Capítulo 5

Introducción a la teoría de grafos

5.1. Terminología básica y tipos de grafos

Una primera aproximación a la teoría de grafos la tenemos cuando observamos un mapa de carreteras: ciudades (vértices) unidas por tramos de carretera (aristas). Tenemos dos conjuntos distintos de objetos, ciudades y tramos de carretera. Los tramos de carretera establecen una relación en el conjunto de ciudades: estar unidas mediante esa red de carreteras. Nos podemos preguntar, por ejemplo, si dadas dos ciudades concretas podemos ir de una a otra, la forma más corta de ir, o si podemos recorrerlas todas pasando por todos los tramos de carretera una sola vez. A estas y otras preguntas intenta dar respuesta la teoría de grafos. También se pueden utilizar grafos para determinar si dos ordenadores están conectados o para representar la Red de Internet.

5.1.1. Terminología básica

Definición 5.1. *Un* **grafo** *es una terna* $G = (V, E, p)$ *formada por dos conjuntos y una aplicación:*

$$p: E \to P_2(V)$$

que hace corresponder a cada elemento del conjunto E un subconjunto de uno o dos elementos del conjunto V. El conjunto V es no vacío, a sus elementos se les llama **vértices** *o* **nodos**. *A los elementos de E se les llama* **aristas** *o* **arcos**.

La aplicación p se denomina aplicación de **incidencia del grafo**. *Si* $p(a) = \{u, v\}$, *se dice que los vértices u y v son los* **extremos** *del arco a. En esta situación el arco a se dice* **incidente** *con los vértices u y v, y los vértices u y v se dicen* **adyacentes**.

Otros conceptos de interés:

- *Si dos aristas a, b son incidentes con los mismos vértices se dicen* **paralelas**, *en este caso se dice que el grafo tiene* **aristas múltiples**.
- *Si* $p(a) = \{u\}$ *el arco se denomina* **bucle.**

- *Un grafo se dice* **simple** *si y sólo si no posee bucles y la aplicación de incidencia es inyectiva.*

Definición 5.2. *Un* **grafo dirigido** *es una terna G = (V, E, p) formada por dos conjuntos y una aplicación*

$$p: E \rightarrow VxV$$

que hace corresponder a cada elemento del conjunto E con un par ordenado de elementos de V. Si p(a) = (u, v) se dice que u es el **extremo inicial** *y v es el* **extremo final**.

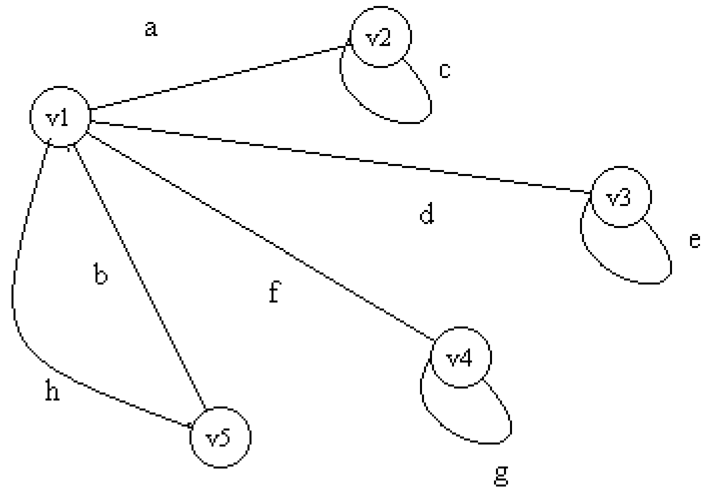
Un grafo se dice **etiquetado** *si y sólo si a cada una de sus aristas se le asocia un número real. A dicho número se le llama* **peso** *o* **etiqueta**.

Aquí se trabajarán grafos finitos, grafos en los que los conjuntos de vértices y aristas son finitos.

En los grafos simples, al ser la arista asociada a un par de vértices única, se puede identificar la arista con el par de vértices en los que incide.

