Capítulo 6

Tests y Problemas de Combinatoria

6.1. Tests de Combinatoria

1. Un ayuntamiento tiene tres viviendas disponibles para familias en situación de emergencia social. A ellas optan 10 familias. El número de formas en que puede hacerse esta asignación es:

   a) 120.

   b) 1000.

   c) 220.

   d) 720

2. La mesa presidencial de un acto universitario está compuesta por ocho personas. En el centro deben ir siempre el Rector y el Ministro. El número de formas en que se pueden sentar los miembros de la mesa es:

   a) P_2P_6.

   b) P_2P_7.

   c) $2P_2P_3$.

   d) P_8.

3. Hay cuatro ordenadores idénticos y diez empleados que han solicitado ordenador. El número de formas en que se pueden distribuir, si un empleado no puede recibir más de un ordenador, es:

   a) $V_{10}^{6}C_{10}^{4}$.

   b) CR_{4}^{10}.

   c) C_{10}^{4}.

   d) Ninguno de los anteriores.

4. El número de formas de repartir 6 videojuegos iguales entre cuatro personas es:

   a) 4^6.

   b) 6^4.

c) CR_4^6.
d) CR_6^4.

5. Escribimos en sistema binario un número que como máximo tenga cuatro cifras (se admite que la primera cifra de la izquierda sea cero). La cantidad de números posibles es:
   a) 10.
   b) 30.
   c) 16.
   d) 48.

6. El números de formas de repartir 10 bolas rojas en cuatro cajas numeradas es:
   a) $PR_{13}^{10,3}$.
   b) CR_4^{10}.
   c) VR_4^{10}.
   d) VR_{10}^4.

7. El número de formas diferentes de cambiar 90 euros en billetes de 5, 10, 20 y 50 es:
   a) El coeficiente de x^{90} de $(x+x^5+x^{10}+x^{15}+\ldots+x^{90})(x^{10}+x^{20}+x^{30}+\ldots+x^{90})(x^{20}+x^{40}+\ldots+x^{80})(1+x^{50})$.
   b) El coeficiente de x^{90} de $\frac{1}{1-x^5}\frac{1}{1-x^{10}}\frac{1}{1-x^{20}}\frac{1}{1-x^{50}}$.
   c) $\binom{85}{1,25,40,20}$.
   d) Ninguno de las anteriores.

8. Cinco niñas y cinco niños se disponen a jugar al corro, el número de formas de colocarse en círculo es:
   a) P_4P_5.
   b) 10!
   c) $\frac{V_{10}^9}{C_{10}^9}$.
   d) $2P_5$.

9. Tenemos cuatro tipos de bolas (rojas, azules, verdes y amarillas). Extraemos 13 bolas. El número posible de extracciones es:
   a) $\binom{12}{3}$.
   b) CR_4^{13}.
   c) CR_{13}^4.
   d) Ninguna de las anteriores.

10. Un grupo de personas está integrado por 15 hombres y 12 mujeres. El número de formas de elegir un comité integrado por 5 mujeres y 4 hombres es:
   a) $V_{12}^5V_{15}^4$.
   b) $\binom{12}{5}\binom{15}{4}$.

c) $PR_{27}^{5,4}$.
d) $PR_{27}^{15,12}$.

11. En un supermercado deben disponer cien botellas iguales de agua entre cuatro baldas de una estantería sin dejar ninguna balda vacía. El número de formas de hacerlo es:

a) $\binom{99}{3}$.
b) VR_4^{100}.
c) $f(100,4)$.
d) Ninguno de los anteriores.

12. Un concesionario de Audi tiene a la venta seis modelos distintos de coche. Va a poner en exposición 13 coches. El número de posibles elecciones es:

a) CR_{13}^{6}.
b) $\binom{18}{13}$.
c) $\binom{12}{5}$.
d) Ninguna de las anteriores.

13. En una urbanización, el 43 % de las casas tiene un coche, el 27 % moto y el 50 % tienen bicicleta. Se sabe también que: el 16 % tiene coche y moto, el 20 % tiene coche y bicicleta, el 18 % tienen moto y bicicleta y un 10 % tienen coche, moto y bicicleta. El porcentaje de casas que no tiene ninguno de los tres vehículos es:

a) 34.
b) 66.
c) 24.
d) No hay nadie que no tenga un vehículo en su casa.

