ÁLGEBRA

Tema 4. APLICACIONES LINEALES.

Curso 2017 - 2018

José Juan Carreño Carreño

Departamento de **Matemática Aplicada**
a las Tecnologías de la Información
y las Comunicaciones

Escuela Técnica Superior de Ingeniería de
Sistemas Informáticos

Universidad Politécnica de Madrid

Contenido[1]

1. Definición y propiedades.
2. Expresión matricial.
   - Construcción de aplicaciones lineales.
3. Aplicaciones lineales bajo cambios de base.
4. Núcleo, imagen y rango de una aplicación lineal.
5. Composición de aplicaciones lineales.
   - Inversa de una aplicación lineal biyectiva.

[1] Del Tema 4 del libro de Álgebra: *Aplicaciones a Teoría de Códigos*, de Maite Foulquie, Jesús Garcia y Ana Lías.

Definición: *Sean* V *y* W *dos espacios vectoriales sobre un cuerpo* $\mathbb{K}$. *Una aplicación* $f : (V, +, \cdot_{\mathbb{K}}) \longrightarrow (W, +, \cdot_{\mathbb{K}})$ *se dice que es una* ***aplicación lineal*** *de* V *en* W, *o bien un* ***homomorfismo de espacios vectoriales*** *sobre* $\mathbb{K}$, *si:*

1. $f(u+v) = f(u)+f(v)$ *para todo* $u, v \in V$.
2. $f(a\,u) = a f(u)$ *para todo* $a \in \mathbb{K}$, $u \in V$.

Ejemplos:

- La **homotecia de razón** α: $f_\alpha : V \longrightarrow V$ con $\alpha \in \mathbb{K}^*$ fijo

$$f_\alpha(v) = \alpha v \qquad \forall v \in V.$$

- La **Identidad** de V en V: $Id : V \longrightarrow V$

$$Id(v) = v \qquad \forall v \in V.$$

- La **inclusión** de S en V, siendo S un subespacio vectorial de V:

$$i : S \longrightarrow V$$

$$i(v) = v \qquad \forall v \in S.$$

- El **homomorfismo nulo**: $c_0 : V \longrightarrow W$

$$c_0(v) = 0_W \qquad \forall v \in V.$$

Definiciones: *Si* f *es una aplicación lineal de* V *en* V *diremos que* f *es un* ***endomorfismo****.*

Si una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ *es biyectiva diremos que es un* ***isomorfismo*** *de* V *en* W.

Ejemplos:

Propiedades: Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal entre espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Se verifica que:

1. $f(0_V) = 0_W$
2. $f(-v) = -f(v)$ para todo $v \in V$

Observación: Las propiedades anteriores son condiciones necesarias para que una aplicación sea lineal, es decir, si alguna propiedad NO se cumple entonces la aplicación NO es lineal.

Ejemplos:

Proposición: *Sea* $f : V \longrightarrow W$ *una aplicación lineal y* $B = \left[u_1, u_2, \ldots, u_n \right]$ *una base de* V.

Si $v \in V$ *y* $v = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \ldots + x_n u_n$ *entonces*

$$f(v) = x_1 f(u_1) + x_2 f(u_2) + \ldots + x_n f(u_n)$$

Observación: Para conocer la imagen mediante una aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ basta con conocer las imágenes de los vectores de una base de V.

Ejemplos:

La observación anterior da lugar a dos resultados importantes:

1. **Toda aplicación lineal puede representarse mediante una expresión matricial.**
2. **Se pueden construir aplicaciones lineales que verifiquen condiciones dadas.**

Nota: Si de la expresión matricial se recupera la expresión explícita, entonces la aplicación es LINEAL.