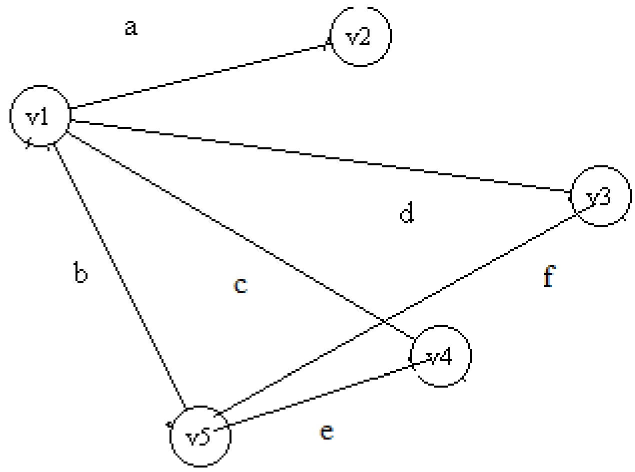
Ejemplo 5.3. *Ejemplo de grafo no simple.*

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$,
$p(a) = \{v_1,v_2\}$, $p(b) = \{v_1,v_5\}$, $p(c) = \{v_2\}$, $p(d) = \{v_1,v_3\}$, $p(e) = \{v_3\}$, $p(f) = \{v_1,v_4\}$, $p(g) = \{v_4\}$, $p(h) = \{v_1,v_5\}$



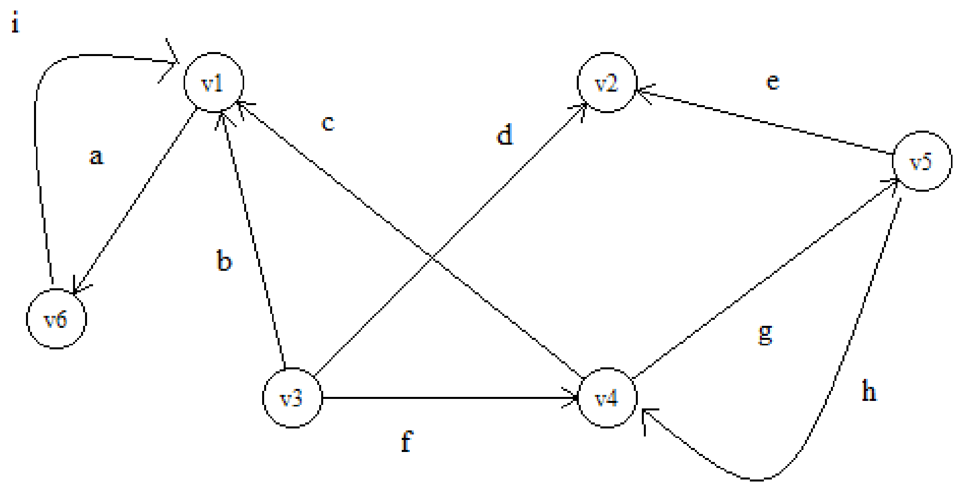
Ejemplo 5.4. *Ejemplo de grafo simple.*

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{a, b, c, d, e, f\}$,
$p(a) = \{v_1,v_2\}$, $p(b) = \{v_1,v_5\}$, $p(c) = \{v_1,v_4\}$, $p(d) = \{v_1,v_3\}$, $p(e) = \{v_4,v_5\}$, $p(f) = \{v_5,v_3\}$



Ejemplo 5.5. *Ejemplo de grafo dirigido.*

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$,
$p(a) = (v_1,v_6)$, $p(b) = (v_3,v_1)$, $p(c) = (v_4,v_1\}$, $p(d) = (v_3,v_2)$, $p(e) = (v_5,v_2)$, $p(f) = (v_3,v_4)$,
$p(g) = (v_4,v_5)$, $p(h) = (v_5,v_4)$, $p(i) = (v_6,v_1)$



Definición 5.6. *En un grafo no dirigido se define* **grado** *de un vértice como el número de aristas que inciden con él, contando los bucles dos veces. El grado del vértice v se denota por* $\delta(v)$.

En un grafo dirigido, el **grado de entrada** *de un vértice v es el número de aristas que lo tienen como vértice final, y se denota por* $\delta^{-}(v)$. *El* **grado de salida** *es el número de aristas que lo tiene como vértice inicial, y se denota por* $\delta^{+}(v)$.