14. Una firma comercial regalará tres viajes (uno a New York, otro a Tokio y otro a Oslo), que se realizarán simultáneamente, entre 12 personas seleccionadas. El número de formas en que puede hacerse esta asignación es:

a) 1728.
b) 1320.
c) 220.
d) 364.

15. Con el punto y raya del sistema Morse, usando como máximo cuatro pulsaciones, el número de señales distintas que se pueden enviar es:

a) 30.
b) 10.
c) 48.
d) 16.

16. Ocho amigos van al cine y compran las entradas de forma que estén juntos. Natalia y Paco son novios y se van a sentar en asientos contiguos. El número de formas en que se pueden sentar es:

a) P_8.

b) $P_2 P_6$.

c) $P_2 P_7$.

d) Ninguno de los anteriores.

17. El números de formas de repartir 10 bolas iguales en cuatro cajas numeradas es:

a) $PR_{13}^{10,3}$.

b) CR_{10}^{4}.

c) VR_{4}^{10}.

d) VR_{10}^{4}.

18. Se dispone de tres almacenes distinguibles en los que se han de almacenar las mercancías distintas de cinco camiones diferentes. La mercancía de un mismo camión debe estar siempre junta en un mismo almacén, siendo imposible almacenar toda la mercancía en uno ni en dos de los almacenes. El número de formas posibles de efectuar la distribución es:

a) VR_3^5

b) $S(5,3)$.

c) $3^5 - C_3^1 2^5 + C_3^2$.

d) Ninguno de los anteriores.

19. Se quiere repartir 15 objetos iguales entre 3 cajas numeradas, de modo que en la primera caja debe haber entre cinco y nueve objetos, en la segunda debe haber entre tres y cinco y, en la tercera, menos de cuatro. El número de formas de hacerlo es:

a) $\binom{15}{9,3,3}$.

b) 8

c) El coeficiente a_{15} de la potencia x^{15} de $(x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9)(x^3 + x^4 + x^5)(1 + x + x^2 + x^3)$.

d) Ninguno de los anteriores.

20. Por lo general, los problemas de distribución de k objetos diferentes en n cajas iguales que no pueden quedar vacías, se pueden resolver mediante:

a) Variaciones con repetición de n elementos tomados de k en k.

b) Aplicaciones sobreyectivas de un conjunto con cardinal k en otros de cardinal n.

c) Haciendo $\binom{k-1}{n-1}$.

d) Calculando $S(k,n)$.

21. Se dispone de tres cajas iguales donde poder embalar quince bolas diferentes. El número de formas de efectuar el reparto es:

a) $\sum_{j=1}^{3} S(15, j)$.

b) El coeficiente a_{15} de $g(x) = (x + x^2 + \ldots + x^{12})^3 = 15$.

c) $\binom{14}{2}$.

d) Ninguno de los anteriores.

22. En un centro de congresos se celebraron en un mismo día varios eventos. Han acudido al centro 90 personas a lo largo del día. De ellas: 35 acudieron a una reunión del Ayuntamiento; 30 participaron en la presentación de un libro; 25 participaron en una reunión comercial; 10 asistieron a la reunión del Ayuntamiento y a la presentación del libro; 15 a la reunión del Ayuntamiento y a la reunión comercial; 5 a la presentación del libro y a la reunión comercial y, finalmente, 3 asistieron a los tres actos indicados. ¿Cuántas de las 90 personas no acudieron a ninguno de estos eventos?

a) 27.

b) 24.

c) 0.

d) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

23. El número de términos del desarrollo de la expresión $(x + y + z)^8$ es:

a) CR_3^8.

b) C_{10}^3.

c) $f(8, 4)$.

d) VR_3^8.

24. Una pastelería elabora cuatro tipos distintos de pasteles. El número de bandejas distintas con seis pasteles que se pueden hacer es:

a) VR_4^6.

b) $f(6, 4)$.

c) C_9^3.

d) CR_6^4.

25. El número de formas de separar los diez dígitos en cuatro grupos no vacíos es:

a) CR_{10}^4.

b) $S(10, 4)$.

c) $f(10, 4)$.

d) Ninguno de los anteriores.