Proposición: *Sea* $f : V \longrightarrow W$ *una aplicación lineal y* $B = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$ *y* $B' = [w_1, w_2, \ldots, w_m]$ *bases de* V *y* W *respectivamente.*

Si las coordenadas de $v \in V$ *y* $f(v) \in W$ *respecto de las bases son:*

$$v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_B \qquad y \qquad f(v) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)_{B'}$$

y se tiene que:

$$\begin{aligned} f(u_1) &= (a_{1\,1}, a_{2\,1}, \ldots, a_{m\,1})_{B'} \\ f(u_2) &= (a_{1\,2}, a_{2\,2}, \ldots, a_{m\,2})_{B'} \\ &\vdots \\ f(u_n) &= (a_{1\,n}, a_{2\,n}, \ldots, a_{m\,n})_{B'} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \dots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \dots & a_{2\,n} \\ \vdots & & & \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & \dots & a_{m\,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{B}$$

Para establecer la relación que hay entre las coordenadas de v en base B y las de $f(v)$ en B' es **suficiente con conocer las coordenadas de los vectores** $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)$ respecto de B'.

Dem.:

$\square$

Definición: *En las mismas condiciones anteriores, se llama **expresión matricial de f respecto de las bases B y B'** a la expresión:*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{B}$$

que abreviadamente: $Y_{B'} = M_f \, X_B$ *tal que:*

- X_B *e* $Y_{B'}$ *representan las matrices columna de las coordenadas de* v *y* $f(v)$ *en las bases* B *y* B'.
- M_f *se llama **matriz de f respecto de las bases B y B'**, y sus columnas son las coordenadas de los vectores* $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)$ *respecto de* B'.

Observaciones:

1. Fijadas las bases B y B' , la matriz M_f asociada a f es única, debido a la unicidad de las coordenadas.

2. Si f es un endomorfismo la matriz M_f de cualquiera de sus expresiones matriciales es cuadrada.
Además, se podría elegir la misma base B en el espacio inicial y en el final, quedando:

$$Y_B = M_f X_B$$

Ejemplos:

Observaciones:

1. A partir de las expresiones matriciales obtenidas se recuperan las expresiones explícitas de partida.

2. Esto caracteriza a las aplicaciones lineales.

Ejemplos:

Teorema: ***(existencia de aplicaciones lineales con condiciones)***

Sean V *y* W *espacios vectoriales y* $B = \left[u_1, u_2, \ldots, u_n \right]$ *una base de* V.

Si $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *son vectores de* W *entonces existe una única aplicación lineal* $f : V \longrightarrow W$ *tal que*

$$f(u_i) = t_i \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

Es decir, fijados vectores cualesquiera de W *como imágenes para los vectores de una base* B *existe una única aplicación lineal que cumpla esas condiciones.*

Dem.: Si las coordenadas de los vectores t_i respecto de una base $B' = \left[w_1, w_2, \ldots, w_m\right]$ de W son:

$$\begin{aligned} t_1 &= (a_{1\,1}, a_{2\,1}, \ldots, a_{m\,1})_{B'} \\ t_2 &= (a_{1\,2}, a_{2\,2}, \ldots, a_{m\,2})_{B'} \\ &\vdots \\ t_n &= (a_{1\,n}, a_{2\,n}, \ldots, a_{m\,n})_{B'} \end{aligned}$$

la expresión matricial de f respecto de B y B' es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{B}$$

Ejemplos:

Teorema: *Sean* $f : V \longrightarrow W$ *una aplicación lineal,* B_1 *y* B_2 *dos bases de* V *y* B_1' *y* B_2' *dos bases de* W *tales que las expresiones matriciales de los cambios de base de* B_2 *a* B_1 *y de* B_2' *a* B_1' *son:*

$$Z_{B_1} = P \cdot Z_{B_2} \qquad y \qquad Z_{B_1'} = Q \cdot Z_{B_2'}$$

Si la expresión matricial de f *respecto de* B_1 *y* B_1' *es* $Y_{B_1'} = M_f X_{B_1}$ *entonces su expresión matricial respecto de* B_2 *y* B_2' *es:*

$$Y_{B_2'} = (Q^{-1} M_f P) X_{B_2}$$

Ejemplos:

Observación: Sea B una base de V y $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo de V cuya expresión matricial respecto de B es: $Y_B = M_f X_B$.