Ejemplo 5.7. *Grados del ejemplo 5.3.*

$\delta(v_1) = 5$, $\delta(v_2) = 3$, $\delta(v_3) = 3$, $\delta(v_4) = 3$, $\delta(v_5) = 2$,

Obsérvese que: $\sum_{i=1}^{4} \delta(v_i) = 16 = 2.8 = 2.|E|$

Hay un nº par de vértices, 4, con grado impar.

Ejemplo 5.8. *Grados del ejemplo 5.5.*

$\delta^{-}(v_1) = 3$, $\delta^{+}(v_1) = 1$, $\delta^{-}(v_2) = 2$, $\delta^{+}(v_2) = 0$, $\delta^{-}(v_3) = 0$, $\delta^{+}(v_3) = 3$, $\delta^{-}(v_4) = 2$, $\delta^{+}(v_4) = 2$, $\delta^{-}(v_5) = 1$, $\delta^{+}(v_5) = 2$, $\delta^{-}(v_6) = 1$, $\delta^{+}(v_6) = 1$

Obsérvese que: $\sum_{i=1}^{4} \delta^{-}(v) = \sum_{i=1}^{4} \delta^{+}(v) = 9 = |E|$

Teorema 5.9. *Sea G* = (*V, E, p*) *un grafo no dirigido. Se verifica:*

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$$

Demostración.

Basta observar que cada arista *a* aporta dos unidades a la suma de los grados, una a cada uno de los dos vértices a los que es incidente.

■

Teorema 5.10. *Todo grafo no dirigido tiene un número par de vértices de grado impar.*

Demostración.

Dado $G = (V, E, p)$ un grafo no dirigido. Sean V_1 y V_2 los conjuntos de vértices de grado par y de grado impar, respectivamente. Constituyen una partición del conjunto V, esto es, $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

Aplicando el resultado del teorema 5.9 se obtiene:

$$2|E| = \sum_{v \in V} \delta(v) = \sum_{v \in V_1} \delta(v) + \sum_{v \in V_2} \delta(v)$$

Si $v \in V_1$, $\delta(v)$ es un número par. Por tanto, $\sum_{v \in V_1} \delta(v)$ es par.

Por otra parte, $\sum_{v \in V_2} \delta(v) = 2|E| - \sum_{v \in V_1} \delta(v)$ es también par, al ser resta de dos números pares.

Por tanto, $\sum_{v \in V_2} \delta(v)$ es un número par suma de números impares. En consecuencia, tiene que haber un número par de sumando. El número de sumandos es el número de vértices del conjunto V_2. Así, se tiene, que hay un número par de vértices en V_2.

■

Teorema 5.11. *Sea G = (V, E, p) un grafo dirigido. Se verifica:*

$$\sum_{v \in V} \delta^-(v) = \sum_{v \in V} \delta^+(v) = |E|$$

Demostración.

Basta observar que cada arista *a* tiene un vértices inicial y un vértice final. Por tanto aporta una unidad a suma de los grados de entrada y una unidad a la suma de los grados de salida.

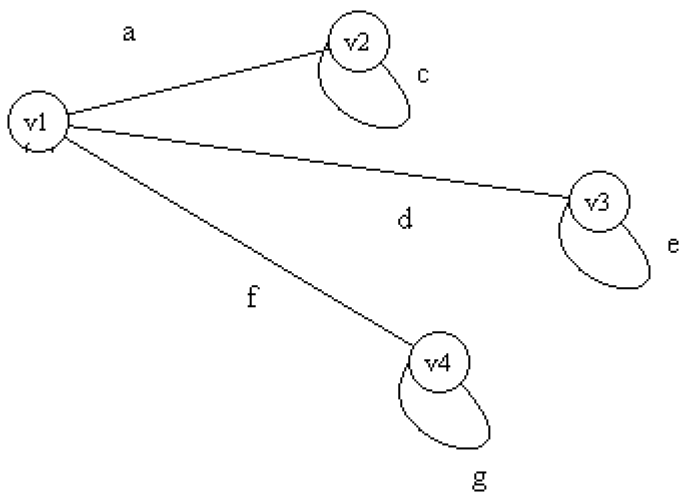
■

Definición 5.12. *Dado un grafo G = (V′, E′, p′), se dice* **subgrafo** *de un grafo G = (V, E, p) si y sólo si se verifican las condiciones:*

a) $V' \subset V$
b) $E' \subset E$
c) $P' = p|E$

Un subgrafo de un grafo dado es una parte del grafo que es grafo por sí mismo.

Ejemplo 5.13. *Un subgrafo del grafo del ejemplo 5.2*

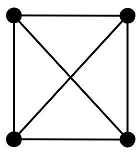


5.1.2. Tipos de grafos

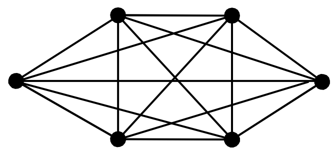
En este apartado se van a introducir algunas familias de grafos simples no dirigidos:

Definición 5.14. Grafo completo *de n vértices es el grafo simple de n vértices que contiene exactamente una arista entre cada par de vértices distintos. Se denota por* K_n.

Ejemplo 5.15.



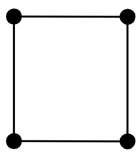
K_4



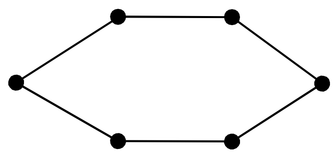
K_6

Definición 5.16. *Ciclo de n vértices* ($n \geq 3$) *es el grafo que consta de n vértices* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *y las n aristas* $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$,..., $\{v_{n-1}, v_n\}$, $\{v_n, v_1\}$, *se denota por* C_n.

Ejemplo 5.17.



C_4



C_6

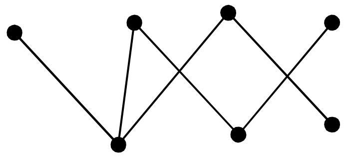
Definición 5.18. *Los grafos que tienen el mismo grado en todos los vértices se dicen grafos* **regulares**.

Ejemplo 5.19. *Los grafos* C_n *y* K_n *son ejemplos de grafos regulares.*

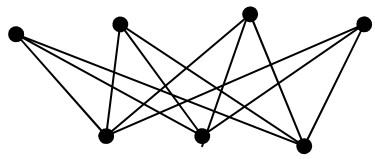
Definición 5.20. *Un grafo simple es* **bipartido** *si su conjunto de vértices se puede dividir en dos conjuntos disjuntos,* $V = V_1 \cup V_2$, *tales que cada arista del grafo conecta un vértice de* V_1 *con un vértice de* V_2, *de manera que no haya ninguna arista que conecte entres sí dos vértices de* V_1 *ni dos vértices de* V_2. *En el caso en que todos los vértices de* V_1 *estén conectados con todos los vértices de* V_2 *se dice* **completo**.

Si los dos subconjunto de vértices tiene *m* y *n* vértices, el grafo bipartido completo se denota por $K_{n,m}$

Ejemplo 5.21.



Grafo bipartido



$K_{4,3}$

5.2. Representación de grafos e isomorfismo de grafos

En los apartados anteriores se ha utilizado una representación gráfica de los grafos, representando los vértices como puntos y las aristas como líneas que unen los puntos. En este apartado introduciremos otras formas de representar los grafos, lo que permitirá dar un tratamiento sistemático a su estudio.

5.2.1. Lista de adyacencia

Definición 5.22. *Las* **listas de adyacencia** *es una forma de representar grafos sin aristas múltiples, en ellas que especifican los vértices adyacentes a cada vértice del grafo.*

Ejemplo 5.23. *Listas de adyacencia de los grafos de los ejemplos 5.4. y 5.5.*

Ejemplo 5.4

Lista adyacencia grafo simple	
Vértices	Vértices adyacentes
v_1	v_2, v_3, v_4, v_5
v_2	v_1
v_3	v_5
v_4	v_5
v_5	v_1, v_3, v_4

Ejemplo 5.5

Lista de adyacencia para grafo dirigido	
Vértice inicial	Vértices finales
v_1	v_6
v_2	
v_3	v_1, v_2, v_4
v_4	v_1, v_5
v_5	v_2, v_4
v_6	v_1

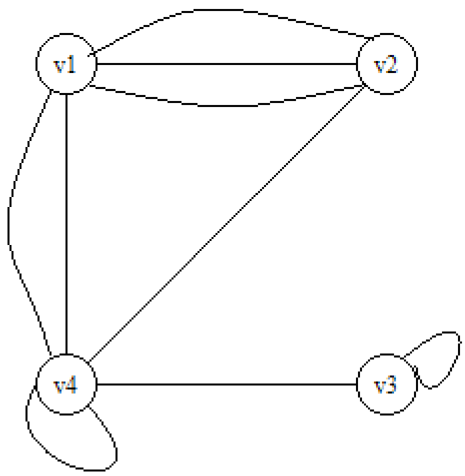
5.2.2. Matrices de adyacencia

Se basan en la adyacencia de vértices y van asociadas a una ordenación cualquiera en el conjunto de vértices.

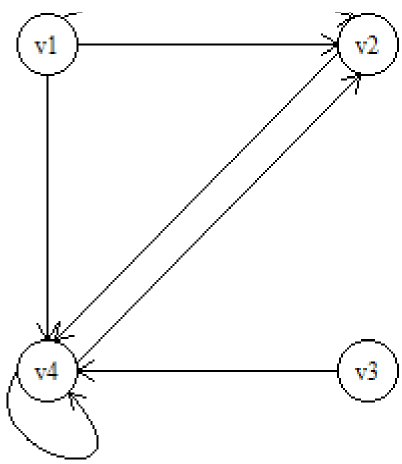
Definición 5.24. *Sea $G = (V, E, p)$ un grafo con n vértices*, y $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ *una ordenación del conjunto de vértices. La* **matriz de adyacencia** *respecto a ese orden de* *los vértices es una matriz nxn A=(a_{ij}), donde a_{ij} es igual al nº de aristas adyacentes a los vértices {v_i, v_j}.*

En el caso de grafo dirigidos a_{ij} es igual al nº de aristas asociadas al par ordenado de vértices (v_i, v_j).

Ejemplo 5.25. *Encontrar las matrices de adyacencia, para la ordenación de vértices que se indica, de los siguientes grafos:*



$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Observación 5.26. Hay tantas matrices de adyacencia asociadas a un grafo como formas de ordenar sus vértices. Si tiene *n* vértices hay *n!* matrices de adyacencia.

5.2.3. Matrices de incidencia

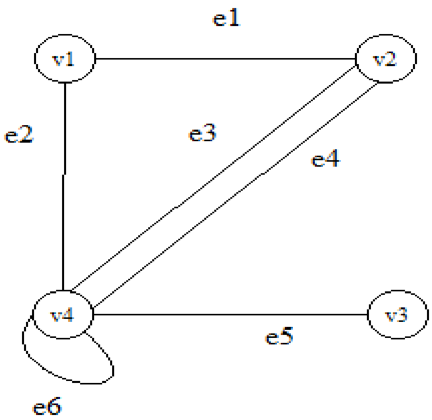
Se basan en la incidencia de arcos en vértices y van asociadas a ordenaciones cualesquiera de los conjuntos de vértices y aristas.

Definición 5.27. *Sea* $G = (V, E, p)$ *un grafo con n vértices*, sean $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *y* $E = \{e_1, e_2, \ldots e_m\}$ *ordenaciones los conjuntos de vértices y aristas, respectivamente. La* **matriz de incidencia** *es una matriz nxm* $B=(b_{ij})$, *donde*

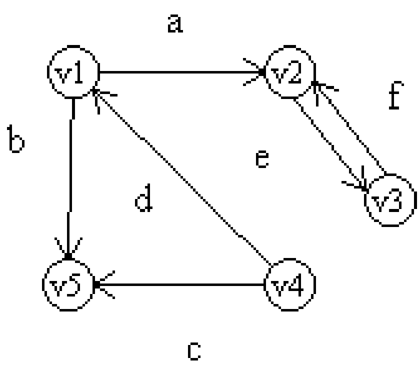
$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ e_j\ incide\ en\ el\ vértice\ v_i\ y\ no\ es\ un\ bucle \\ 2 & si\ el\ arco\ e_j\ es\ un\ bucle \\ 0 & si\ el\ vértice\ v_i no\ es\ extremo\ de\ e_j \end{cases}$$

En el caso de grafo dirigidos

$$b_{ij} = \begin{cases} -1 & si\ el\ vértice\ v_i\ es\ extremo\ final\ \ de\ e_j \\ 1 & si\ el\ vértice\ v_i\ es\ extremo\ inicial\ de\ e_j \\ 0 & si\ el\ vértice\ v_i\ no\ es\ extremo\ de\ e_j \end{cases}$$



