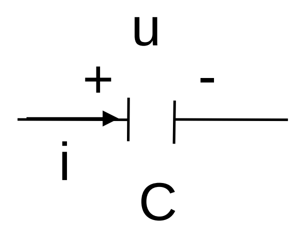


- Consideraremos condensadores ideales



Relación u/i

$$q = Cu \Rightarrow \underbrace{\frac{dq}{dt}}_{i(t)} = C\frac{du}{dt} \Rightarrow \boxed{i(t) = C\frac{du}{dt}}$$

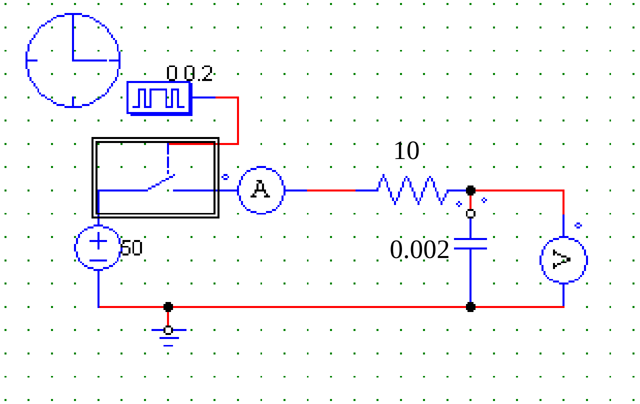


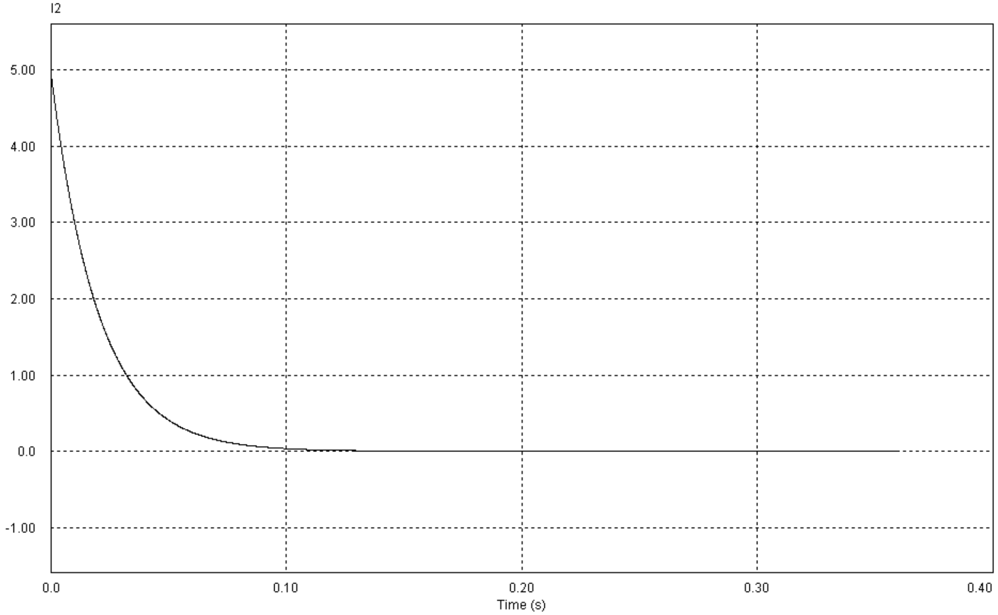
• Si u=cte => i=0 => En corriente continua un condensador se comporta como un circuito abierto.

$$\int_{t_0}^{t} \frac{du}{dt}dt = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)dt \Rightarrow \boxed{u(t) - u(t_0) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)dt}$$

• La tensión en un condensador no puede variar bruscamente

Carga de un condensador



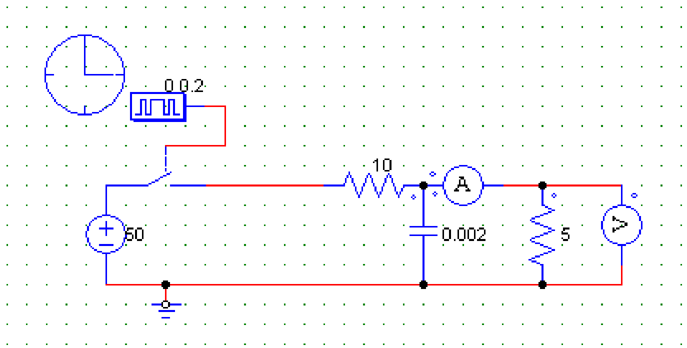


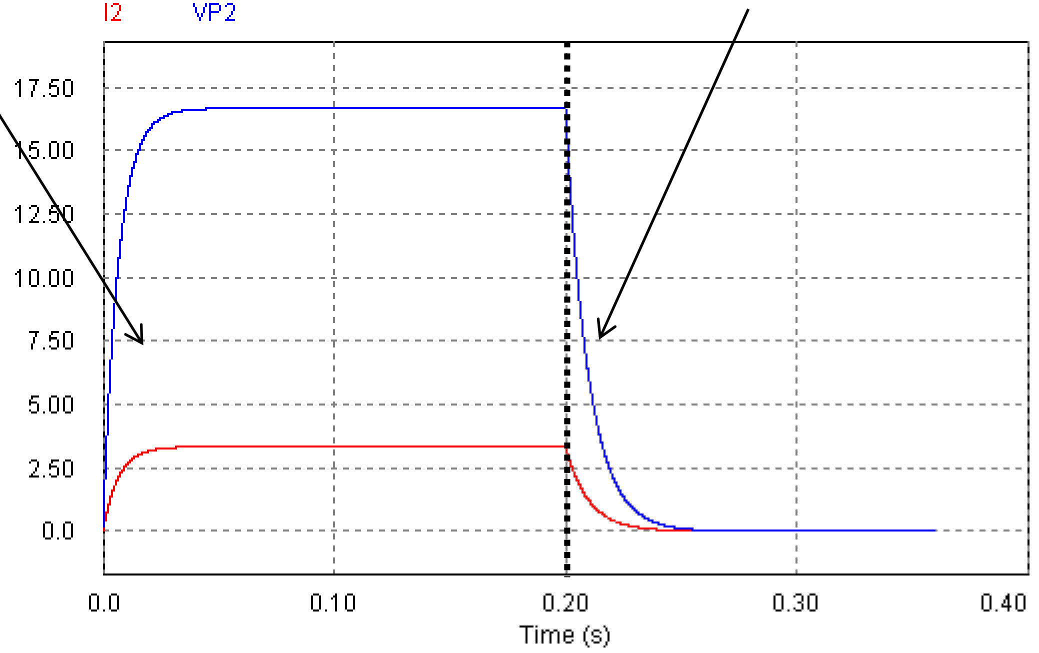
Aunque un condensador en continua se comporta como un circuito abierto durante el transitorio circula corriente

Carga y descarga de un condensador

Cierre interruptor

Apertura interruptor





Al abrir el interruptor el condensador se descarga por la resistencia de 5 Ω

Potencia y energía

$$p(t) = u(t)i(t) = uC\frac{du}{dt}$$

La potencia puede ser > ó < que 0 => el condensador absorbe o cede potencia

- Energía almacenada entre 0 y t

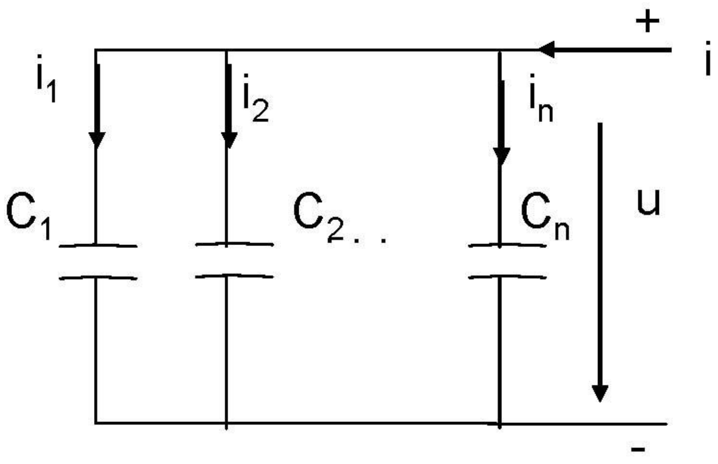
$$W = \int_0^t p(t)dt = \int_0^t Cu\frac{du}{dt}dt = \frac{1}{2}Cu^2 \geq 0$$

(Suponiendo que u(0)=0)

La energía almacenada es siempre mayor o igual que cero.

Si el condensador cede potencia lo hace a expensas de la energía previamente almacenada => Es un elemento pasivo

Asociación de capacidades en paralelo



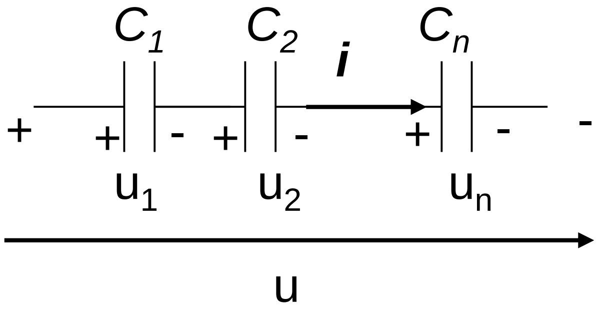
$$i = i_1 + i_2 + \ldots. + i_n$$

$$i_k = C_k \frac{du}{dt}$$

$$i = C_1 \frac{du}{dt} + C_2 \frac{du}{dt} + \ldots. + C_n \frac{du}{dt} = \left(C_1 + C_2 + \ldots + C_n\right)\frac{du}{dt} = C_{eq} \frac{du}{dt}$$

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots. + C_n}$$

Asociación de capacidades en serie



$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$\frac{du_k}{dt} = \frac{1}{C_k} i$$

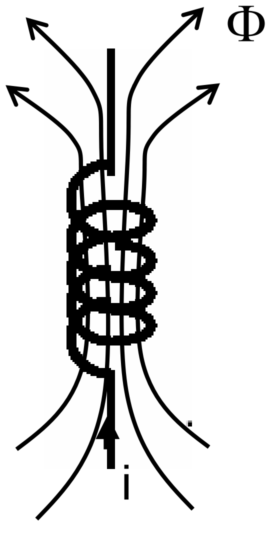
$$\frac{du}{dt} = \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} + \dots + \frac{du_n}{dt} = \frac{1}{C_1} i + \frac{1}{C_2} i + \dots + \frac{1}{C_n} i =$$

$$= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right) i = 1/C_{eq} * i$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}}$$

Bobinas

Una bobina es un dispositivo capaz de almacenar potencia gracias al campo magnético generado.



- Al circular corriente por la bobina aparece un flujo magnético
- Φ depende de la corriente

$$N\Phi = Li$$

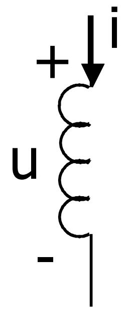
L=Coeficiente de autoinducción de la bobina (o inductancia propia)

SI:[H]=Henrios

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = \frac{N^2 S_{fe} \mu}{l_{fe}}$$

Relación u/i

- Si i que recorre la bobina es variable en el tiempo => Φ es variable => Se induce una f.e.m. que se opone al flujo (Faraday Lenz).



$$u = -e = N\frac{d\Phi}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

$$N\frac{d\Phi}{dt} = L\frac{di}{dt}$$

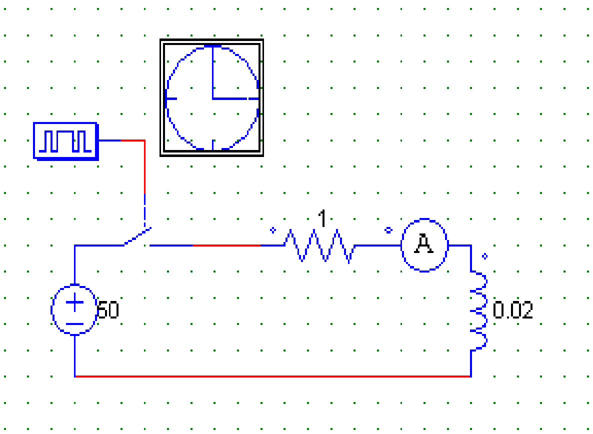
Si i=cte =>u=0 => En corriente continua una bobina se comporta como un cortocircuito

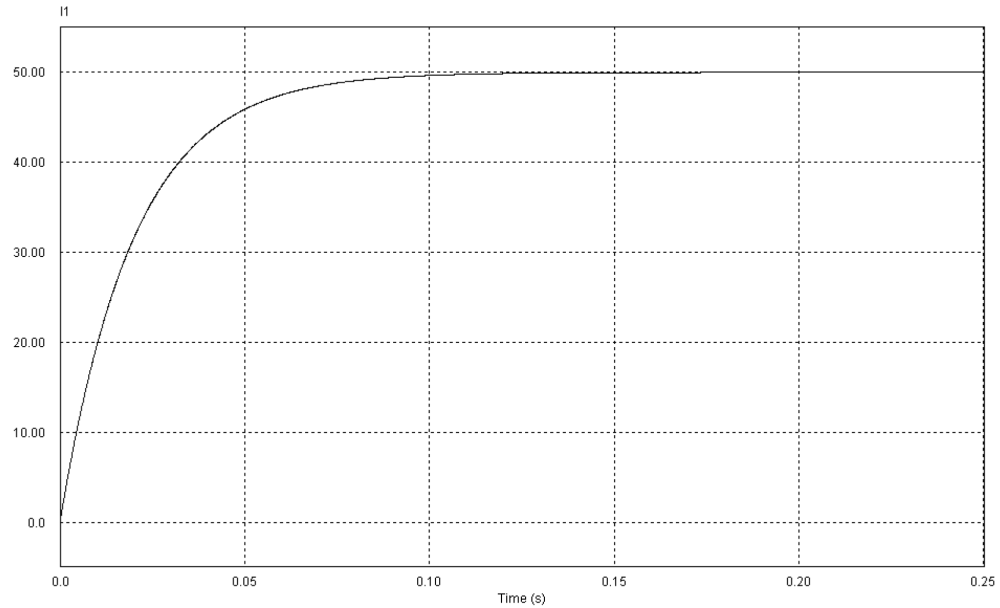
$$\int_{t_0}^{t}\frac{di}{dt}dt = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(t)dt$$ =>

$$\boxed{i(t) - i(t_0) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}u(t)dt}$$