26. Se desea crear una representación de ciudadanos de tres comunidades autónomas determinadas, integrada por 9 personas, de modo que ninguna de las comunidades tenga mayoría absoluta en el grupo de nueve y todas tengan representación. El número de formas en que ello puede hacerse es:

a) El número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ tal que $0 \leq x_i < 5$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$.

b) El coeficiente a_9 de x^9 en $g(x) = (1 + x + x^2 + x^3)^3$.

c) El número de soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ tal que $0 < x_i < 5$, para cada $i \in \{1, 2, 3\}$.

d) Las dos últimas son ciertas.

27. Queremos repartir 15 adhesivos iguales en tres carpetas idénticas. El número de formas de hacerlo es:

a) El coeficiente a_{15} de x^{15} de $g(x) = (1 + x^3 + x^6 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + \ldots)(1 + x + x^2 + \ldots)$.

b) El número de soluciones enteras positivas de la ecuación $4a + 3b + 2c + d = 12$.

c) CR_3^{15}.

d) $S(15, 3)$.

28. En una clase se van a repartir 3 regalos iguales entre 10 alumnos, pudiendo un mismo alumno recibir más de un regalo. El número de formas en que se puede hacer es:

a) CR_{10}^3.

b) C_{10}^3.

c) VR_{10}^3.

d) CR_3^{10}.

29. El número de formas diferentes de cambiar 85 dólares en billetes de 1, 5, 10 y 20 es:

a) 180.

b) El coeficiente de x^{85} de $\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^5}\frac{1}{1-x^{10}}\frac{1}{1-x^{20}}$.

c) $\binom{85}{1,25,40,20}$.

d) Ninguna de las anteriores.

30. El número de formas en que se puede distribuir 4 bolas indistinguibles en diez cajas diferentes, teniendo en cuenta que no puede haber más de una bola en una misma caja, es:

a) CR_4^{10}.

b) C_{10}^4.

c) $V_{10}^6 C_{10}^4$.

d) Ninguno de las anteriores.

31. El número de letras de 5 signos con 3 rayas y 2 puntos en el alfabeto Morse es:

a) $PR_5^{3,2}$.

b) $VR_2^5 - VR_2^4 - VR_2^3$.

c) $C_5^3 C_2^1$.

d) $C_5^2 C_3^2$.

32. Al arrojar simultáneamente al aire cuatro monedas (de dos euros, euro, 50 céntimos y 20 céntimos) el número de veces que salgan dos caras y dos cruces es:

a) VR_2^4.

b) CR_2^4.

c) 1.

d) $PR_4^{2,2}$.

33. El número de formas en que se pueden sentar 10 personas en una mesa redonda con sillas iguales es:

a) 10!.

b) $10 \cdot 9!$.

c) 9!

d) $9 \cdot 9!$.

34. Se encuentran ocho amigos y se saludan todos con un apretón de manos. El número total de apretones de manos que se han dado es:

a) 28.

b) 4.

c) 56.

d) Ninguna de las anteriores.

35. Los números, entre 1 y 100, que son divisibles o por 2 o por 3 son:

a) 88.

b) 51.

c) 67.

d) Ninguno de los anteriores.

36. Si tenemos cuatro tipos de bolas diferentes (blancas, rojas, verdes y azules) y extraemos 13, entonces el número de extracciones posibles es:

a) CR_{13}^4.

b) CR_4^{13}.

c) 13^4.

d) 4^{13}.

37. El número de formas diferentes de cambiar 85 dólares en billetes de 1, 5, 10 y 20 es:

a) 180.

b) El coeficiente de x^{85} de $\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^5}\frac{1}{1-x^{10}}\frac{1}{1-x^{20}}$.

c) $\binom{85}{1,25,40,20}$.

d) Ninguna de las anteriores.

38. El número de formas en que se puede llenar un corral con gallinas, conejos y cerdos de modo que en total haya 60 patas es:

a) El coeficiente de x^{60} de $(1 + x + x^2 + \ldots + x^{60})(x^2 + x^4 + \ldots + x^{60})^2$.

b) El coeficiente de x^{60} de $(1 + x^2 + x^4 \ldots + x^{60})(x^4 + x^8 + \ldots + x^{60})^2$.

c) El coeficiente de x^{30} de $(1 + x + x^2 + \ldots + x^{30})(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{30})^2$.

d) Ninguna de las anteriores es cierta.

39. Diez hombres y diez mujeres se disponen a bailar una sardana, el número de formas de colocarse es:

a) 20!

b) $\frac{V_{20}^{19}}{C_{20}^{19}}$.

c) $2P_{10}$.

d) $P_9 P_{10}$.

40. El número de palabras binarias de longitud 9 (una palabra binaria de longitud nueve es, por ejemplo, 111000101) con dos ceros y siete unos es:

a) $2P_7$.

b) $\binom{9}{2}$.

c) $P_7 P_2$.

d) Ninguno de los anteriores.

41. El número de divisores positivos de 277200 es:

a) 16.

b) 180.

c) 60.

d) Ninguna de las anteriores.

42. El número de formas en que se pueden elegir 5 helados entre 15 sabores distintos es:

a) 11628.

b) 759375.

c) 3003.

d) Ninguna de las anteriores.

43. El número de formas de distribuir un cuchillo de carne, un tenedor de carne, una cuchara, una pala de pescado y un tenedor de pescado en tres apartados diferentes de un cajón, de modo que en el primer y segundo apartado vayan dos de las piezas y una en el tercer apartado es:

a) $\binom{5}{2,2,1}$.

b) $C_5^2 C_3^2 3!$.

c) $V_5^3 - C_5^3$.

d) Ninguna de las anteriores.

44. Una empresa inicia una campaña promocional por la que va a donar a cuatro localidades distintas un total de diez coches eléctricos idénticos, de modo que en cada localidad pueda hacer publicidad de su tecnología. El número de formas de hacerlo es:

a) $f(10,4)$.
b) $\binom{9}{3}$.
c) VR_4^{10}.
d) Ninguno de los anteriores.

45. Se distribuyen cinco objetos distintos en tres cajas numeradas, de modo que ninguna caja queda vacía. El número de formas posibles es:

a) VR_3^5.
b) $S(5,3)$.
c) $3^5 - C_3^1 2^5 + C_3^2$.
d) Ninguno de los anteriores.

46. Nueve niños de Primaria quieren reunir 9 euros para un regalo, dando cada uno una o varias monedas de un euro. Manuel dará 1 o 2, los demás, darán como mucho 1 euro. El número de formas en que podrán reunir la cantidad deseada es:

a) El número de soluciones enteras no negativas de $x_1 + x_2 + \ldots + x_9 = 9$.
b) El coeficiente a_9 de x^9 en $g(x) = (x + x^2)(1 + x)^8$.
c) 12.
d) Ninguno de los anteriores.

47. Queremos repartir 12 bolas iguales en cuatro cajas no distinguibles. El número de formas de hacerlo es:

a) $S(12,4)$.
b) El número de soluciones enteras positivas de la ecuación $4a + 3b + 2c + d = 12$.
c) CR_4^{12}.
d) El número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$, con la condición de que $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$.

48. Se dispone de tres cajas iguales para poder embalar 15 portátiles diferentes. El número de formas de efectuar el reparto es:

a) El número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x + y + z = 15$.
b) $\sum_{j=1}^{3} S(15,j)$.
c) El coeficiente a_{15} de $g(x) = (x + x^2 + x^3)^3$.
d) Ninguno de los anteriores.

49. Se va a hacer una ensalada con 7 frutas diferentes, con la condición de que: el número de naranjas ha de ser par, el número de aguacates debe ser múltiplo de cinco, no puede haber más de cuatro peras y a lo sumo puede llevar una manzana. El número de formas de hacerla es:

a) 8.

b) 7.

c) C_7^4.

d) Ninguna de las anteriores.

50. El número de formas en que se pueden repartir 6 bolas diferentes en 3 cajas numeradas si ninguna caja puede quedar vacía es:

a) $\binom{5}{2}$.

b) $f(6,3)$.

c) $S(6,3)$.

d) B_6.

51. El número de formas de separar los diez dígitos en tres grupos no vacíos es:

a) CR_{10}^3.

b) CR_3^{10}.

c) $\frac{1}{3!}[3^{10} - C_3^1 2^{10} + C_3^2]$.

d) Ninguno de los anteriores.