$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$



$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

5.2.4. Isomorfismo de grafos

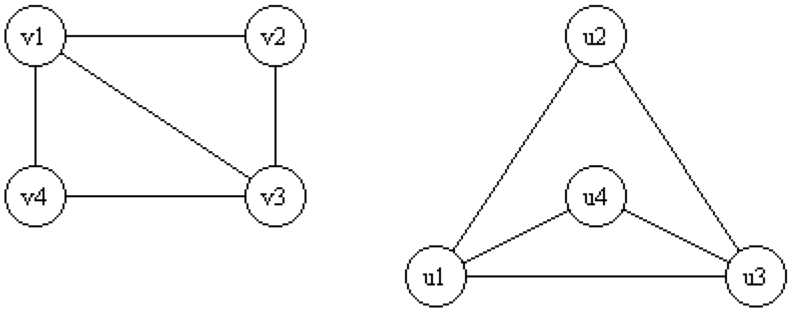
Definición 5.28. *Dos grafos simples* $G_1 = (V_1, E_1, p_1)$ *y* $G_2 = (V_2, E_2, p_2)$ *se dicen* **isomorfos** *si, y sólo si, hay una aplicación biyectiva* $f: V_1 \to V_2$ *que verifica que para cada par de vértices* $u, v \in V_1$, *u y v son adyacentes en* G_1 *si y sólo si* $f(u)$ *y* $f(v)$ *son adyacentes en* G_2. *El vértice* $f(u) \in V_2$ *se dice* **vértice homólogo** *de* $u \in V_1$. *Asimismo, la arista* $\{f(u)\ y\ f(v)\} \in G_2$ *se dice* **arista homóloga** *de* $\{u, v\} \in G_1$.

Cuando dos grafos simples son isomorfos hay una función biyectiva que preserva la relación de adyacencia.

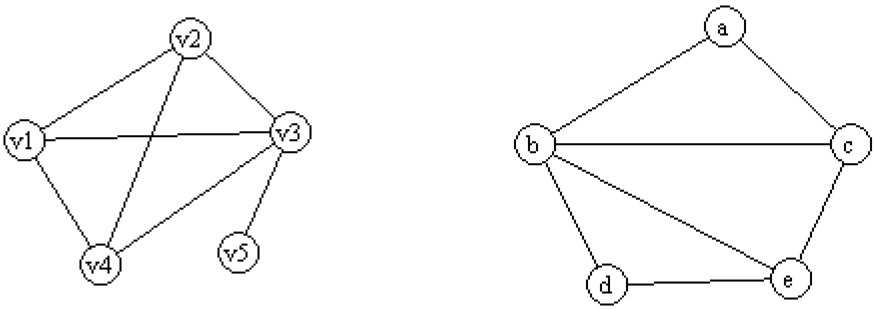
Con frecuencia es difícil determinar si dos grafos simples son isomorfos o no. Para un grafo con n vértices hay $n!$ posibles biyecciones.

Los grafos isomorfos tienen algunas propiedades comunes. A éstas se les llama invariantes bajo isomorfismo: Por ejemplo, son invariantes bajo isomorfismo el número de vértices, el número de aristas; los grados de los vértices. Por tanto, se puede demostrar que dos grafos no son isomorfos demostrando que no comparten alguna propiedad invariante por isomorfismos.

Ejemplo 5.29. *Los dos grafos de la figura son isomorfos*



Ejemplo 5.30. *Los dos grafos de la figura no son isomorfos*.



Basta observar que el vértice v_5 del primer grafo tiene $\delta(v_5) = 1$ y en el segundo grafo no hay vértices que tengan grado 1.