Si B' es otra base de V tal que las expresiones matriciales de los cambios de base de B' a B y B a B' son respectivamente:

$$Z_B = P \cdot Z_{B'} \qquad \text{y} \qquad Z_{B'} = Q \cdot Z_B$$

entonces la expresión matricial de f respecto de B' se puede obtener utilizando cualquiera de ellos como sigue:

$$Y_{B'} = (P^{-1} M_f P) X_{B'} \qquad \text{o bien} \qquad Y_{B'} = (Q M_f Q^{-1}) X_{B'}$$

Ejemplos:

Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y S un subespacio de V.

Definición: ***La imagen de*** S *es el subconjunto de* W*:*

$$f(S) = \Big\{ f(v) \;/\; v \in S \Big\} \subseteq W$$

Proposición: *Si* S *es un subespacio de* V

$\Longrightarrow$ $f(S)$ *es un subespacio de* W*.*

Además, si $\Big[u_1, \dots, u_r \Big]$ *es una base de* S $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ $\Big\{ f(u_1), \dots, f(u_r) \Big\}$ *es sistema de generadores de* $f(S)$*,*

es decir: $f(S) = L(f(u_1), \dots, f(u_r))$

Por tanto, $\boxed{\dim f(S) \leq \dim S}$

Definición: *Sea* $f : V \longrightarrow W$ *una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre* $\mathbb{K}$.
Se define el ***conjunto imagen de*** f, *y se denota* $\mathrm{Im}\,(f)$, *como el conjunto imagen del subespacio impropio* V, *es decir:*

$$\mathrm{Im}\,(f) \;=\; f(V) \;=\; \Big\{ f(v) \;/\; v \in V \Big\} \;\subseteq W$$

Por tanto, $\mathrm{Im}\,(f)$ es un subespacio de W y

$$\boxed{\dim \mathrm{Im}(f) \;\leq\; \dim W}$$

Ejemplos:

Proposición: *Sea* $f : V \longrightarrow W$ *una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre* $\mathbb{K}$.

1. *Si* $B = \left[u_1, \ldots, u_n \right]$ *es una base de* V *entonces:*

$$\mathrm{Im}(f) = L(f(u_1), \ldots, f(u_n))$$

es decir, $\left\{ f(u_1), \ldots, f(u_n) \right\}$ *es sistema de generadores de* $\mathrm{Im}(f)$ *y, por tanto,*

$$\boxed{\dim \mathrm{Im}(f) \leq \dim V}$$

2. *Si* $Y_{B'} = M_f X_B$, *es la expresión matricial de* f *respecto de las bases* B *y* B' *de* V *y* W *respectivamente se tiene que*

$$\boxed{\dim \mathrm{Im}(f) = rg(M_f)}$$

3. f *es* *sobreyectiva* $\iff \dim \mathrm{Im}(f) = \dim W \iff$

$$\iff rg(M_f) = \dim W$$

Observación: Sea $f : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ se verifica que:

- Si $\dim W > \dim V$ entonces f NO es sobreyectiva.
- ¿Y si $\dim V > \dim W$ es necesariamente sobreyectiva?

Ejemplos:

Definición: *Sea* $f : V \longrightarrow W$ *una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre* $\mathbb{K}$.

Llamamos ***núcleo de la aplicación*** f*, y se denota* $\ker(f)$*, como el conjunto:*

$$\ker(f) = \left\{ v \in V \, / \, f(v) = 0_W \right\} \subseteq V$$

Ejemplos:

Proposición: *Sea* $f : V \longrightarrow W$ *una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre* $\mathbb{K}$, B *y* B' *bases de* V *y* W *respectivamente, tales que la expresión matricial de* f *respecto de ellas es* $Y_{B'} = M_f X_B$. *Se verifica:*