52. El número de formas de factorizar el número 1260 en tres factores enteros positivos mayores que 1 es:

a) $S(4,3)$.

b) CR_4^3.

c) CR_3^{36}.

d) CR_{36}^3.

53. El número de formas en que se pueden colocar seis pegatinas iguales en seis motos idénticas es:

a) 9.

b) $2p(6)$.

c) El número de particiones de 12 en seis sumandos.

d) 1.

54. Se toma una permutación de $\{1, \ldots, 4\}$ al azar. La probabilidad de que sea un desarreglo es:

a) $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}$.

b) $\frac{1}{2}$.

c) $\frac{3}{8}$.

d) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

55. Dada la siguiente partición de 13, $13 = 4 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1$, su partición conjugada es:

a) $13 = 6 + 4 + 2 + 1$.

b) $13 = 5 + 4 + 2 + 2$.

c) $13 = 6 + 5 + 2$.

d) $13 = 6 + 5 + 1 + 1$.

56. El número de formas en que se pueden colocar cinco pegatinas iguales en tres motos idénticas cajas iguales sin que quede ninguna moto sin pegatina es:

a) 7.

b) $p_3(5)$.

c) Las dos respuestas anteriores son ciertas.

d) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

57. En una oficina de Correos se almacenan 1000 paquetes en 30 estanterías. Entonces puede asegurarse que:

a) Al menos una estantería tendrá 35 paquetes.

b) Una estantería tendrá al menos 34 paquetes.

c) Una estantería tendrá 43 paquetes.

d) No es posible la distribución indicada.

58. Se quieren colocar cuatro objetos iguales de decoración para lo que hay tres huecos diferentes, pero en el primer hueco solo cabe un objeto y se pondrá siempre un objeto en él. El número de formas de efectuar la distribución es:

a) El coeficiente a_4 de x^4 en $x(1 + x + x^2 + x^3)^2$.

b) 12.

c) El coeficiente a_4 de la potencia x^4 de $(1 + x + x^2 + x^3)^3$.

d) Ninguno de los anteriores.

59. Por lo general, los problemas de distribución de k objetos iguales en n cajas diferentes que no pueden quedar vacías, se pueden resolver mediante:

a) Variaciones con repetición de n elementos tomados de k en k.

b) Aplicaciones sobreyectivas de un conjunto con cardinal k en otros de cardinal n.

c) Haciendo $\binom{k-1}{n-1}$.

d) Calculando $S(k, n)$.

60. Un alumno tiene que elegir 7 de las diez preguntas de un examen, donde 4 son obligatorias. El número de elecciones posibles es:

a) V_6^3.

b) C_6^3.

c) C_{10}^7.

d) Ninguna de las anteriores.

61. Se consideran las permutaciones de $1, 2, 3, 4$. El número de permutaciones que son incompatibles con la permutación $3, 1, 4, 2$ tal que el conjunto de elementos en los dos primeros lugares sea $2, 4$ en algún orden es:

a) 9.

b) 2.

c) 4.

d) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

62. Esta segunda pregunta está integrada por cinco cuestiones, cada una de ellas consta de cuatro posibles soluciones. Si las respondieras al azar, ¿de cuántas formas podrías hacerlo?

a) 5^4.

b) CR_4^5 .

c) VR_4^5.

d) 20.

63. En un juego de tablero cada jugador ha de lanzar, por turno, dos dados iguales simultáneamente. El número de resultados distintos que puede obtener cada jugador es:

a) 7.

b) CR_6^2.

c) $\frac{V_{12}^2}{P_6}$.

d) VR_2^6.

64. El coeficiente de y^7 en el desarrollo de la potencia $(x - 2y)^8$ es:

a) 1024.

b) $\binom{8}{7}2^7x$.

c) $\binom{8}{1}2^7$.

d) Ninguna de las anteriores.

65. Con tres símbolos distintos ($\heartsuit$, $\clubsuit$, $\spadesuit$) se forman códigos de longitud 8 (el código tiene en total 8 símbolos). El número de códigos con tres $\heartsuit$ y cinco $\spadesuit$ es:

a) 3^8.

b) CR_2^8.

c) $\binom{8}{3}$.

d) P_6P_2.

66. En la planificación de una actividad de dinámica de grupo, con 20 personas, está previsto que los asistentes puedan dividirse en cuatro subgrupos. El número de posibilidades distintas es:

a) $f(20,4)$.
b) $\sum_{j=1}^{4} S(20,j)$.
c) $\frac{1}{3!}\left[3^{21} - C_3^1 2^{21} + C_3^2\right]$.
d) Ninguna de las anteriores.

67. Se toma una permutación de $\{1,\ldots,6\}$ al azar. La probabilidad de que sea un desarreglo es:

a) $\frac{1}{2}$.
b) $\frac{1}{3}$.
c) $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{1}{6!}$.
d) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

68. El número de formas en que se pueden colocar cinco bolas iguales en cinco cajas idénticas es:

a) El número de particiones de 10 en cinco sumandos.
b) 1.
c) 9.
d) $2p(5)$.

69. Se dispone de un conjunto de diez números enteros distintos, entonces:

a) Al menos un número es múltiplo de diez.
b) Ninguno de los números puede ser múltiplo de 9.
c) Al menos dos tienen como diferencia un múltiplo de 9.
d) Ninguna de las anteriores es cierta.

70. Dada la siguiente partición de 13, $13 = 3+3+2+2+2+1$, su partición conjugada es:

a) $13 = 6+4+2+1$.
b) $13 = 5+4+2+2$.
c) $13 = 6+5+2$.
d) $13 = 6+4+1+1+1$.

71. El número de formas en que se pueden colocar seis bolas iguales en cuatro cajas iguales sin que quede ninguna caja vacía es:

a) $p_4(6)$.
b) $p(6)$.
c) Las dos respuestas anteriores son ciertas.
d) Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

6.2. Problemas

1. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) Un byte es una *palabra* binaria de longitud 8. ¿Cuántos bytes diferentes hay?, ¿cuántos de ellos contienen por lo menos dos unos?

b) Calcular el número de *palabras* de longitud máxima r que se pueda formar con un alfabeto que tenga n *letras* (elementos).

2. Con las letras A, B, C, D, E, F, G, H se van a formar códigos ordenados de cinco letras, repetidas o no. Se pide hallar:

a) El número total de códigos posibles.

b) El número de códigos con una sola letra repetida dos veces.

c) El número de códigos con dos letras repetidas dos veces cada una.

d) El número de códigos con una sola letra repetida tres veces.

e) El número de códigos con una letra repetida tres veces y otra dos.

f) El número de códigos con una sola letra repetida cuatro veces.

g) El número de códigos con una letra repetida cinco veces.

h) El número de códigos en los que no se repiten letras.

i) El número de códigos formados por cinco letras consecutivas (en orden alfabético)

j) El código que corresponde al número 1729 (que ocuparía el lugar 1729) si se ordenan los códigos de acuerdo al orden lexicográfico (empezando a contar en 0).

Nota: Con el orden lexicográfico (el usado en los diccionarios), dadas dos secuencias de caracteres, por ejemplo $a = a_1a_2 \ldots an$ y $b = b_1b_2 \ldots b_k$, decimos que $a < b$ si ambas, teniendo un prefijo común, de largo i, el primer carácter diferente es $a_{i+1} < b_{i+1}$. Por ejemplo, **cre**as $<$ **cre**ce pues ambas tienen un prefijo común de largo 3 y $a < c$.

3. Un estudiante enuncia el siguiente teorema:

Se dispone de $n > 1$ tipos de objetos diferentes, en cantidad suficiente para cada uno de ellos, entonces el número de selecciones no ordenadas posibles de estos n tipos formada por $r > 0$ elementos es $\binom{n+r-1}{n-1}$.

Del que da la siguiente demostración:

Demostración.

En efecto, supongamos que los tipos de objetos son $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Para una selección dada de ellos formada por r objetos, con $r < n$, como $s_{j_1}, s_{j_2}, \ldots, s_{jr}$, le asignamos una cadena de r unos y $n-1$ barras, donde por cada elemento que aparezca pondremos una / y pondremos un 1 para indicar el cambio de un tipo de elemento a otro. De este modo a cada selección le corresponde biunívocamente $n-1+r$ símbolos.

Como el número de selecciones buscadas es igual al de cadenas de $n-1$ barras y r unos, entonces el número de selecciones no ordenadas será $\binom{n+r-1}{n-1}$.

$\square$

a) Di si la demostración es correcta o no. En caso de que la consideres incorrecta, señala donde están los errores y qué debería corregirse para que ya fuese correcto el razonamiento efectuado.

b) Si existen pasos que no están justificados completamente, debes efectuar la justificación completa, detallada paso a paso, de los mismos.

4. ¿De cuántas formas podemos descomponer el número 7 en suma de enteros positivos teniendo en cuenta el orden de los sumandos (es decir, $6+1$ y $1+6$ se consideran formas distintas)?

5. Cierto alfabeto se compone de 6 letras que, con el fin de transmitirlas, se codificaron de la siguiente manera:

$$\bullet, \quad -, \quad \bullet\bullet, \quad --, \quad \bullet-, \quad -\bullet$$

Al transmitir una palabra no se hicieron los intervalos que separan una letra de otra, de modo que resultó una cadena continua de ocho signos. ¿de cuántos modos se puede leer la palabra transmitida?

6. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuántos números de seis cifras podemos formar con los dígitos del 1 al 8?

b) ¿Cuántos de ellos tienen un solo dígito repetido dos veces?

c) ¿Cuántos de ellos dos dígitos repetidos dos veces?

d) ¿Cuántos de ellos un dígito repetido tres veces?

e) ¿Cuántos de ellos un dígito repetido tres veces y otro repetido dos veces?

7. Sea $X = \{1, 2, \ldots, 7\}$. Determinar:

a) ¿Cuántos enteros con tres dígitos pertenecen a X (no necesariamente diferentes) se pueden formar?

b) ¿Cuántos enteros con tres dígitos, pertenecientes a X, en orden estrictamente creciente se pueden formar?

c) ¿Cuántos enteros con cuatro dígitos, pertenecientes a X, en orden creciente (no estrictamente) se pueden formar?

d) ¿Cuántos enteros impares, con dígitos pertenecientes a X, se pueden formar entre 200 y 600.

8. ¿De cuántas maneras pueden colocarse doce fotos en cinco álbumes, en cada uno de los siguientes casos?:

a) Las fotos son iguales y los álbumes son iguales.

b) Las fotos son diferentes y los álbumes son iguales.

c) Las fotos son diferentes y los álbumes diferentes, debiendo cada álbum tener fotos colocadas.

d) Las fotos son iguales y los álbumes son diferentes.

¿Y si hay cinco fotos diferentes y doce álbumes diferentes, de modo que en cada álbum no debemos poner más de una foto?

9. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuántas palabras de longitud máxima 8 se pueden formar a partir de un alfabeto de diez elementos, si en una misma palabra no puede haber elementos repetidos?

b) Calcular el número de palabras de longitud máxima r que se puede formar con un alfabeto que tenga n letras si en una misma palabra no puede haber elementos repetidos.

10. Cuántas permutaciones de los enteros del 1 al 9 inclusives tiene exactamente tres de sus números en posiciones naturales y a las otros seis no?

11. Determinar razonadamente cuántas ordenaciones pueden hacerse de la palabra $NASHVILLETENNESSEE$ de modo que la primera N preceda a la primera S y que la primera E preceda a la T.

12. Hallar un número de cinco cifras diferentes que sea igual a la suma de todos los de tres cifras que se pueden obtener formando todas las variaciones ordinarias de dichas cinco cifras tomadas de tres en tres.

13. Calcular la suma de todos los números de cinco cifras, sin que se repita ninguna, que se pueden formar con los dígitos $0, 1, 2, 3, 4$.

14. Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) ¿De cuántas formas podemos descomponer el número 8 en suma de enteros positivos si tenemos en cuenta el orden de los sumandos?

b) Disponemos en una caja de bolas de cuatro colores distintos (blancas, rojas, amarillas y azules). ¿De cuántas formas podemos extraer 13 bolas?, ¿cuántas si al menos debe haber una bola de cada color entre las trece?

c) Demuestra que existen tantas particiones (contando como diferentes las que se obtienen cambiando el orden de los sumandos) de un entero positivo n como subconjuntos tiene el conjunto $\{1, 2, \ldots, n-1\}$.

15. Se arrojan simultáneamente 6 dados idénticos, ¿en cuántos aparece al menos un 3?, ¿en cuántos un solo 4?, ¿en cuántos ningún 5?

16. Dadas tres cifras a, b, c. Demostrar que:

a) La suma de los números obtenidos formando variaciones binarias es múltiplo de 22.

b) La suma de los números obtenidos formando variaciones ternarias con repetición es múltiplo de 37.

17. Dados n puntos del espacio, de forma que no hay 3 en línea ni 4 en un mismo plano, se consideran las rectas que resultan de unirlos de dos en dos y los planos que se obtienen al considerar cada 3. Se pide:

a) Número de rectas que se pueden trazar con los n puntos.

b) Número de planos determinados por los n puntos.

c) Hallar el número n para que el número de planos sea igual al de rectas.

d) Se ordenan los n puntos, se unen primero con segundo, segundo con tercero, tercero con cuarto, etc., el último con el primero, resultando una figura ”polígono“ cuyos lados son los segmentos anteriores. Los demás segmentos que los unen serán las diagonales. Hallar el número de éstas.

e) Hallar n para que el número de diagonales sea el doble de lados.

18. Calcula el total de ordenaciones de la palabra VALDEMADERA de modo que no haya un para de letras idénticas consecutivas.

19. Sea $(a+b)^{14}$. Designaremos un término cualquiera del desarrollo por t_n. Si los coeficientes de los términos t_n, t_{n+1}, t_{n+2}, que ocupan los lugares n, $n+1$, $n+2$, están en progresión aritmética. Calcular n sabiendo que es menor que 7.

20. Calcula el total de ordenaciones de la palabra ALMOHADADO de modo que no haya un par de letras idénticas consecutivas.

21. Resuelve razonadamente las siguientes cuestiones:

a) ¿De cuántas maneras se pueden colocar 12 bolas en cinco cajas distintas en los siguientes casos?:

1) Todas las bolas son rojas.

2) Cada bola es de un color distinto.

b) ¿Cuántos números de una secuencia de 9 dígitos tienen al menos una vez cada uno de los dígitos 1, 3 y 7?

22. ¿Cuántos números naturales menores que un millón tienen la suma de sus cifras igual a 12?

23. ¿Cuántos números hay, del 1 al 1000, que tengan la propiedad de que la suma de sus dígitos sea 5?

24. Calcula el total de ordenaciones de la palabra BUENAVENTURA de modo que haya dos pares de letras idénticas consecutivas y otros dos pares de letras idénticas no consecutivas.

25. En un sorteo, 21 premios se separarán en en tres categorías. En todas las categorías debe haber al menos un premio. Calcular razonada y detalladamente cuántas posibilidades distintas hay.

26. Demostrar que

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

27. ¿Cuántos números de seis cifras podemos formar con los dígitos del 1 al 8?, ¿cuántos de ellos tienen un solo dígito repetido dos veces?, ¿cuántos dos dígitos repetidos dos veces?, ¿cuántos un dígito repetido tres veces?, ¿cuántos un dígito repetido tres veces y otro repetido dos veces?

28. ¿De cuántas maneras pueden distribuirse diez pelotas de golf en cuatro cajas, en cada uno de los siguientes casos?:

- **a)** Las pelotas son diferentes y las cajas son iguales.
- **b)** las pelotas son iguales, las cajas están numeradas.
- **c)** Las pelotas son iguales, las cajas son iguales.
- **d)** Las pelotas son diferentes y las cajas numeradas, no pudiendo quedar ninguna vacía.

¿Y si hay cuatro pelotas diferentes y son diez las cajas numeradas, de modo que en ninguna caja cabe más de una pelota?

29. Dados diez enteros positivos cualesquiera menores que 107, probar que existen dos subconjuntos disjuntos de ellos con la misma suma.

30. Dadas n rectas en el plano, donde no existen dos que sean paralelas ni tres que sean concurrentes (no hay tres rectas que se corten en un mismo punto), ¿en cuántas regiones resulta separado el plano por estas n rectas?

31. Consideramos $n + k$ rectas en el plano que verifican que: i) k de las rectas son paralelas unas a otras, ii) no hay otros casos especiales de rectas paralelas, iii) no hay tres de las $n + k$ que sean concurrentes. ¿En cuántas regiones queda separado el plano por las $n + k$ rectas?

32. Dados diez enteros positivos cualesquiera menores que 107, probar que existen dos subconjuntos disjuntos de ellos con la misma suma.