5.3. Caminos y ciclos: Conexión

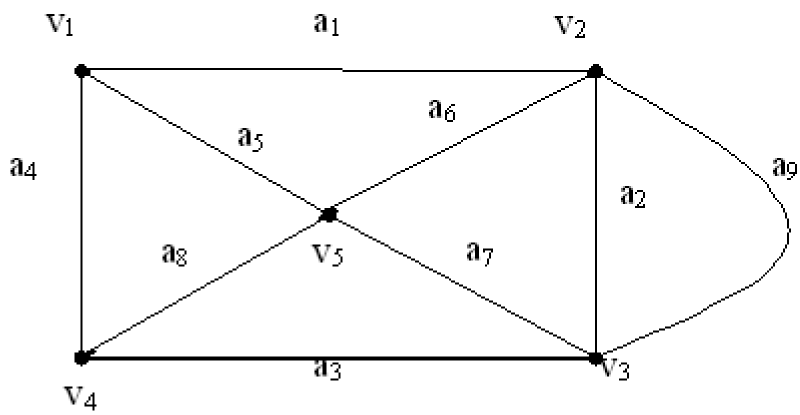
5.3.1. Caminos

Definición 5.31. *Sean G un grafo no dirigido y n un número entero positivo. Un* **camino de longitud n** *de u a v en G es una secuencia de n aristas* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *de G tal que* $f(e_1) = \{x_0, x_1\}, f(e_2) = \{x_1, x_2\}, \ldots, f(e_n) = \{x_{n-1}, x_n\}$, donde $x_0 = u$ y $x_n = v$. *En esta situación, se dice que los vértices u y v están* **conectados**.

Si el grafo es simple se denota el camino por su secuencia de vértices $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Definición 5.32. *El camino se dice* **circuito** *si empieza y termina en el mismo vértice, esto es, si $u = v$. Un camino es* **simple** *si todas las aristas son distintas dos a dos. Un camino es* **elemental** *si todos los vértices son distintos dos a dos, salvo a lo sumo x_0, x_n.*

Ejemplo 5.33.



Camino simple de v_4 a v_1: $a_8\ a_6\ a_2\ a_3\ a_4\ a_1\ a_9\ a_7\ a_5$

Circuito $a_8\ a_6\ a_2\ a_9\ a_3$

Teorema 5.34. *La existencia de un circuito simple de una longitud concreta es un invariante por isomorfismo.*

Teorema 5.35. *Sea G una grafo, dirigido o no, y sea A su matriz de adyacencia con respecto a una ordenación $\{v_1, v_2,\ldots, v_n\}$. El número de caminos distintos de longitud r de v_i, v_j, donde r es un entero positivo, es igual al elemento en la posición (i, j) de la matriz A^r.*

5.3.2. Conexión

Definición 5.36. *Se dice que un grafo no dirigido es* **conexo** *si hay un camino entre cada par de vértices distintos del grafo.*

Teorema 5.37. *Hay un camino simple entre cada par de vértices de un grafo no dirigido conexo.*

Demostración.

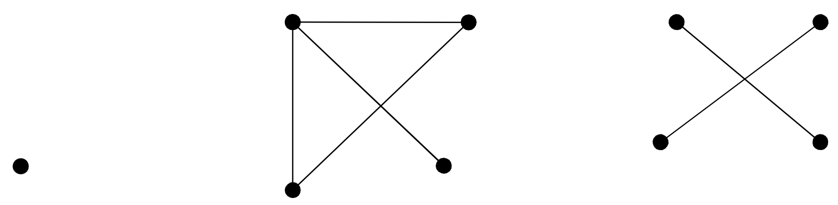
Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo no dirigido, y sean u y v dos vértices distintos del grafo. Al ser el grafo conexo existe un camino entre u y v. Sean x_0, $x_1,\ldots$, x_n, con $x_0 = u$ y $x_n = v$, la secuencia de vértices de un camino de longitud mínima. Se va a demostrar por reducción al absurdo que este camino es simple.

Supongamos que no lo es, existen aristas que se repiten. Entonces, existen $x_i = x_j$, para algunos i, j con $0 \leq i < j$. Basta considerar el camino que se obtiene eliminando las aristas que componen los vértices $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}$, esto es, el camino $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, \ldots, x_n$. Este camino tiene una longitud estrictamente menor que el de partida, lo que contradice que el camino elegido sea el de longitud mínima.

■

Definición 5.38. *Un grafo no dirigido que no es conexo es unión de dos o más subgrafos conexos que dos a dos no tienen vértices en común. A esos subgrafos conexos se les llama* **componentes conexas**.

Ejemplo 5.39. *El siguiente grafo tiene 4 componentes conexas*



Teorema 5.40. *El número de componentes conexas es un invariante por isomorfismo.*