La corriente en una bobina no puede variar bruscamente

Simulación conexión de una bobina en continua



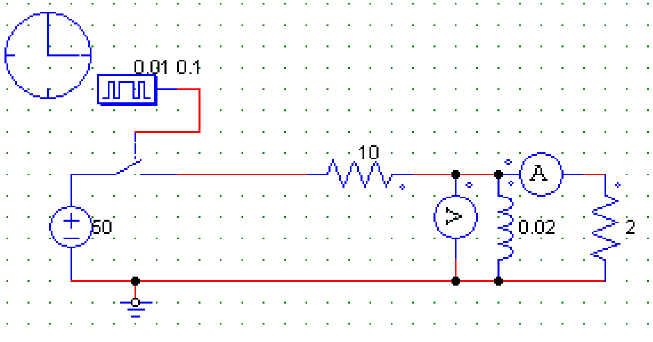


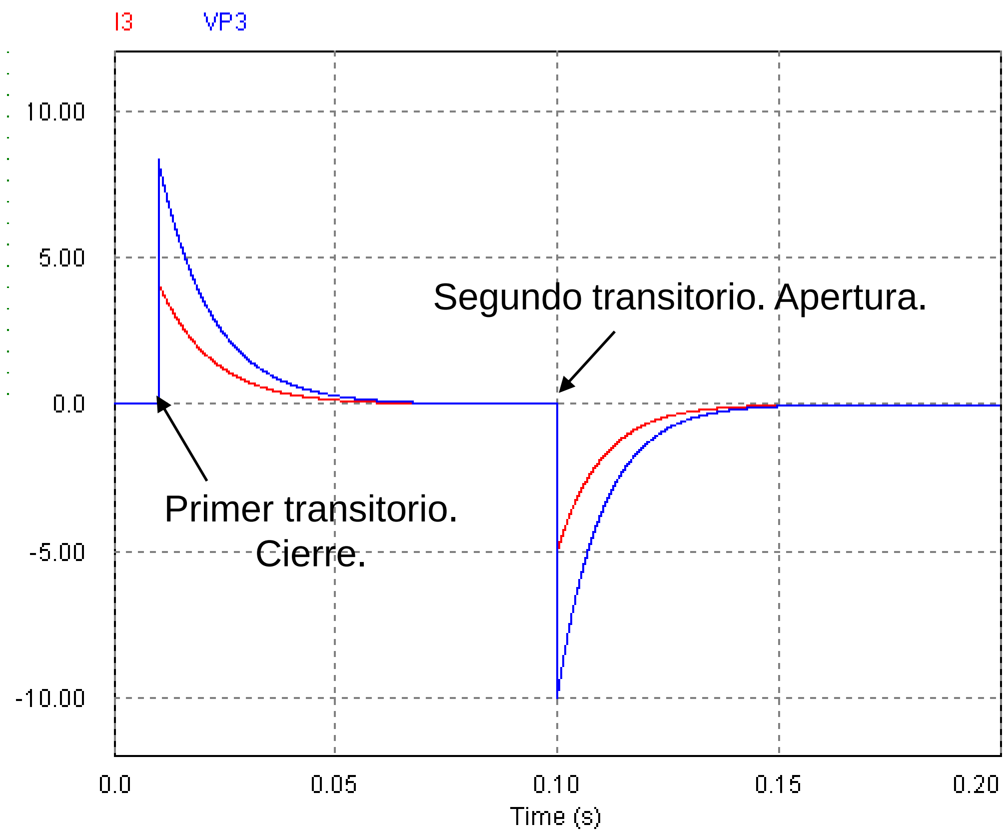
Inicialmente, al aparecer la corriente, dΦ/dt↑↑=>u ↑↑. Mucha oposición al paso de i.

En régimen permanente, u=0. Poca oposición al paso de i.

Al disminuir la resistencia aumenta el tiempo de estabilización. τ=0.02s

Carga y descarga de una bobina





1. Antes de cerrar: $U_L=0$
2. Primer transitorio: La bobina se carga y entre sus terminales aparece tensión: por la resistencia circula corriente
2. En régimen permanente $U_L=0$
3. Segundo transitorio: La bobina se descarga por la resistencia (se comporta como una fuente de corriente)

Potencia y energía

$$p(t) = u(t)i(t) = Li\frac{di}{dt}$$

La potencia puede ser > ó < que 0 => la bobina absorbe o cede potencia

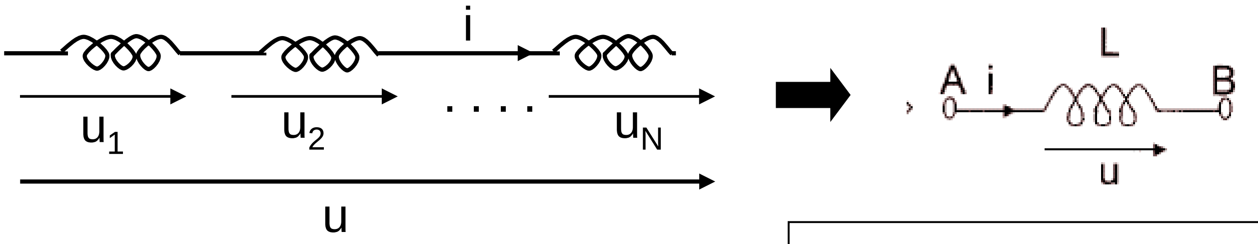
- Energía almacenada entre 0 y t

$$W = \int_0^t p(t)dt = \int_0^t Li\frac{di}{dt}dt = \frac{1}{2}Li^2 \geq 0$$

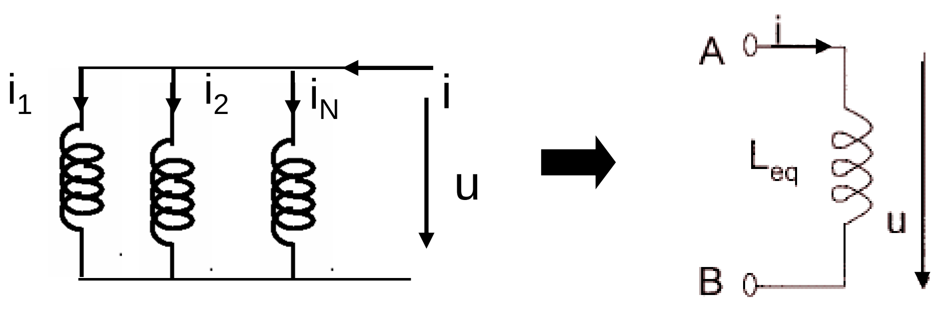
(Suponiendo que i(0)=0)

La energía almacenada es siempre mayor o igual que cero. Si la bobina cede potencia lo hace a expensas de la energía previamente almacenada => Es un elemento pasivo.

Asociación de bobinas en serie y en paralelo



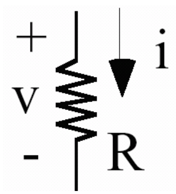
$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \ldots\ldots + L_N = \sum_{k=1}^{N} L_k$$



$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_N}$$

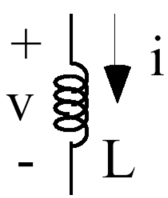
Resumen elementos pasivos

- Resistencia



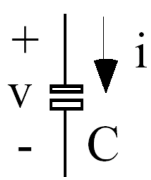
$$u(t) = Ri(t) \qquad\qquad i(t) = Gu(t)$$

- Bobina



$$u(t) = L\,\frac{di(t)}{dt} \qquad\qquad i = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u(t)dt$$

- Condensador



$$u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)dt \qquad\qquad i(t) = C\,\frac{du(t)}{dt}$$

3.2 Introducción. Representación de ondas sinusoidales mediante fasores

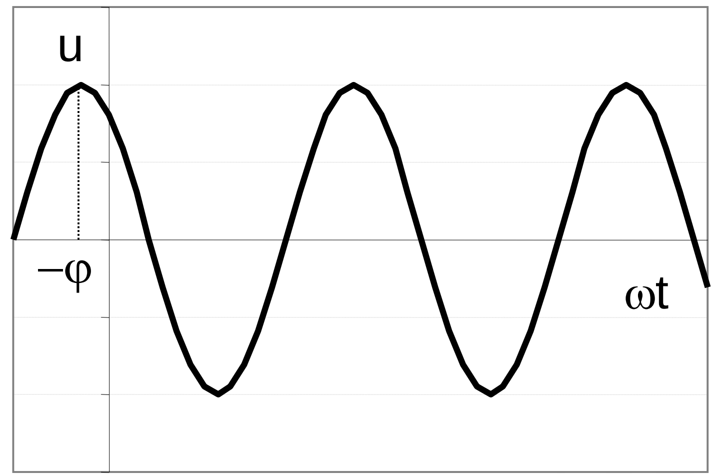
Corriente alterna

Corriente continua

$$u(t) = U_0$$

$$sen\alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

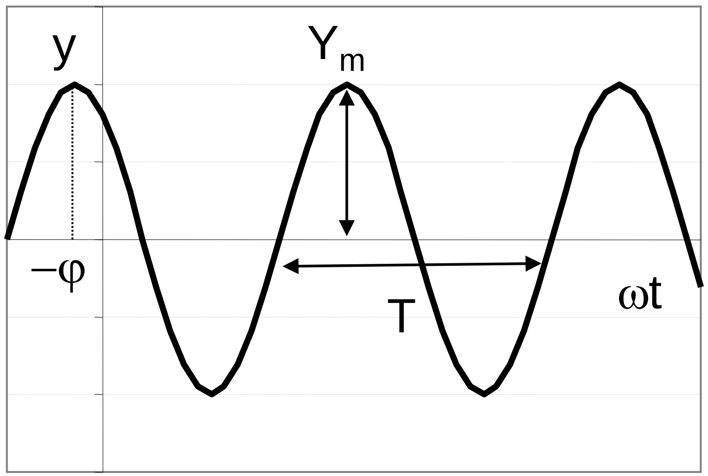
Corriente alterna



$$\boxed{u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)}$$ o bien

$$u(t) = U_0 sen\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

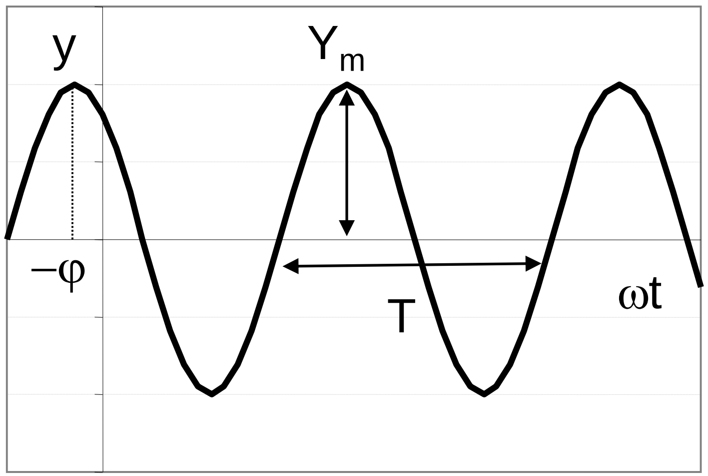
Características de una onda sinusoidal



$$y(t) = Y_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

- Y_m=Valor máximo= valor de pico=valor de cresta
- y(t)= Valor instantáneo
- T=Periodo= tiempo que se tarda en completar un ciclo completo [s]
- f= Frecuencia= número de ciclos que se describen por segundo=1/T [Hz]

Características de una onda sinusoidal

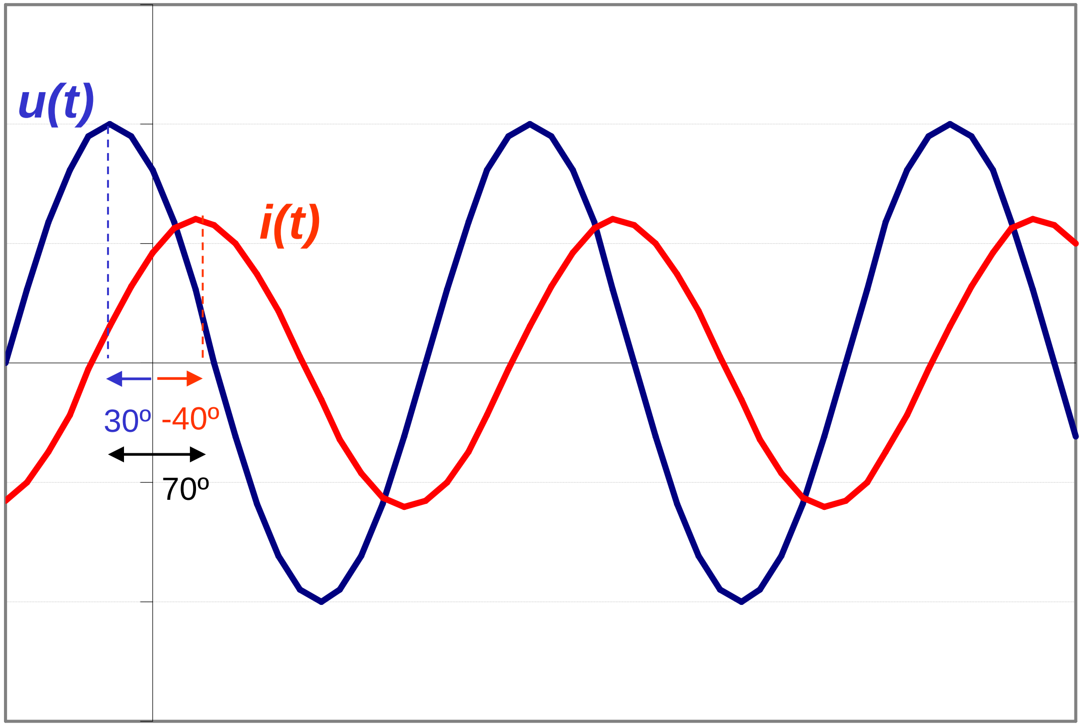


$$y(t) = Y_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

- ω= Pulsación; $\omega T = 2\pi \Rightarrow \omega = 2\pi f$ [rad s^{-1}]
- φ=Ángulo de fase [rad]

(El ángulo de fase en ocasiones se expresará en grados por comodidad, pero no es correcto dimensionalmente)

Desfase relativo



u está adelantada 70 º respecto a i

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

Desfase entre u e i

$$\boxed{\varphi = \varphi_U - \varphi_I}$$

- $\varphi<0$, *u* en retraso resp. a *i*
- $\varphi>0$, *u* en adelanto resp. a *i*
- $\varphi=0$ “en fase”
- $\varphi=90º$ “en cuadratura”
- $\varphi=180º$ “en oposición”

Valor medio y valor eficaz

$$y(t) = Y_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

- Valor medio

$$Y_{medio} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T Y_m \cos(\omega t + \varphi)dt = 0$$

- Valor eficaz

$$Y = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T y^2(t)dt} = \frac{Y_m}{\sqrt{2}}$$

El valor eficaz de una corriente periódica es el valor de una corriente continua que al circular por una resistencia R produce en un tiempo T la misma cantidad de energía disipada

Resumen de notación

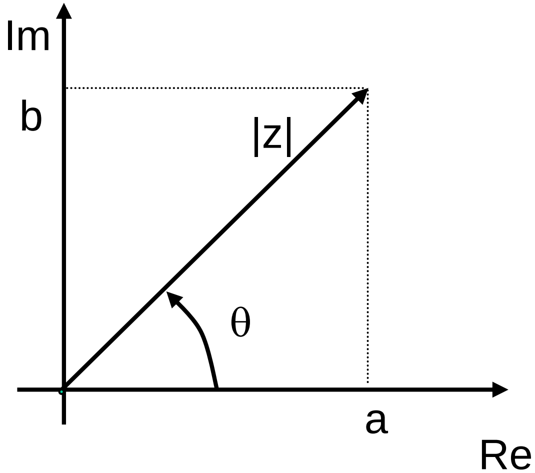
$$y(t) = Y_m \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \sqrt{2}Y \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

- Valor instantáneo: y
- Valor eficaz: Y
- Valor máximo: Y_m
- Fasor: $\mathcal{Y}$

Repaso números complejos

$$j = \sqrt{-1} \qquad j^2 = -1$$

$$z = \underbrace{a + bj}_{binómica} = \underbrace{|z|\angle\theta}_{polar} = \underbrace{|z|e^{j\theta}}_{exponencial}$$

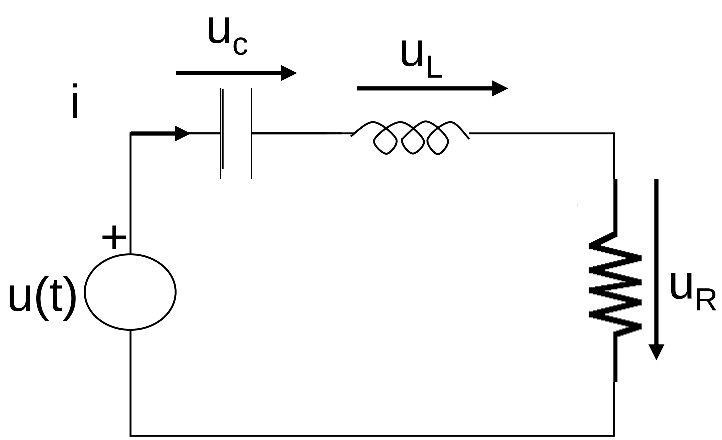


Fórmula de Euler:

$$e^{\pm j\theta} = \cos\theta + jsen\theta$$

$$z = a + bj = |z|e^{j\theta} = |z|\cos\theta + j|z|sen\theta$$

Análisis de circuitos con excitación alterna



Conocemos *u(t)* y queremos calcular *i(t)*

$$u(t) = u_C + u_L + u_R$$

$$u_c = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau \qquad u_L = L\frac{di(t)}{dt} \qquad u_R = Ri$$

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + L\frac{di(t)}{dt} + Ri}$$

Para obtener el valor de *i(t)* se debe resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{1}{C}i + L\frac{d^2 i(t)}{dt} + R\frac{di(t)}{dt}$$

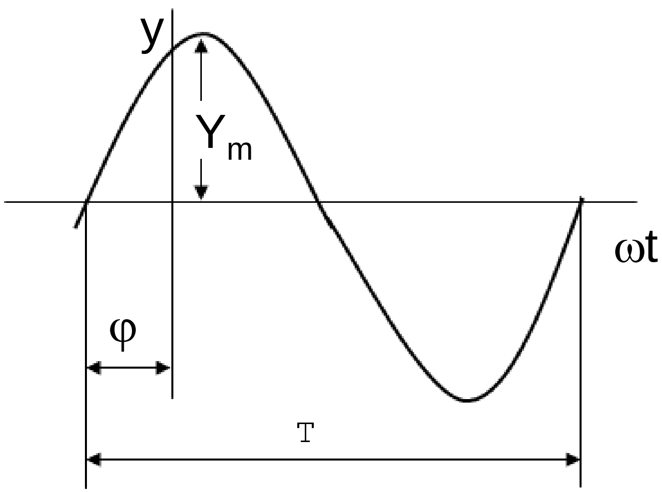
¡Resolución compleja en sistemas reales!

$i(t)=i_h+i_p$

(Reg. permanente+Reg.transitorio)

Analogía senoides-fasores

En corriente alterna las tensiones y corrientes serán funciones sinusoidales del tipo:



$$y(t) = \underbrace{\sqrt{2}Y}_{\text{Amplitud } (Y_m)} \cos\left(\omega t + \underbrace{\varphi}_{\text{desfase respecto al origen}}\right)$$

$$\omega = 2\pi f$$ viene impuesta por la fuente de alimentación

Las magnitudes de interés son *Y* y φ

Representación fasorial

$$y(t) = \sqrt{2}Y\cos(\omega t + \varphi)$$

Vamos a demostrar que existe una correspondencia entre una función sinusoidal *y(t)* y un número complejo Υ que se defina como:

$$\Upsilon = Y\angle\varphi$$

Relación entre senoides y fasores

$$y(t) = \sqrt{2}Y\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\mathcal{Y} = Y\big|\varphi = Ye^{j\varphi}$$ multiplicando por $e^{j\omega t}$

$$Ye^{j\varphi}e^{j\omega t} = Ye^{j(\varphi+\omega t)} = Y\left(\cos(\varphi + \omega t) + jsen(\varphi + \omega t)\right)$$

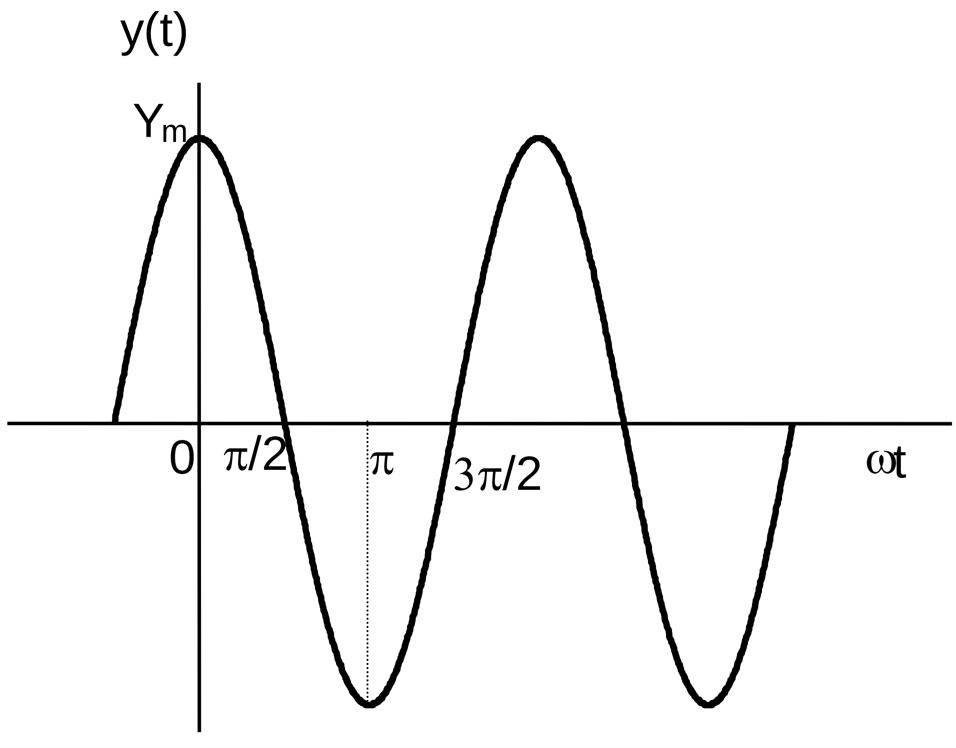
relación de Euler

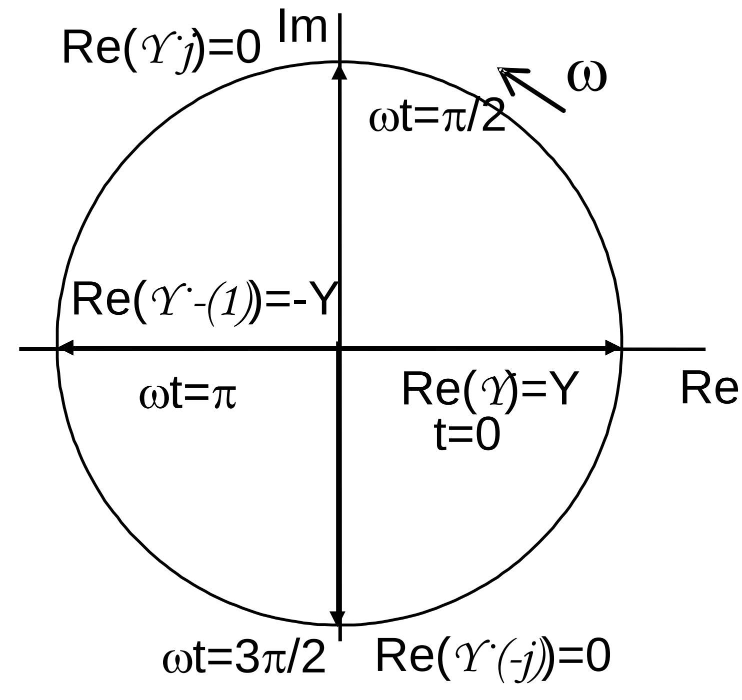
$$\boxed{\sqrt{2}\,\mathbf{Re}\left(\mathcal{Y}e^{j\omega t}\right) = \sqrt{2}Y\,\mathbf{cos}(\varphi + \omega t)}$$

Una función sinusoidal queda unívocamente representada por su **fasor** correspondiente.

Representación fasorial

Definimos un número complejo $\mathcal{Y}$ que gira en el plano complejo a velocidad ω y vamos analizando cuanto vale su parte real en los distintos instantes de tiempo



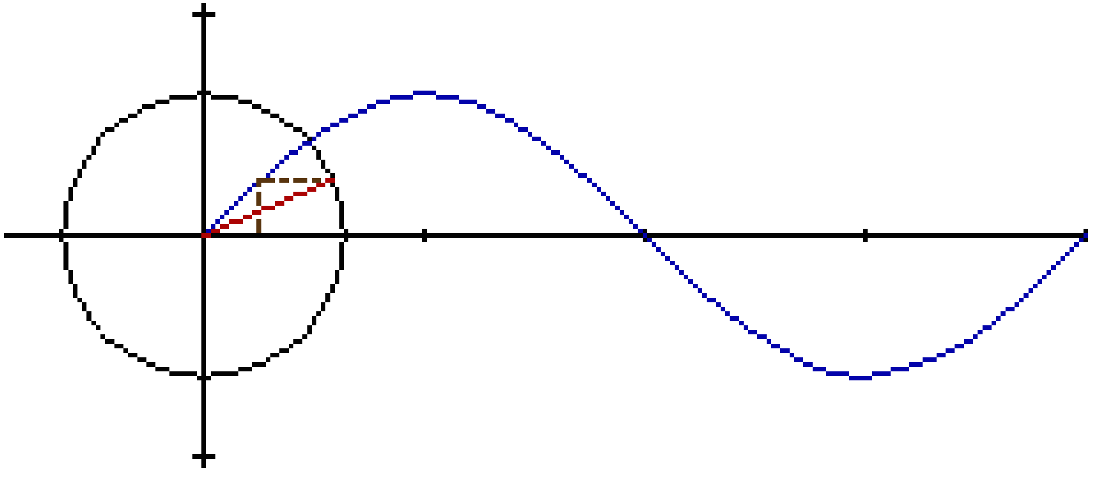


$$y(t) = \sqrt{2}Y\cos\omega t$$

$$\boxed{\sqrt{2}\,\mathbf{Re}\left(\mathcal{Y}e^{j\omega t}\right) = \sqrt{2}Y\,\mathbf{cos}\left(\varphi + \omega t\right)}$$

Analogía entre senoides y fasores giratorios

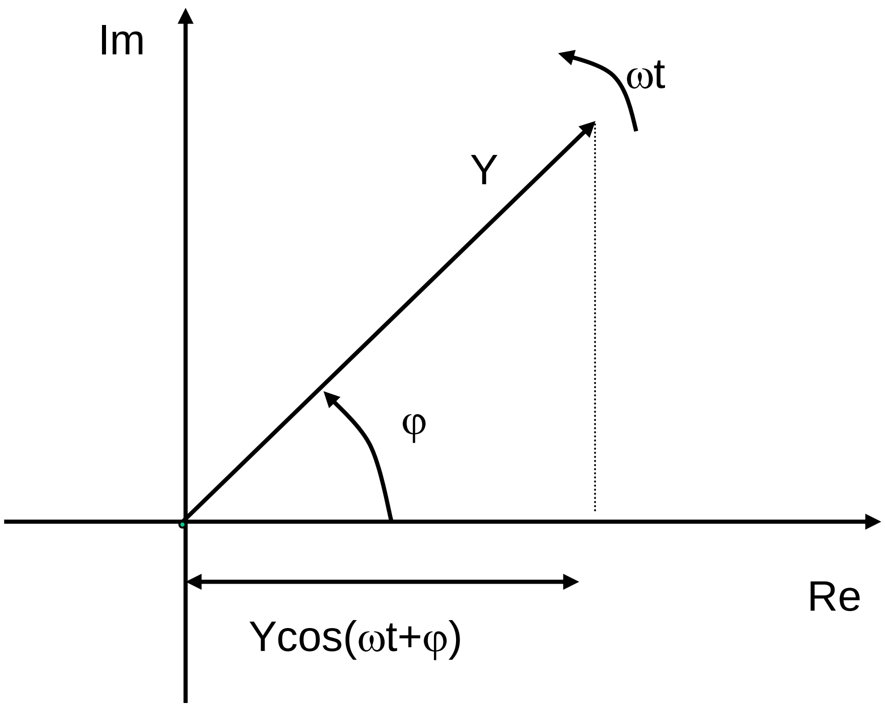
- Existe una correspondencia entre una función sinusoidal y un vector complejo.
- Una función sinusoidal es la proyección de un vector giratorio sobre uno de los ejes de un sistema coordenado (eje real y eje imaginario).



Definición de fasor

- Se denomina fasor a la cantidad compleja $\mathcal{Y} = Ye^{j\varphi}$

- En corriente alterna representaremos las funciones sinusoidales *u(t)* e *i(t)* mediante fasores equivalentes.



$$\mathcal{Y} = Y\big|\varphi \qquad \left(Y = \frac{Y_m}{\sqrt{2}}\right)$$

Relación entre senoides y fasores

$$y(t) = \sqrt{2}Y\cos(\omega t + \varphi)$$

$\mathcal{Y} = Y\big|\varphi = Ye^{j\varphi}$ multiplicando por $e^{j\omega t}$

$$Ye^{j\varphi}e^{j\omega t} = Ye^{j(\varphi+\omega t)} = Y\left(\cos(\varphi + \omega t) + jsen(\varphi + \omega t)\right)$$

relación de Euler

$$\boxed{\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(\mathcal{Y}e^{j\omega t}\right) = \sqrt{2}Y\cos(\varphi + \omega t)}$$

Una función sinusoidal queda unívocamente representada por su **fasor** equivalente

Suma de sinusoides mediante sus fasores correspondientes

$$y_1(t) + y_2(t) = \sqrt{2}Y_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \sqrt{2}Y_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Fasores correspondientes $\mathcal{Y}_1 = Y_1 \angle \varphi_1 \qquad \mathcal{Y}_2 = Y_2 \angle \varphi_2$

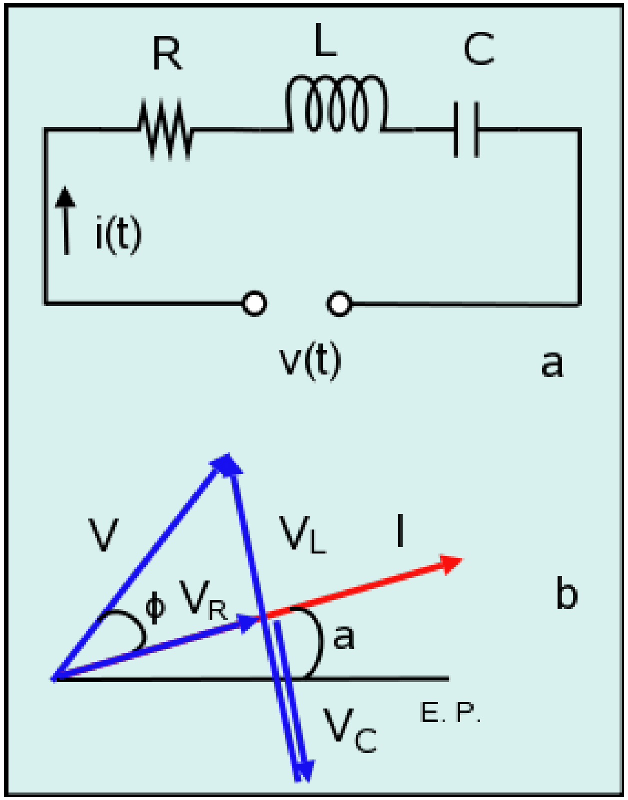
$$\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(\mathcal{Y}_1 e^{j\omega t}\right) + \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(\mathcal{Y}_2 e^{j\omega t}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(\mathcal{Y}_1 e^{j\omega t} + \mathcal{Y}_2 e^{j\omega t}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(\left(\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2\right) e^{j\omega t}\right) = \sqrt{2}Y \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\boxed{Y = \left|\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2\right|} \qquad \boxed{\varphi = angle(\left|\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2\right.)}$$

Diagrama fasorial

Diagrama en el que se representan los fasores correspondientes de las tensiones y corrientes de un circuito en el plano complejo



Fuente: Wikipedia

3.3. Respuesta de los elementos pasivos a una excitación de tipo sinusoidal. Impedancia y admitancia

Relación entre senoides y fasores

$$y(t) = \sqrt{2}Y\cos(\omega t + \varphi)$$

$\mathcal{Y} = Y\angle\varphi = Ye^{j\varphi}$ multiplicando por $e^{j\omega t}$

$$Ye^{j\varphi}e^{j\omega t} = Ye^{j(\varphi+\omega t)} = Y\left(\cos(\varphi + \omega t) + jsen(\varphi + \omega t)\right)$$

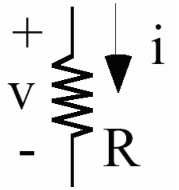
relación de Euler

$$\boxed{\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(\mathcal{Y}e^{j\omega t}\right) = \sqrt{2}Y\cos(\varphi + \omega t)}$$

Una función sinusoidal queda unívocamente representada por su **fasor** correspondiente

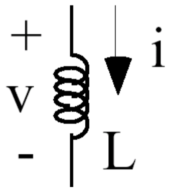
Resumen elementos pasivos

- Resistencia



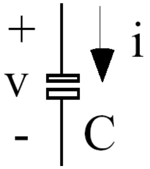
$$u(t) = Ri(t) \qquad i(t) = Gu(t)$$

- Bobina



$$u(t) = L\frac{di(t)}{dt} \qquad i = i(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u(t)dt$$

- Condensador



$$u(t) = u(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)dt \qquad i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$$

Respuesta de los elementos pasivos

- Vamos a analizar la respuesta de los tres elementos pasivos (resistencia, inductancia y capacidad) a una excitación sinusoidal en el domino del tiempo y en el dominio de la frecuencia.
- Imaginemos que conocemos la corriente que circula por cada uno de ellos, que es de la forma:

$$i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \varphi_i)$$

- Y queremos calcular la tensión entre sus terminales, que será del tipo:

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \varphi_u)$$

Respuesta de los elementos pasivos

- A partir de las relaciones entre *u(t)* e *i(t*) en cada uno de los elementos pasivos determinaremos su respuesta.
- Buscamos encontrar los valores de *U* y φ_u en función de *I*, φ_i y los valores de los parámetros *R*, *L* y *C*.
- Los fasores corriente y tensión son:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{I} &= \mathrm{I}\angle\varphi_{\mathbf{i}} \\ \mathcal{U} &= \mathbf{U}\angle\varphi_{\mathbf{u}} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \mathrm{i(t)} &= \sqrt{2}\mathrm{I}\cos(\omega \mathrm{t}+\varphi_{\mathrm{i}}) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(\mathcal{I}\mathrm{e}^{\mathbf{j}\omega\mathbf{t}}\right) \\ u(t) &= \sqrt{2}U\cos(\omega t+\varphi_u) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(\mathcal{U}e^{j\omega t}\right) \end{aligned}$$

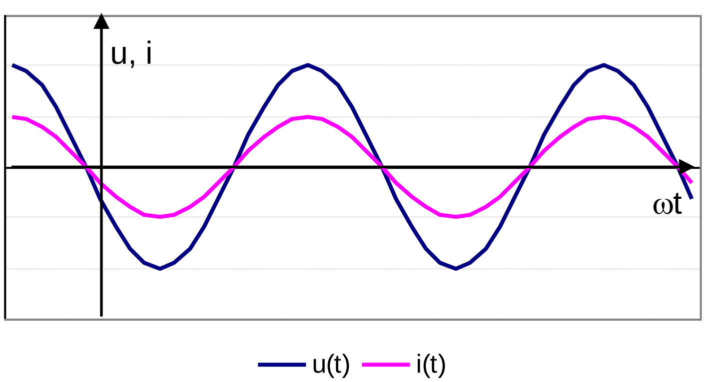
Resistencia

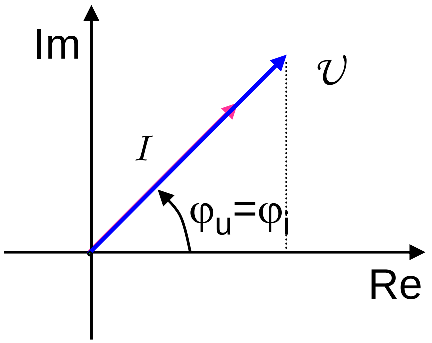
$$\left.\begin{aligned} u &= Ri \\ u(t) &= \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(\mathcal{U}e^{j\omega t}\right) \\ i(t) &= \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(\mathcal{I}e^{j\omega t}\right) \end{aligned}\right\} \mathrm{Re}\left(\mathcal{U}e^{j\omega t}\right) = R\,\mathrm{Re}\left(\mathcal{I}e^{j\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(R\mathcal{I}e^{j\omega t}\right)$$

$$R \in \mathrm{Re}$$

$$\boxed{\mathcal{U} = R\,\mathcal{I}} \quad => \quad U|\varphi_U = RI|\varphi_i \quad \left\{\begin{aligned} U &= RI \\ \varphi_u &= \varphi_i \end{aligned}\right.$$

En una resistencia la tensión y la intensidad están **en fase**





Bobina

$$\left.\begin{aligned} u &= L\frac{di}{dt} \\ u(t) &= \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(\mathcal{V}e^{j\omega t}\right) \\ i(t) &= \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(Ie^{j\omega t}\right) \end{aligned}\right\} \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(Ie^{j\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(\sqrt{2}I\frac{d}{dt}e^{j\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(\sqrt{2}Ij\omega e^{j\omega t}\right)$$

I no depende del tiempo

$$u = L\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Re}\left(\mathcal{V}e^{j\omega t}\right) = L\,\mathrm{Re}\left(Ij\omega e^{j\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(LIj\omega e^{j\omega t}\right)$$

$L \in \mathrm{Re}$

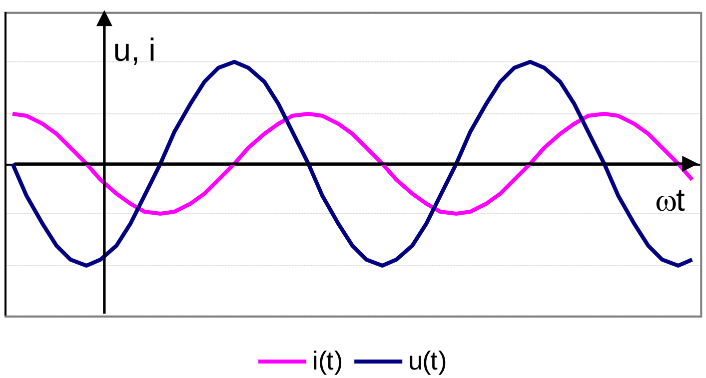
$$\boxed{\mathcal{V} = j\omega L I} \quad \Rightarrow \quad U\angle\varphi_U = \omega j L I\angle\varphi_i = \omega L I e^{j90}e^{j\varphi_i} = \omega L I\angle\varphi_i + 90°$$

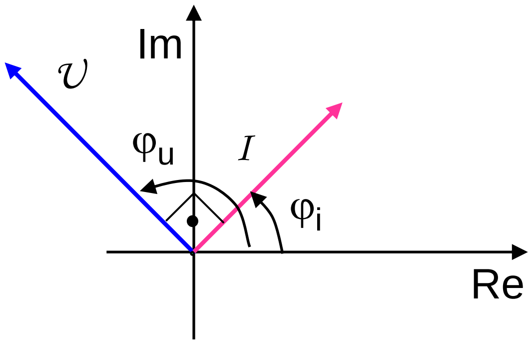
Bobina

$$U\angle\varphi_u = \omega L I \angle \varphi_i + 90^{o} \quad \begin{cases} U = \omega L I \\ \varphi_u = \varphi_i + 90^{o} \end{cases}$$

En una bobina la tensión está **adelantada** 90º respecto a la corriente

$(\varphi_u > \varphi_i)$





Condensador

$$\left.\begin{aligned} i &= C\frac{du}{dt} \\ u(t) &= \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(\mathcal{U}e^{j\omega t}\right) \\ i(t) &= \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(Ie^{j\omega t}\right) \end{aligned}\right\} \quad \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(\mathcal{U}e^{j\omega t}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(\mathcal{U}\frac{d}{dt}e^{j\omega t}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(\mathcal{U}j\omega e^{j\omega t}\right)$$

$\mathcal{U}$ no depende del tiempo

$$i = C\frac{du}{dt} \Rightarrow \mathrm{Re}\left(Ie^{j\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathcal{U}j\omega Ce^{j\omega t}\right) \Rightarrow \boxed{I = \mathcal{U}j\omega C}$$

$C \in \mathrm{Re}$

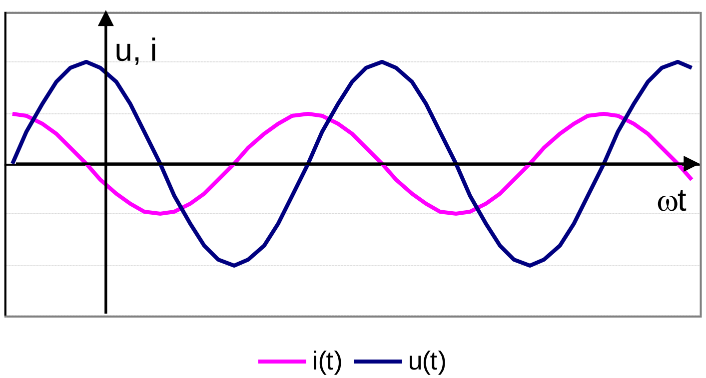
$$\boxed{\mathcal{U} = \frac{-j}{\omega C}I} \Rightarrow U\angle\varphi_U = \frac{-j}{\omega C}I\angle\varphi_i = \frac{1}{\omega C}Ie^{-j90}e^{j\varphi_i} = \frac{1}{\omega C}I\angle\varphi_i - 90^{\circ}$$

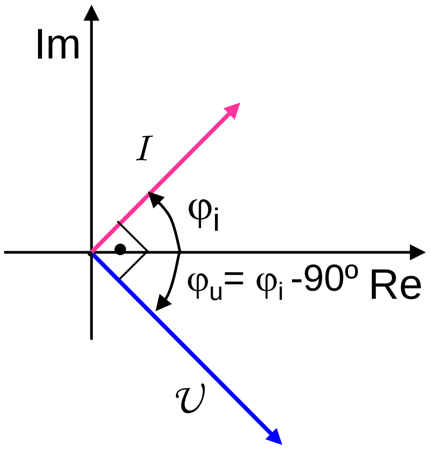
Condensador

$$U\angle\varphi_u = \frac{1}{\omega C} I\angle\varphi_i - 90^{\circ} \begin{cases} U = \dfrac{1}{\omega C} I \\ \varphi_u = \varphi_i - 90^{\circ} \end{cases}$$

En un condensador la tensión está **retrasada** 90º respecto a la corriente

$$(\varphi_u < \varphi_i)$$





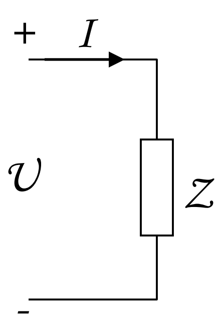
Impedancia compleja

- Las relaciones fasoriales *U=f(I)* en los elementos pasivos son:

Resistencia	Bobina	Condensador
$\mathcal{U} = RI$	$\mathcal{U} = j\omega L I$	$\mathcal{U} = \dfrac{-j}{\omega C} I$

El fasor tensión puede expresarse como el producto de una cantidad compleja por el fasor corriente.

- **Impedancia**: Cociente entre el fasor tensión y el fasor corriente



Se verifica la “Ley de Ohm en notación fasorial”

$$\boxed{\mathcal{U} = \mathcal{Z} I}$$

$\mathcal{Z}$ es un número complejo, pero no un fasor, ya que no se corresponde con ninguna función sinusoidal en el dominio del tiempo

Impedancia

Resistencia

$$\mathcal{Z}_R = R$$

Bobina

$$\mathcal{Z}_L = j\omega L$$

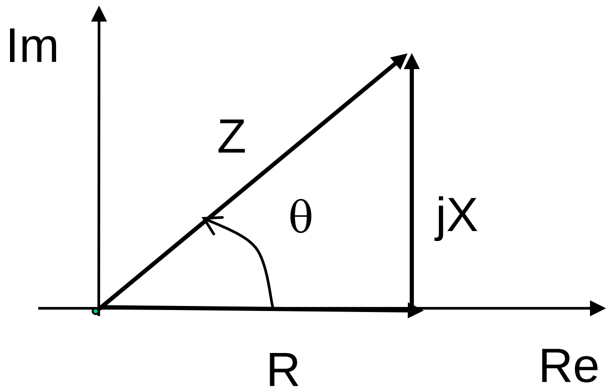
Condensador

$$\mathcal{Z}_C = \frac{-j}{\omega C}$$

$$\mathcal{Z} = R + jX \begin{cases} \mathrm{Re}(\mathcal{Z}) = R & \text{componente resistiva: “Resistencia”} \\ \mathrm{Im}(\mathcal{Z}) = X & \text{componente reactiva : “Reactancia”} \begin{cases} X_L = \omega L > 0 \\ X_C = -\dfrac{1}{\omega C} < 0 \end{cases} \end{cases}$$

$\mathcal{Z}$, R y X se expresan en [Ω]

Triángulo de impedancias



$$\mathcal{Z} = R + jX$$

$$\left|\mathcal{Z}\right| = \sqrt{R^2 + X^2} \qquad \theta = arctg\,\frac{X}{R}$$

$$R = Z\cos\theta \qquad X = Zsen\theta$$

Impedancia y admitancia

$$\mathcal{Z} = R + jX$$

Admitancia $$\mathcal{Y} = \frac{1}{\mathcal{Z}} = G + jB \begin{cases} \mathrm{Re}(\mathcal{Y}) = G & \text{“Conductancia”} \\ \mathrm{Im}(\mathcal{Y}) = B & \text{“Susceptancia”} \end{cases}$$

$\mathcal{Y}$, G y B se expresan en [S]

Resistencia	Bobina	Condensador
$\mathcal{Y}_R = G$	$\mathcal{Y}_L = -j/\omega L$	$\mathcal{Y}_C = j\omega C$

Lemas de Kirchhoff en forma fasorial

- Primer Lema de Kirchhoff: La suma algebraica de los fasores corriente en un nudo es igual a cero.

$$\sum I = 0$$

- Segundo Lema de Kirchhoff: En un lazo o malla, la suma de las elevaciones de tensión de los generadores, expresadas en forma fasorial, es igual a la suma de las caídas de tensión en las impedancias complejas.

$$\sum \mathcal{U} = \sum \mathcal{Z} I$$

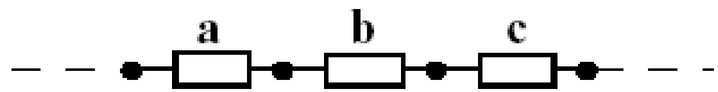
Asociación de impedancias en serie y en paralelo

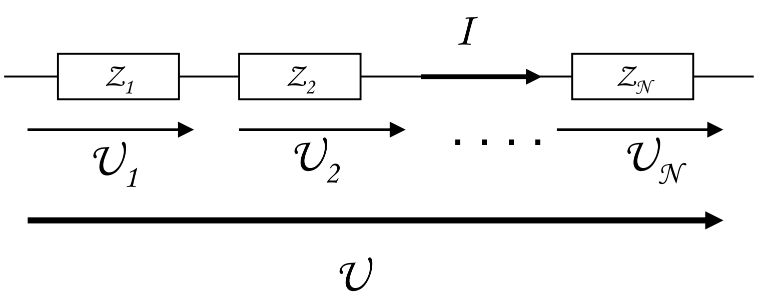
- En régimen sinusoidal permanente es posible agrupar elementos pasivos de distinta naturaleza (resistencias, inductancias y/o capacidades) una vez que cada uno de ellos ha sido caracterizado por su impedancia correspondiente.

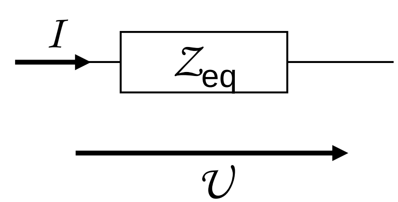
- Las reglas para determinar las impedancias equivalentes de combinaciones de elementos pasivos, son idénticas a las estudiadas para los elementos resistivos, sustituyendo las resistencias por las impedancias complejas.

Asociación de impedancias en serie

- Se dice que dos o más impedancias están en serie si por ellas circula la misma intensidad.





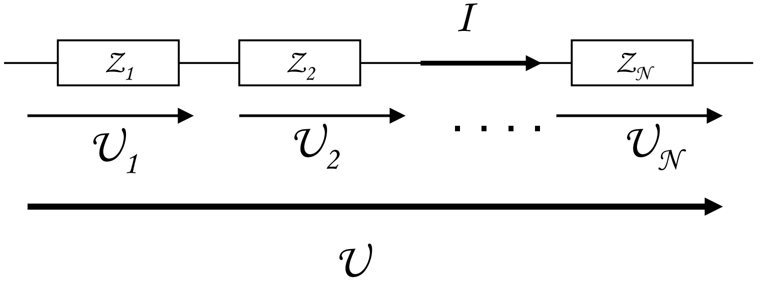


$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \ldots + \mathcal{V}_n = I\mathcal{Z}_1 + I\mathcal{Z}_2 + \ldots + I\mathcal{Z}_n = I(\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2 + \ldots + \mathcal{Z}_n) = I\mathcal{Z}_{eq}$$

$$\boxed{\mathcal{Z}_{eq} = \mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2 + \ldots + \mathcal{Z}_n}$$

Divisor de tensión

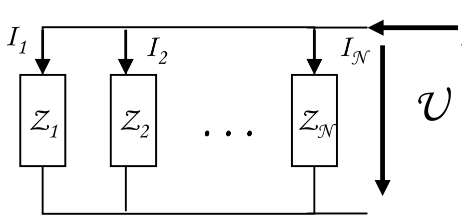
- La tensión que cae en cada impedancia es directamente proporcional al valor de ésta.

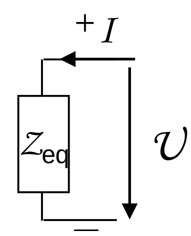


$$V_k = Z_k I = Z_k \frac{V}{Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_N} = \frac{Z_k}{Z_{eq}} V$$

Asociación de impedancias en paralelo

- Se dice que dos o más elementos están en paralelo si están sometidos a la misma tensión





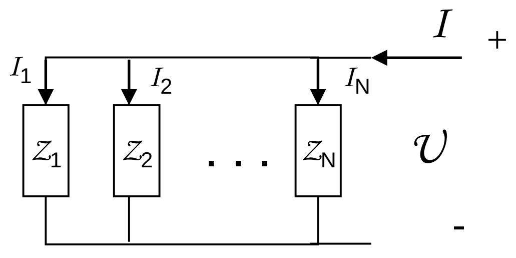
$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_{\mathcal{N}} = \left(\frac{1}{\mathcal{Z}_1} + \frac{1}{\mathcal{Z}_2} + \cdots + \frac{1}{\mathcal{Z}_n} \right) \mathcal{U} = \left(\frac{1}{\mathcal{Z}_{eq}} \right) \mathcal{U}$$

$$\boxed{\frac{1}{\mathcal{Z}_{eq}} = \frac{1}{\mathcal{Z}_1} + \frac{1}{\mathcal{Z}_2} + .. \frac{1}{\mathcal{Z}_n}}$$

o bien $\quad I = \Upsilon_{eq} \mathcal{U}$

$$\boxed{\Upsilon_{eq} = \Upsilon_1 + \Upsilon_2 + \ldots + \Upsilon_{\mathcal{N}}}$$

Divisor de corriente



$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \mathcal{V}Y_1 \\ \mathcal{V} &= \frac{I}{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n} \end{aligned}\right\} \quad I_1 = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n} I$$

$$\boxed{I_k = \frac{\dfrac{1}{Z_k}}{\dfrac{1}{Z_{eq}}} I = \frac{Y_k}{Y_{eq}} I}$$

Diagramas fasoriales

- El diagrama fasorial de un circuito es la representación de sus fasores tensión y corriente en el plano complejo.

- En ocasiones los diagramas fasoriales ayudan en el análisis de los circuitos

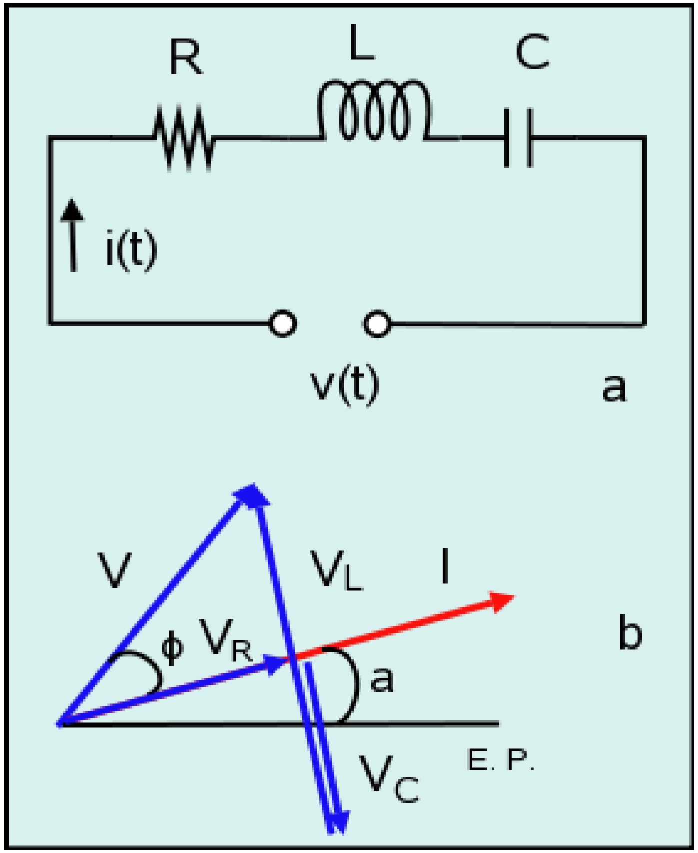
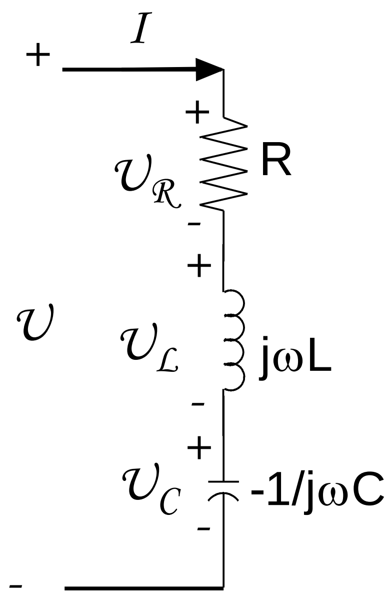
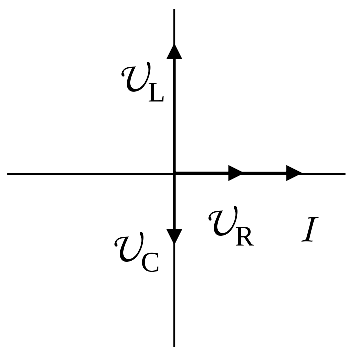


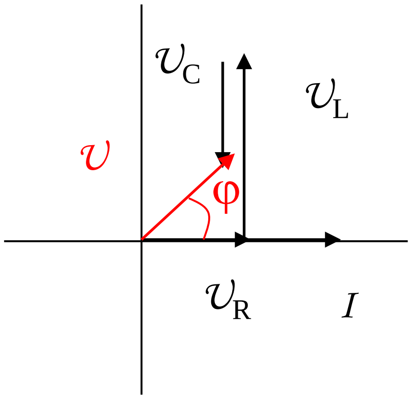
Diagrama fasorial: circuito RLC serie



En un circuito serie tomamos I como origen de fases

$$I = I\angle 0^{o}$$





- $U_L > U_C$ => $\varphi > 0$ circuito inductivo.
- $U_L < U_C$ => $\varphi < 0$ circuito capacitivo.
- $U_L = U_C$ => $\varphi = 0$ circuito resonante.

$$\mathcal{U}_R = RI = RI\angle 0^{o} = U_R\angle 0^{o}$$

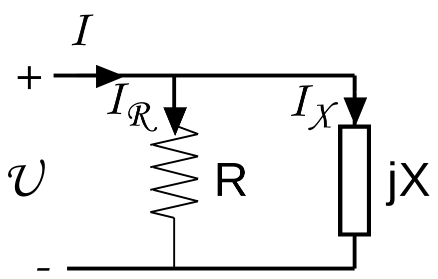
$$\mathcal{U}_L = Z_L I = j\omega L I = \omega L I\angle 90^{o}$$

$$\mathcal{U}_C = Z_C I = \frac{-j}{\omega C} I = \frac{1}{\omega C} I\angle -90^{o}$$

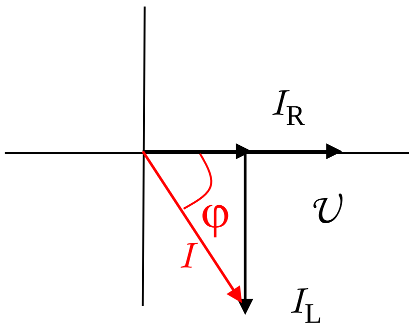
¡La suma de módulos no es igual al módulo de la suma!

Diagrama fasorial: circuito RX paralelo

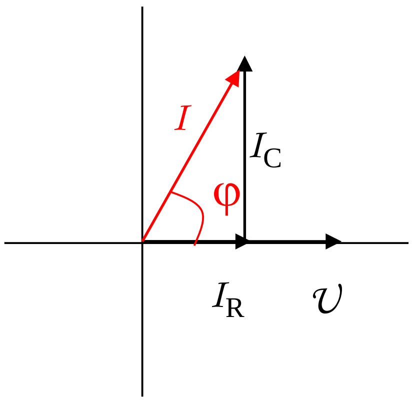
En un circuito paralelo tomamos $\mathcal{V}$ como origen de fases: $\mathcal{V} = U\angle 0^{\circ}$



Bobina



Condensador



$$I_R = \frac{\mathcal{V}}{R} = \frac{U}{R}\angle 0^{\circ}$$

$$I_X = \frac{\mathcal{V}}{jX} \begin{cases} \text{Bobina} \quad I_X = \dfrac{U}{X_L}\angle -90^{\circ} \\ \text{Condensador} \quad I_X = \dfrac{U}{X_C}\angle 90^{\circ} \end{cases}$$

3.4. Resolución de circuitos en corriente alterna

Análisis de circuitos alimentados en C.A.

- Se sustituye el circuito en el dominio del tiempo por un circuito en el dominio de la frecuencia.
  - Los elementos pasivos se sustituyen por sus impedancias complejas correspondientes.
  - Las corriente y tensiones en el dominio del tiempo se sustituyen por sus fasores correspondientes.
- Se aplican los lemas de Kirchhoff en forma fasorial.

Lemas de Kirchhoff en forma fasorial

- Primer Lema de Kirchhoff: La suma algebraica de los fasores corriente en un nudo es igual a cero.

$$\sum I = 0$$

- Segundo Lema de Kirchhoff: En un lazo o malla, la suma de las elevaciones de tensión de los generadores, expresadas en forma fasorial, es igual a la suma de las caídas de tensión en las impedancias complejas

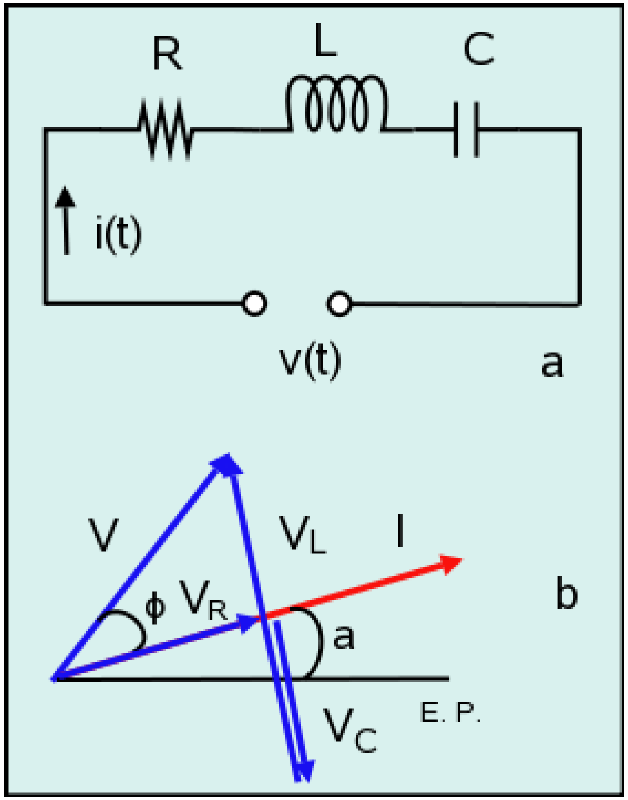
$$\sum \mathcal{U} = \sum \mathcal{Z} I$$

Métodos de resolución de circuitos

- Todos los métodos estudiados para la resolución de circuitos alimentados en corriente continua, son directamente aplicables a circuitos alimentados en alterna, trabajando en el dominio de la frecuencia.
  - Método de las corrientes de malla.
  - Principio de superposición: Especialmente útil cuando en un circuito existen fuentes de distinta frecuencia que actúan simultáneamente.
  - Teoremas de Thevenin y Norton.

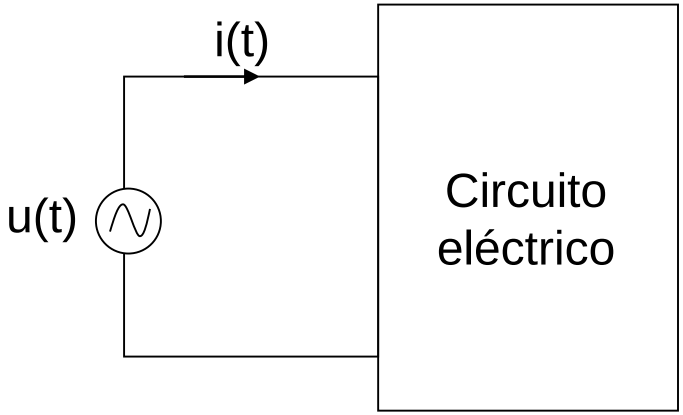
Diagramas fasoriales

- En muchas ocasiones la representación de las tensiones y corrientes de un circuito en diagramas fasoriales es de gran ayuda a la hora de resolver circuitos alimentados en corriente alterna.



3.5 Potencia en alterna

Potencia en un circuito de C.A.



$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos \omega t$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

Tomaremos la tensión como origen de fases.

•Si $\varphi > 0$ (i retrasada respecto a u): Carga inductiva

•Si $\varphi < 0$ (i adelantada respecto a u): Carga capacitiva

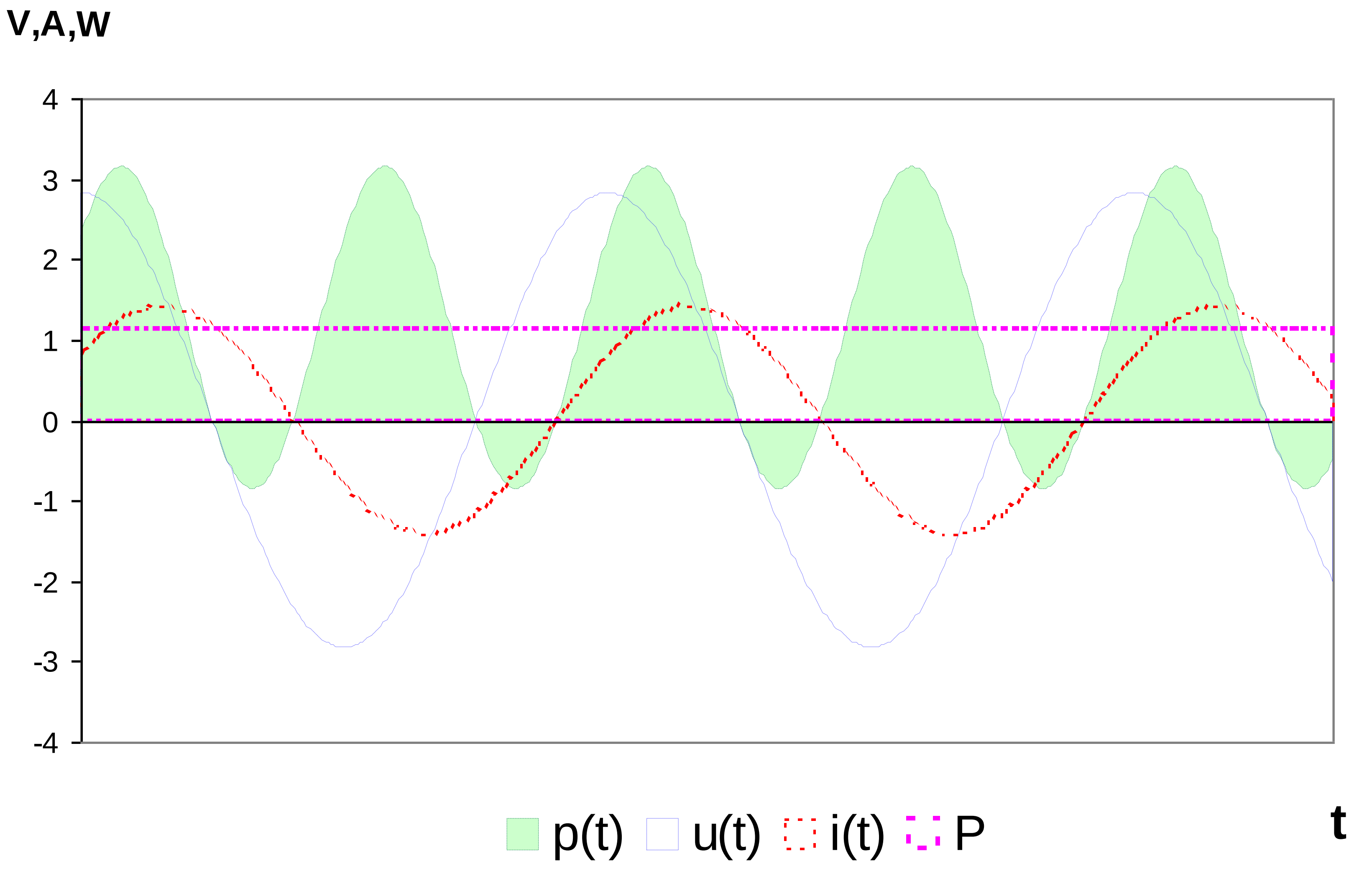
Potencia instantánea

$$p(t) = u(t)i(t) = 2UI\cos\omega t\cos(\omega t - \varphi) =$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$$

$$= 2UI\frac{1}{2}\left(\cos(2\omega t - \varphi) + \cos\varphi\right) = \underbrace{UI\cos\varphi}_{\text{término constante}} + \underbrace{UI\cos(2\omega t - \varphi)}_{\text{término fluctuante de frecuencia doble que u e i}}$$

Potencia instantánea



Potencia instantánea

Signo de la potencia

$i>0$ y $u>0 \Rightarrow p>0$

$i<0$ y $u<0 \Rightarrow p>0$

$i>0$ y $u<0 \Rightarrow p<0$

$i<0$ y $u>0 \Rightarrow p<0$

¿Cómo puede ocurrir que una carga a veces absorba y otras ceda potencia?...

Las bobinas y los condensadores consumen potencia en determinados instantes ($p>0$) y luego la devuelven a la fuente ($p<0$)

$$W = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu^2$$

Potencia media

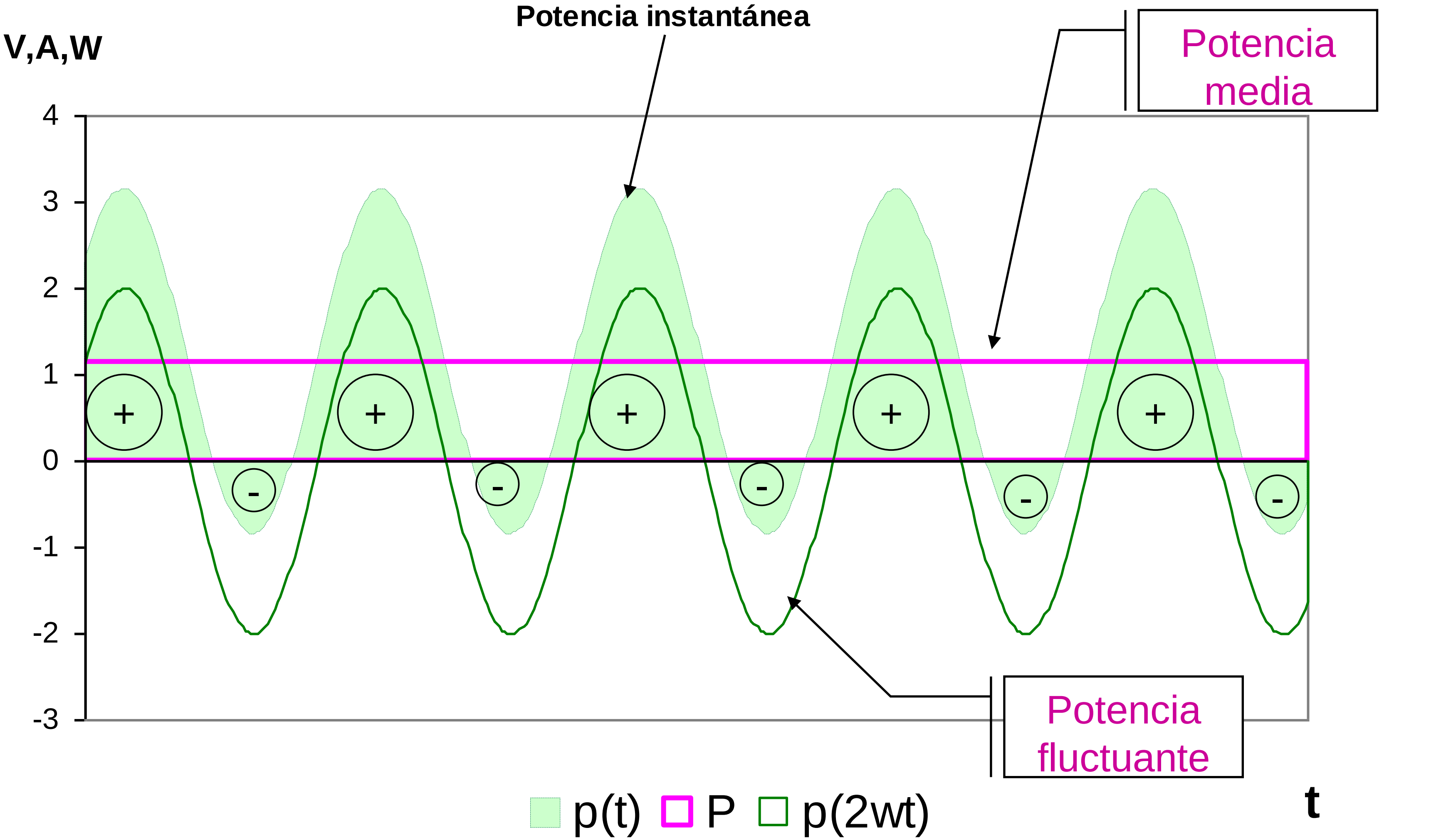
$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T\left[U\cdot I\cdot\cos\varphi+U\cdot I\cdot\cos(2\omega t-\varphi)\right]dt=$$

$$=U\cdot I\cdot\cos\varphi$$

La potencia instantánea se puede expresar como la suma de una potencia media y una potencia fluctuante

$$p(t)=P+U\cdot I\cdot\cos(2\omega t-\varphi)$$

Potencia


Potencia instantánea
V,A,W
Potencia media
Potencia fluctuante
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
+
-
p(t)
P
p(2wt)
t

Potencia activa y reactiva

$$p(t) = P + U \cdot I \cdot \cos(2\omega t - \varphi) =$$

$$\cos(\alpha - \beta) = (\cos\alpha \cos\beta + sen\alpha sen\beta)$$

$$= P + U \cdot I \cdot \cos\varphi \cdot \cos 2\omega t + U \cdot I \cdot sen\varphi \cdot sen 2\omega t$$

Definición:

Potencia media = potencia activa $\boxed{P = U \cdot I \cdot \cos\varphi}$

Potencia reactiva $\boxed{Q = U \cdot I \cdot sen\varphi}$

$$p(t) = P(1 + \cos(2\omega t)) + Q sen(2\omega t)$$

Potencia instantánea

$$p(t) = P(1 + \cos(2\omega t)) + Qsen(2\omega t)$$

- La potencia instantánea absorbida o generada por un circuito consta de dos términos:
  - Término constante: P = POTENCIA ACTIVA, igual al valor medio de la potencia instantánea.
  - Término oscilante de pulsación 2ω, que a su vez se descompone en dos sumandos:
    - Amplitud P y pulsación 2ω $P\cos 2\omega t$
    - Amplitud Q, pulsación 2ω, retrasado 90º $Qsen 2\omega t$
- Amplitud de la potencia fluctuante: “Potencia aparente”.

$$\boxed{P = U \cdot I \cdot \cos\varphi} \quad \boxed{Q = U \cdot I \cdot sen\varphi} \quad S = UI$$

Resumen

- Potencia activa: $P = U \cdot I \cdot \cos\varphi$ [W]
- Potencia reactiva: $Q = U \cdot I \cdot sen\varphi$ [VAr]
- Potencia aparente: $S = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2}$ [VA]
- Factor de potencia: $f.p. = \dfrac{P}{S} = \cos\varphi$ $\quad 0 < f.p. \leq 1$

φ= argumento impedancia compleja

- –Cargas inductivas φ>0
- –Cargas capacitivas φ<0

Potencia en una resistencia

$$\mathcal{Z}_R = R$$

$$\mathcal{V} = \mathrm{R}\mathbf{I} \quad \begin{cases} \varphi = 0^{\circ} \\ U = RI \end{cases}$$

$$u(t) = \sqrt{2}U\cos\omega t$$

$$i(t) = \sqrt{2}I\cos\omega t$$

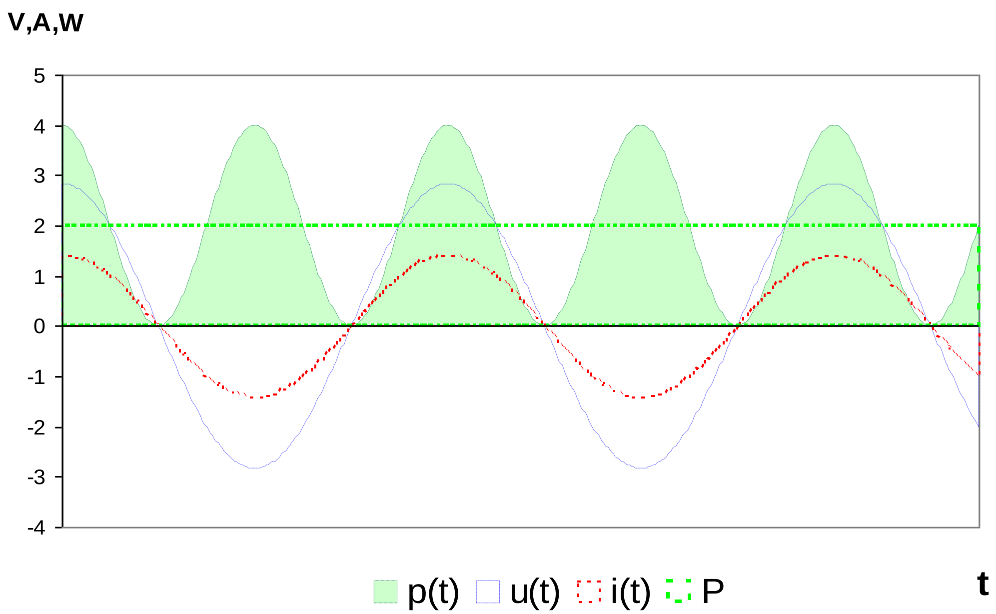
$$P_R = UI\cos\varphi = UI = RI^2$$

$$Q_R = UIsen\varphi = 0$$

$$S_R = UI = P_R$$

Una resistencia únicamente consume potencia activa

Potencia en una resistencia



$$p(t)_R = P_R(1 + \cos 2\omega t)$$

La potencia instantánea consumida varía entre 0 y $2 \cdot P_R$ en función de los valores absolutos de u e i

Potencia en una bobina

$$\mathcal{Z}_L = j\omega L$$

$\mathcal{U} = \boldsymbol{j}\omega\mathrm{L}\mathbf{I}$ => $\mathbf{I} = \dfrac{\mathcal{U}}{\boldsymbol{j}\omega \boldsymbol{L}} = \dfrac{\mathrm{U}}{\omega \boldsymbol{L}} \angle -90^{\mathbf{o}}$ **I** retrasada 90º respecto a $\mathcal{U}$

$$\mathrm{U} = \boldsymbol{L}\omega\mathrm{I} \qquad \varphi = 90^{\mathrm{o}}$$

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos \omega t \qquad i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

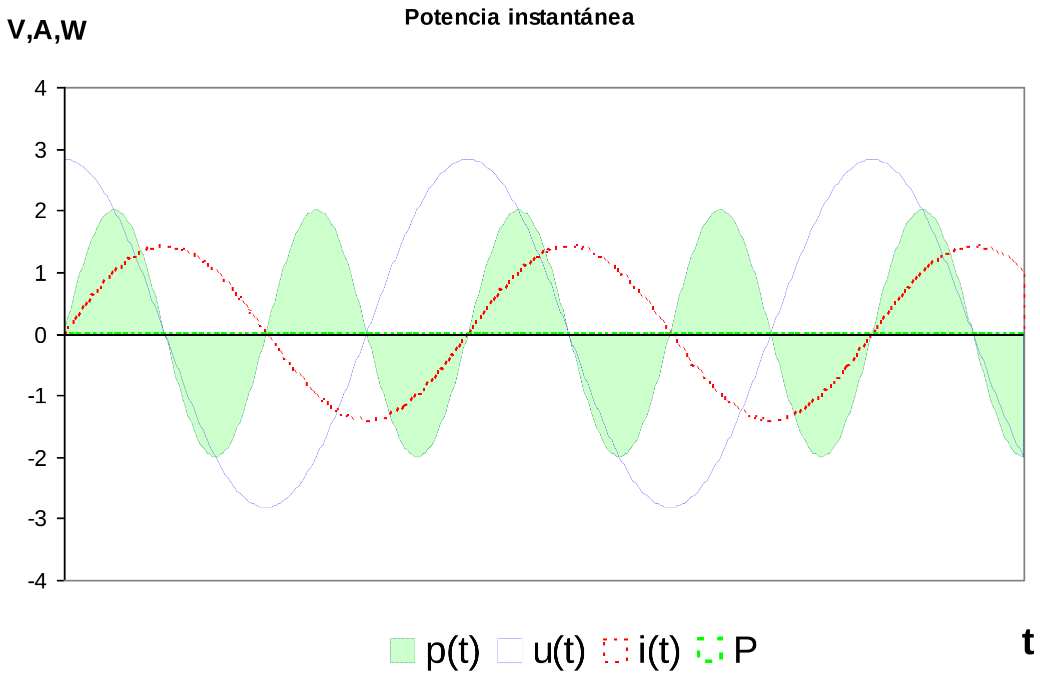
$$P_L = UI\cos\varphi = 0$$

$$Q_L = UIsen\varphi = UI = L\omega I^2 = X_L I^2 > 0$$

$$S_L = UI = Q_L$$

Una bobina **consume** potencia reactiva

Potencia en una bobina



$$p(t)_L = Q_L(sen2\omega t)$$

•La potencia instantánea oscila en torno a 0: hay un intercambio entre la fuente y la bobina.

•La potencia media es 0.