1. $\ker(f)$ *es un subespacio vectorial de* V.
2. *El sistema lineal homogéneo* $M_f X_B = 0$ *proporciona unas ecuaciones implícitas de* $\ker(f)$. *Luego:*
   - $rg(M_f) = $ *nº de ec. implícitas independientes*
   - $\boxed{\dim \ker(f) = \dim V - rg(M_f)}$
3. $\boxed{\dim V = \dim \ker(f) + \dim \mathbf{Im}(f)}$
4. $\boxed{\dim S = \dim(S \cap \ker(f)) + \dim f(S)}$ *siendo* $S \subseteq V$ *sub. v.*
5. f *es inyectiva* $\iff \ker(f) = \{0_V\} \iff$
   $\iff \dim \ker(f) = 0 \iff rg(M_f) = \dim V$

Observación:

Si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ se verifica que:

- Si $\dim V > \dim W$ entonces f NO es inyectiva.
- ¿Y si $\dim V < \dim W$ es necesariamente inyectiva?

Ejemplos:

Proposición:

Sea $f : V \longrightarrow W$ *una aplicación lineal* *inyectiva*.
Entonces se verifica:

1. *Si* $\{ u_1, \ldots, u_r \}$ *es libre entonces*

   $\{ f(u_1), \ldots, f(u_r) \}$ *es libre.*

2. *Para todo subespacio* S *de* V: $\boxed{\dim f(S) = \dim S}$

Ejemplos:

Proposición: *Sea* $f : V \longrightarrow W$ *una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre* $\mathbb{K}$. *Entonces se verifica:*

1. f *es biyectiva* $\iff$ $rg(M_f) = \dim(V) = \dim(W)$
2. f *es biyectiva* $\iff$ $det(M_f) \neq 0.$

Siendo M_f *la matriz de una de las expresiones matriciales de* f.

Observación: Si $f : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ se verifica:

- Si $\dim\, V \neq \dim\, W$ entonces f NO es biyectiva.
- ¿Y si $\dim\, V = \dim\, W$ es necesariamente biyectiva?

Ejemplos:

Teorema: *Sea* $f : V \longrightarrow W$ *una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre* $\mathbb{K}$*, tales que* $\dim V = \dim W$*. Se verifica:*

1. f *es biyectiva* $\Longleftrightarrow$ f *es inyectiva* $\Longleftrightarrow$ $\ker(f) = \{\, 0_V \,\}$.
2. f *es biyectiva* $\Longleftrightarrow$ f *es sobreyectiva* $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Im}(f) = W$.

Ejemplos:

Teorema: *Sea* $f : V \longrightarrow W$ *una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre* $\mathbb{K}$*, con* $\dim V = n$ *y* $\dim W = m$*. Se verifica:*

1. *Si* $n < m$ *entonces* f *NO es sobreyectiva.*
2. *Si* $n > m$ *entonces* f *NO es inyectiva.*
3. *Si* $n \neq m$ *entonces* f *NO es biyectiva.*

Ejemplos:

Composición de aplicaciones lineales.

Teorema: *Sean* B_1, B_2 *y* B_3 *bases de los espacios vectoriales* V, W *y* U *respectivamente.*

Si $f : V \longrightarrow W$ *y* $g : W \longrightarrow U$ *son aplicaciones lineales entonces* $g \circ f$ *también lo es.*

Además, si las expresiones matriciales de f *y* g *respecto de las bases* B_1, B_2 *y* B_3 *son:*

$$Y_{B_2} = M_f X_{B_1} \quad e \quad Y_{B_3} = M_g X_{B_2}$$

Y la expresión matricial de $g \circ f$ *respecto de las bases* B_1 *y* B_3 *es:*

$$Y_{B_3} = M_g M_f X_{B_1}$$

Ejemplos:

Inversa de una aplicación lineal biyectiva.

Teorema: *Si* $f : V \longrightarrow W$ *es una aplicación lineal* *biyectiva* *entonces* $f^{-1} : W \longrightarrow V$ *también lo es.*

Si la expresión matricial de f *respecto de las bases* B_1 *y* B_2*, de* V *y* W*, respectivamente, es:*

$$Y_{B_2} = M_f X_{B_1}$$

Entonces la expresión matricial de f^{-1} *respecto de las bases* B_2 *y* B_1 *es:*

$$Y_{B_1} = M_f^{-1} X_{B_2}$$

Ejemplos: