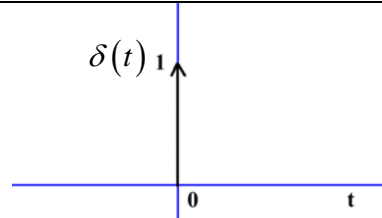


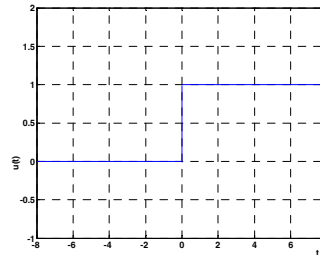
Definición de algunas señales utilizadas en teoría de la señal:

$\delta(t)$ (señal delta de dirac) definida bajo el

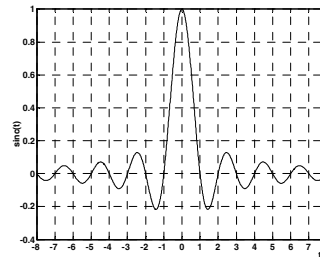
signo integral: $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t) dt = x(0)$



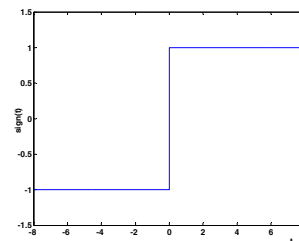
$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 1/2 & \text{si } t=0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} \quad (\text{señal escalón unitario})$$



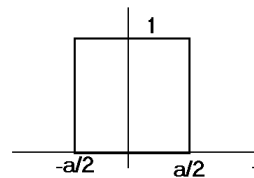
$$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \quad (\text{señal sinc})$$



$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t=0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (\text{señal signo})$$

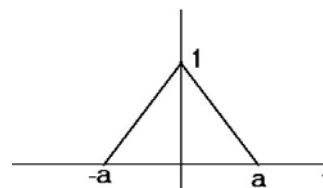


$$\Pi\left(\frac{t}{a}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{a}{2} < t < \frac{a}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } t = \frac{a}{2} \text{ ó } t = -\frac{a}{2} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



(señal rectángulo)

$$\Lambda\left(\frac{t}{a}\right) = \begin{cases} t+a & \text{si } -a \leq t \leq 0 \\ t-a & \text{si } 0 < t \leq a \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



(señal triángulo)

Transformada de Fourier y desarrollo en serie de Fourier (tiempo continuo):

Transformada	$X(f) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt$
Transformada Inversa	$x(t) = F^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df$
Desarrollo en serie de Fourier (x(t) periódica de periodo fundamental T ₀).	$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{j \frac{2 \cdot \pi}{T_0} n \cdot t}$ $c_n = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{T_0} x(t) \cdot e^{-j \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T_0} t} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
Coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la expansión periódica de una señal de duración T ₀	$c_n = f_0 \cdot X(n \cdot f_0)$

Teoremas y propiedades de la transformada de Fourier (tiempo continuo)

Operación	Función	Transformada
Superposición	$a_1 \cdot x_1(t) + a_2 \cdot x_2(t)$	$a_1 \cdot X_1(f) + a_2 \cdot X_2(f)$
Retardo en el tiempo	$x(t - t_d)$	$X(f) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t_d}$
Cambio de escala	$x(\alpha \cdot t)$	$\frac{1}{ \alpha } \cdot X\left(\frac{f}{\alpha}\right)$
Inversión en el tiempo	$x(-t)$	$X(-f)$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Dualidad	$X(t)$	$x(-f)$
Traslación en frecuencia	$x(t) \cdot e^{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f_c \cdot t}$	$X(f - f_c)$
Modulación	$x(t) \cdot \cos(2\pi \cdot f_c \cdot t + \phi)$	$\frac{1}{2} \cdot (X(f - f_c) \cdot e^{j\phi} + X(f + f_c) \cdot e^{-j\phi})$
Derivación	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)^n \cdot X(f)$
Integración	$\int_{-\infty}^t x(\lambda) d\lambda$	$\frac{1}{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \cdot X(f) + \frac{1}{2} X(0) \cdot \delta(f)$
Parte par de una señal real	$\text{Par}(x(t)) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$	$\text{Re}(X(f)) = \frac{X(f) + X^*(f)}{2}$

Parte impar de una señal real	$\text{Impar}(x(t)) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$	$j \cdot \text{Im}(X(f)) = \frac{X(f) - X^*(f)}{2}$
Convolución	$x(t) * y(t)$	$X(f) \cdot Y(f)$
Multiplicación	$x(t) \cdot y(t)$	$X(f) * Y(f)$
Multiplicación por t^n	$t^n \cdot x(t)$	$(-j \cdot 2 \cdot \pi)^n \cdot \frac{d^n X(f)}{df^n}$

Teorema Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot Y^*(f) df$$

Teorema de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Pares de transformadas de Fourier más habituales:

Función	$x(t)$	$X(f)$
Rectangular	$\Pi\left(\frac{t}{a}\right)$	$a \cdot \text{sinc}(f \cdot a)$
Triangular	$\Lambda\left(\frac{t}{a}\right)$	$a \cdot \text{sinc}^2(f \cdot a)$
Gaussiana	$e^{-\pi \cdot (b \cdot t)^2}$	$\frac{1}{b} \cdot e^{-\pi \cdot (f/b)^2}$
Exponencial causal	$e^{-b \cdot t} \cdot u(t), \quad b > 0$	$\frac{1}{b + j2\pi f}$
Exponencial simétrica	$e^{-b t }, \quad b > 0$	$\frac{2b}{b^2 + (2\pi f)^2}$
Sinc	$\text{sinc}(2Wt)$	$\frac{1}{2W} \Pi\left(\frac{f}{2W}\right)$
Sinc al cuadrado	$\text{sinc}^2(2Wt)$	$\frac{1}{2W} \Lambda\left(\frac{f}{2W}\right)$
Constante	1	$\delta(f)$
Fasor	$e^{j(2\pi f_c t + \phi)}$	$e^{j\phi} \cdot \delta(f - f_c)$
Sinusoide	$\cos(2\pi \cdot f_c \cdot t + \phi)$	$\frac{1}{2} \cdot (\delta(f - f_c) \cdot e^{j\phi} + \delta(f + f_c) \cdot e^{-j\phi})$
Coseno	$\cos(2\pi \cdot f_c \cdot t)$	$\frac{1}{2} \cdot (\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c))$
Seno	$\sin(2\pi \cdot f_c \cdot t)$	$\frac{1}{2j} \cdot (\delta(f - f_c) - \delta(f + f_c))$

Delta de dirac (Impulso)	$\delta(t)$	1
Derivada del impulso	$\delta'(t)$	$j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f$
Derivada n-ésima del impulso	$\delta^{(n)}(t)$	$(j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)^n$
Impulso desplazado	$\delta(t - t_d)$	$e^{-j2\pi f \cdot t_d}$
Tren de deltas (muestreo)	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k \cdot T_s)$	$\frac{1}{T_s} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - n \cdot \frac{1}{T_s}\right)$
Signo	$\text{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
Escalón unitario	$u(t)$	$\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f)$

Otras pares de transformadas:

$$u(-t) \quad \frac{-1}{j2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f)$$

$$\frac{1}{t} \quad -j\pi \cdot \text{sgn}(f)$$

$$\frac{1}{a^2 + t^2} \quad \frac{\pi}{a} e^{-2\pi \cdot a |f|}$$

$$t \cdot e^{-bt} \cdot u(t), \quad b > 0 \quad \frac{1}{(b + j2\pi f)^2}$$

Transformada de Hilbert:

Transformada de Hilbert	$\hat{x}(t) = \mathcal{H}(x(t)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau$
Transformada de Hilbert inversa	$x(t) = \mathcal{H}^{-1}(\hat{x}(t)) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t-\tau} d\tau$

Propiedades de la transformada de Hilbert:

-
- Una señal y su transformada de Hilbert tiene la misma densidad espectral y función de autocorrelación.
 - $\mathcal{H}(x(t)) = \hat{x}(t)$
 - $\mathcal{H}(\hat{x}(t)) = -x(t)$
 - La transformada de Hilbert de una señal par es impar.
 - La transformada de Hilbert de una señal impar es par.
 - Si $x(t)$ es real se cumple que la correlación cruzada $\rho_{\hat{x}x}(\tau) = -\rho_{\hat{x}x}(-\tau)$
 - Si $x(t)$ es real se cumple que la densidad espectral cruzada, $S_{\hat{x}x}(f)$, es imaginaria pura.
 - Una señal y su transformada de Hilbert son ortogonales (ortogonalidad para $\tau=0$):
 $\rho_{\hat{x}x}(0) = 0$
-

Pares de transformadas de Hilbert más habituales:

Tabla de Transformadas de Hilbert^a

<i>Señal</i>	<i>Transformada de Hilbert</i>
$m(t) \cos(2\pi f_c t)$	$m(t) \sin(2\pi f_c t)$
$m(t) \sin(2\pi f_c t)$	$-m(t) \cos(2\pi f_c t)$
$\cos(2\pi f_c t)$	$\sin(2\pi f_c t)$
$\sin(2\pi f_c t)$	$-\cos(2\pi f_c t)$
$\delta(t)$	$\frac{1}{\pi t}$
$\frac{1}{t}$	$-\pi\delta(t)$

^aEn los dos primeros pares de transformadas se ha considerado que $m(t)$ está limitada en banda en el intervalo $-W \leq f \leq W$ con $W < f_c$