Potencia en un condensador

$$\mathcal{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$$

I adelantada 90º respecto a $\mathcal{U}$

$$\mathcal{U} = \frac{1}{\mathbf{j}\omega\mathbf{C}}\mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I} = \frac{\mathcal{U}}{\frac{1}{j\omega C}} = U\omega C\angle 90º$$

$$u(t) = \sqrt{2}\cdot U\cdot\cos\omega t$$

$$U = \frac{1}{\omega C}I \qquad \varphi = -90º$$

$$i(t) = \sqrt{2}\cdot I\cdot\cos(\omega t - \varphi)$$

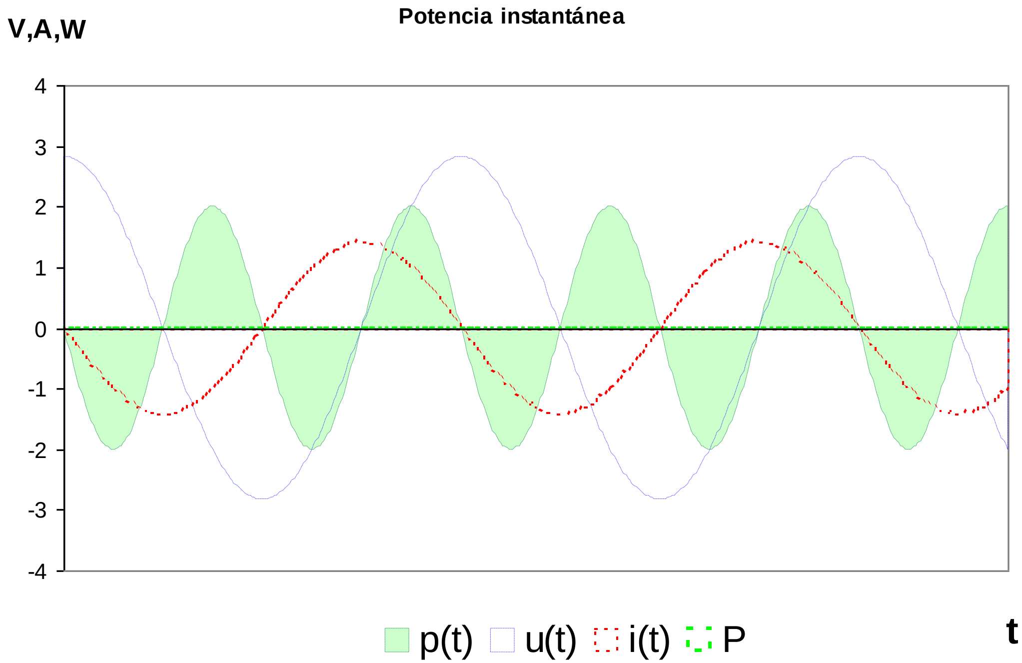
$$\mathrm{P_C} = \mathrm{UI}\cos\varphi = 0$$

$$\mathrm{Q_C} = \mathrm{UI}\,\mathrm{sen}\,\varphi = -\mathrm{UI} = -\frac{1}{\omega \mathrm{C}}\mathrm{I}^2 = -\mathrm{X_C I}^2 < 0$$

$$\mathrm{S_C} = \mathrm{UI} = \mathrm{Q_C}$$

Un condensador **cede** potencia reactiva

Potencia en un condensador



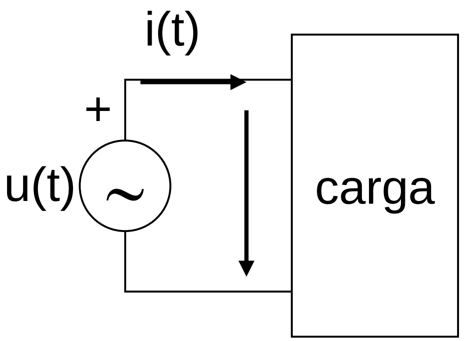
$$p(t)_C = Q_C(sen2\omega t)$$

- La potencia instantánea oscila en torno a 0: hay un intercambio entre la fuente y el condensador.
- No existe disipación de energía (potencia media es 0).

Conclusión P y Q

- P representa el consumo de potencia en las resistencias (P es el valor medio de la potencia disipada).
- Q representa un intercambio de potencia entre las bobinas y condensadores y la fuente (Q es una amplitud de la potencia intercambiada).
  - $Q_C<0$=> un condensador cede potencia reactiva
  - $Q_L>0$=> una bobina consume potencia reactiva

Potencia compleja



$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \cos \omega t \qquad \mathcal{U} = U\angle 0^{\circ}$$

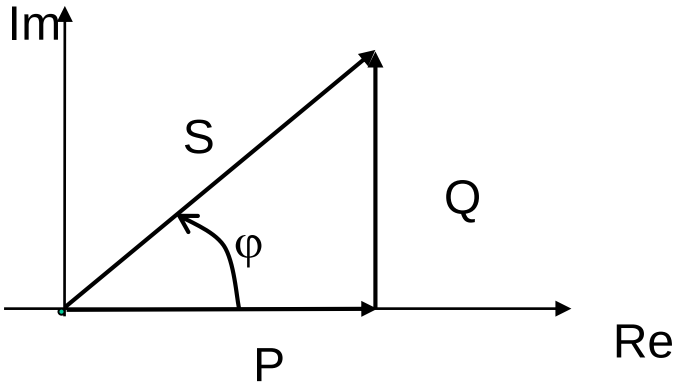
$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos(\omega t - \varphi) \qquad \mathbf{I} = I\angle -\varphi$$

Se define potencia compleja como:

$$\mathcal{S} = \mathcal{U} \cdot \mathbf{I}^{*} = U\angle 0^{\circ} I\angle \varphi = UI\angle \varphi$$

$$\mathcal{S} = UI\cos\varphi + jUIsen\varphi = P + jQ$$

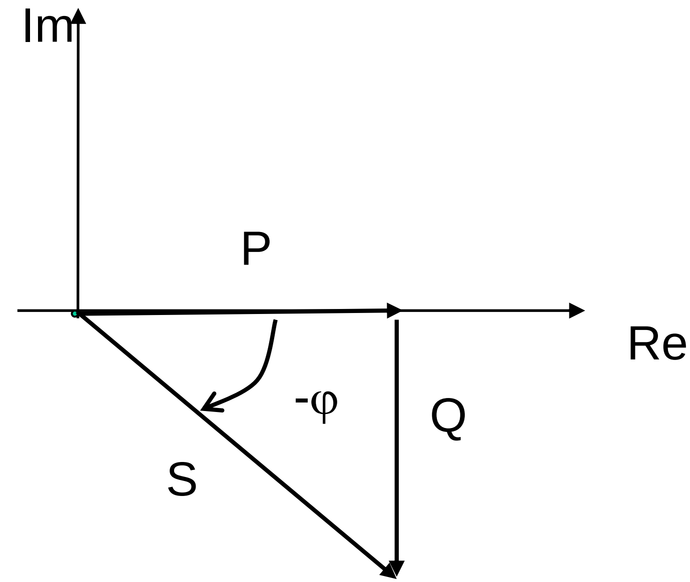
Triángulo de potencias



$0º<\varphi<90º$

Q>0 carga inductiva

(P>0, carga)



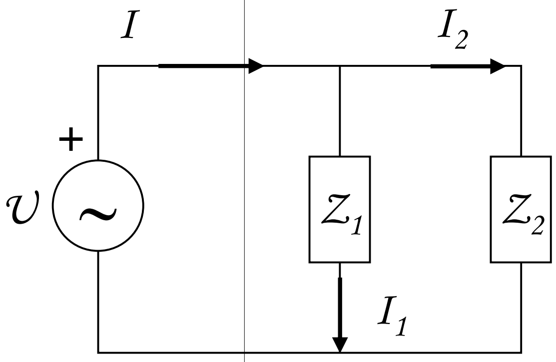
$-90º<\varphi<0º$

Q<0 carga capacitiva

(P>0, carga)

Teorema de Boucherot

- Principio de conservación de la potencia compleja



$$\mathcal{S} = \mathcal{V}\cdot\mathbf{I}^{*} = \mathcal{V}\cdot\left(\mathbf{I_1}+\mathbf{I_2}\right)^{*} = \mathcal{V}\cdot\mathbf{I_1}^{*} + \mathcal{V}\cdot\mathbf{I}_2^{*} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$$

La suma de potencias complejas suministradas por las fuentes es igual a la suma de las potencias complejas absorbidas por las cargas

$$\sum_{i=1}^{n} Pg_i = \sum_{i=1}^{m} Pc_i \qquad \sum_{i=1}^{n} Qg_i = \sum_{i=1}^{m} Qc_i$$

Importancia del factor de potencia

$$p(t) = P(1 + \cos(2\omega t)) + Qsen(2\omega t)$$

- P=> potencia media consumida (consumo de potencia en Rs).
- Q=> Amplitud de la fluctuación de potencia entre la fuente y la carga (carga y descarga de las bobinas y condensadores).
- Una fuente debe suministrar:
  - P. Objetivo. Necesaria.
  - Q. Fluctuación de potencia. ¿necesaria?.
- Q contribuye a circulación de corriente por las líneas (con R_p parásita). Pérdidas de potencia activa: $P=R_p \cdot I^2$.
- Es necesario limitar el consumo de Q.
- Interesa que el f.d.p. sea lo más alto posible.

Inconvenientes de cosφ pobre

1. Aumenta la corriente consumida.
2. Aumentan las pérdidas en las líneas.
3. Disminuye el rendimiento.
4. Aumenta la caída de tensión en las líneas.
5. Aumenta la potencia aparente consumida.

$$f.p. = \frac{P}{S} = \cos\varphi$$

$$S = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

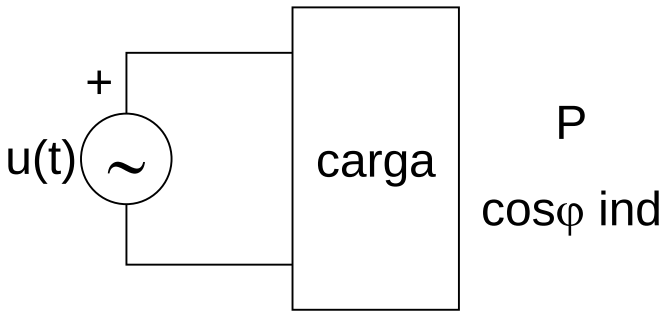
Compensación del factor de potencia

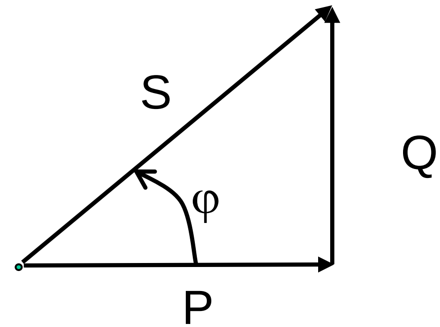
$$f.p. = \frac{P}{S} = \cos\varphi \qquad S = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

- Es conveniente trabajar con f.d.p. próximos a la unidad.
- Problema: Cargas típicamente inductivas (p.e., motores….).
- Conclusión: necesidad de consumo de potencia reactiva para funcionamiento de la mayoría de cargas.
- Es necesario compensar el consumo de potencia reactiva mediante elementos que:
  - No consuman *P* adicional.
  - Cedan *Q*.

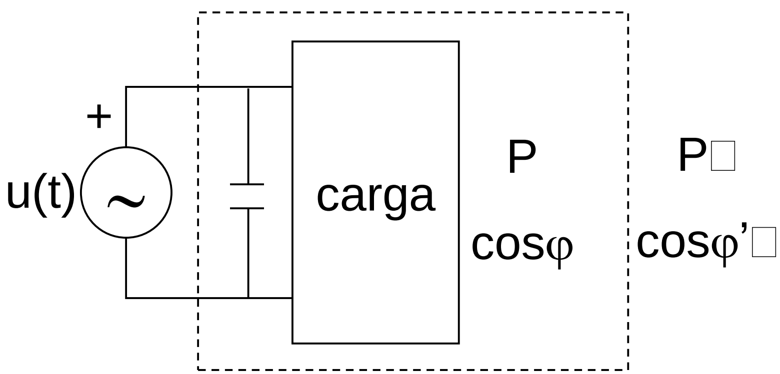
→ Condensadores

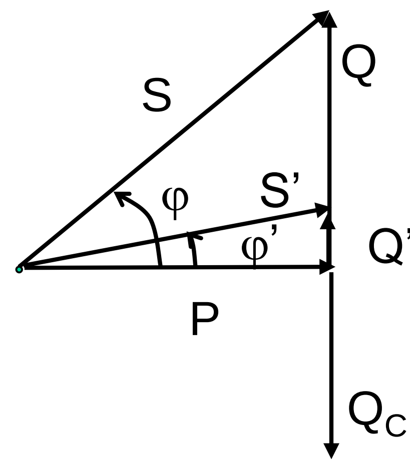
Compensación de reactiva





Se puede colocar un condensador de capacidad C en paralelo con la carga que genere parte de la Q consumida



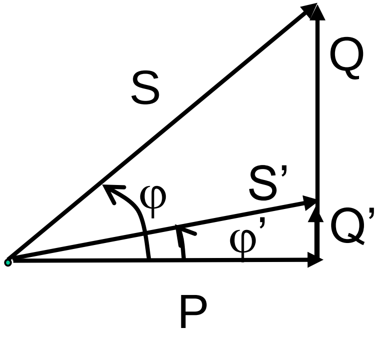


Compensación de reactiva

Potencia reactiva cedida por el condensador

$$Q_C = UIsen\varphi_C = -UI = -\omega CU^2$$

$$sen\varphi_C = -1$$



$$Q - Q' = \Delta Q = \omega CU^2 \qquad Q - Q' = Ptg\varphi - Ptg\varphi'$$

$$\omega CU^2 = P(tg\varphi - tg\varphi') \qquad \boxed{C = \frac{P(tg\varphi - tg\varphi')}{\omega U^2}}$$

Capacidad del condensador para compensar ΔQ