Universidad Rey Juan Carlos

GRADO EN MATEMÁTICAS

PROBABILIDAD

TEMA 4

VECTORES ALEATORIOS

Sonia Hernández Alonso
Área de Estadística e Investigación Operativa (URJC)

Esquema

- Introducción
- Definición de vector aleatorio
- Vectores aleatorios discretos
- Independencia de variables aleatorias
- Covarianza entre variables aleatorias
- Matriz de varianzas y covarianzas y vector de medias
- Correlación entre variables aleatorias
- Vectores aleatorios continuos
- Distribución normal multivariante

Introducción

¿Por qué considerar vectores aleatorios?

- En el tema anterior nos hemos limitado a analizar variables aleatorias unidimensionales.

- Sin embargo, en muchas ocasiones estaremos interesados en más de una característica de un fenómeno aleatorio.

- Consideremos, por ejemplo, el experimento aleatorio consistente en elegir al azar alumnos de la URJC y estudiar su perfil biológico. Supongamos que el perfil se compone de la talla, el peso, la presión sanguínea, la frecuencia cardiaca y la capacidad respiratoria.

  En ese caso estaremos interesados en cinco variables aleatorias que deberán analizarse **conjuntamente.**

- En este tema analizaremos modelos de probabilidad con varias variables aleatorias. Estos modelos reciben el nombre de **vectores aleatorios** o **variables aleatorias multivariantes**.

¿Basta con conocer la distribución de cada variable?

- A lo largo de este tema es importante tener en cuenta que, **conocer la distribución individual de cada variable aleatoria no proporciona suficente información para calcular probabilidades que involucren a más de una variable**.

- Por ejemplo, si estamos analizando las variables peso (P) y altura (A) de un alumno de la URJC elegido aleatoriamente, no bastará con saber cuál es la distribución de cada una de ellas por separado.

- Es de esperar que que los alumnos más altos tengan, con mayor probabilidad, pesos más altos, y viceversa, y necesitaremos precisar como se distribuyen **conjuntamente** ambas variables, es decir, **determinar la distribución conjunta del vector** (P, A).

Ejemplo: las distribuciones individuales no bastan

- Para el experimento aleatorio consistente en lanzar al aire una moneda equilibrada tres veces, consideremos las variables aleatorias:

$$\begin{aligned} X &= \text{número de caras,} \\ Y &= \text{número de cruces que preceden a la primera cara.}^{(*)} \end{aligned}$$

- Es fácil determinar las función de masa de probabilidad de cada una de estas variables individualmente:

$$X \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \qquad Y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{4}{8} & \frac{2}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

- Sin embargo, estas distribuciones no son suficientes para calcular, por ejemplo

$$P(X = 2, Y = 0] \qquad \text{ó} \qquad P[X = Y].$$

(*) En caso de obtener 3 cruces ($\mathcal{XXX}$), se considerará que $Y = 3$.

Definición de vector aleatorio

URJC

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

¿Qué es un vector aleatorio?

- **Definición**: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico.

  Se dice que el vector n-dimensional

  $$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

  es un **vector aleatorio** si para cada una de sus componentes, es decir, para $j = 1, 2, \ldots, n$,

  $$X_j : \Omega \to \mathbb{R}$$

  es una variable aleatoria.

- Obsérvese que $\mathbf{X}$ es una función $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ que a cada $\omega \in \Omega$ le asigna el vector

  $$\mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$$

- El vector aleatorio $\mathbf{X}$ **induce una distribución de probabilidades sobre $\mathbb{R}^n$** a partir de la estructura probabilística definida sobre Ω.

Función de distribución conjunta

- **Definición**: La **función de distribución conjunta** de un vector aleatorio

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

es la función

$$F_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$$

que a cada $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ le asigna el valor

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = P\left(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n\right).$$

Propiedades de la función de distribución conjunta

- **Proposición 1:** La función de distribución conjunta verifica las siguientes propiedades:

1. $F_{\mathbf{X}}$ es **monótona no decreciente en cada componente**, es decir, si $x_i < x_i'$, entonces

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \leq F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_i' \ldots, x_n)$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

2.

$$\lim_{x_1 \to \infty, \ldots, x_n \to \infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = 1$$

3.

$$\lim_{x_1 \to -\infty, \ldots, x_n \to -\infty} F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = 0$$

Vectores aleatorios discretos

Vectores aleatorios discretos

- **Definición**: Se dice que un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es **discreto** si para cada componente $i = 1, 2, \ldots, n$, X_i es una variable aleatoria discreta.
- Observemos que, en tal caso, existirán **conjuntos** $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}$ **numerables** tales que

$$P(X_1 \in A_1) = 1, P(X_2 \in A_2) = 1, \ldots, P(X_n \in A_n) = 1.$$

- Si consideramos el conjunto $\mathbf{A} = A_1 \times A_2, \times \ldots \times A_n$ se tiene que

$$P(\mathbf{X} \in \mathbf{A}) = \mathbf{1}$$

- Por tanto, **el soporte de un vector aleatorio discreto** (que es un conjunto de R^n) **es numerable.**
- Vamos a analizar las **distribuciones multivariantes discretas** comenzando por un ejemplo para el caso **bivariante**.

Ejemplo: vectores aleatorios discretos

- Los agricultores de cierta región pueden utilizar tanto abonos químicos como orgánicos.

- Las probabilidades para cada número de abonos químicos empleados (X_1) combinados con cada número de abonos orgánicos (X_2) se recogen en la siguiente tabla:

X_2 \ X_1	0	1	2
0	0.1	0.4	0.1
1	0.2	0.2	0

- Esta tabla recoje todas las **probabilidades conjuntas** relativas al vector (X_1, X_2). Por ejemplo, observamos que

$$P(X_1 = 1, X_2 = 0) = 0.4,$$

y

$$P(X_1 = 0, X_2 = 1) = 0.2.$$

Función de masa de probabilidad conjunta

- **Definición**: La **función de masa de probabilidad conjunta** de un vector aleatorio bivariante, (X_1, X_2) es la función

$$f_{X_1,X_2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$$

definida como

$$f_{X_1,X_2}(k_1, k_2) = P(X_1 = k_1, X_2 = k_2).$$

- La función de masa de un vector aleatorio bivariante verifica las propiedades

1. $f_{X_1,X_2}(k_1, k_2) \geq 0$ para todo $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$,

2. $$\sum_{k_1 \in S_{X_1}} \sum_{k_2 \in S_{X_2}} f_{X_1,X_2}(k_1, k_2) = 1$$

- La **distribución de probabilidades** de un vector aleatorio bivariante, (X_1, X_2), puede resumirse en una **tabla de doble entrada** que refleje su función de masa conjunta.

Distribuciones marginales

- A partir de la función de masa conjunta se pueden calcular otras distribuciones de probabilidad.

- **Definición**: La **distribución marginal** de X_1 es la distribución de probabilidades de la primera variable del vector aleatorio considerada individualmente.

- En el caso discreto esta distribución marginal puede describirse mediante la **función de masa marginal:**

$$\begin{aligned} f_1(k_1) &= f_{X_1}(k_1) \\ &= P(X_1 = k_1) \\ &= \sum_{k_2 \in S_{X_2}} P(X_1 = k_1, X_2 = k_2) \\ &= \sum_{k_2 \in S_{X_2}} f_{X_1,X_2}(k_1, k_2). \end{aligned}$$

Distribuciones marginales (continuación)

- Análogamente, la **función de masa marginal de X_2** viene dada por

$$
\begin{aligned}
f_2(k_2) &= P(X_2 = k_2) \\
&= \sum_{k_1 \in S_{X_1}} P(X_1 = k_1, X_2 = k_2) \\
&= \sum_{k_1 \in S_{X_1}} f_{X_1,X_2}(k_1, k_2)\,.
\end{aligned}
$$

- Las funciones de masa de probabilidad marginales se calculan fácilmente en los **márgenes** de la tabla sumando las probabilidades por filas o por columnas.

- Las distribuciones marginales permiten calcular probabilidades, esperanzas, varianzas, medianas, etc. **para cada una de las variables aleatorias** por separado.

Ejemplo: distribuciones marginales

- La distribución marginal de la cantidad de abonos químicos empleados en la región del ejemplo anterior es

$$\begin{aligned} f_{X_1}(0) &= P(X_1=0) = P(X_1=0, X_2=0) + P(X_1=0, X_2=1) \\ &= 0.1 + 0.2 \\ &= 0.3, \\ f_{X_1}(1) &= P(X_1=1) = 0.4 + 0.2 = 0.6, \\ f_{X_1}(2) &= P(X_1=2) = 0.1 + 0 = 0.1, \end{aligned}$$

y la distribución marginal del número de abonos orgánicos utilizados,

$$\begin{aligned} f_{X_2}(0) &= P(X_2=0) = 0.1 + 0.4 + 0.1 = 0.6, \\ f_{X_2}(1) &= P(X_2=1) = 0.2 + 0.2 + 0 = 0.4. \end{aligned}$$

Los cálculos resultan más sencillos sumando a los márgenes de la tabla:

		X_1			
		0	1	2	
X_2	0	0.1	0.4	0.1	0.6
	1	0.2	0.2	0	0.4
		0.3	0.6	0.1	1

Ejemplo: distribuciones marginales (continuación)

- Usando estas distribuciones marginales podemos calcular, por ejemplo, la esperanza y la varianza de cada una de las variables aleatorias:

$$
\begin{aligned}
E(X_1) &= 0.8, \\
E\left(X_1^2\right) &= 1, \\
V(X_1) &= 0.36,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(X_2) &= 0.4, \\
E\left(X_2^2\right) &= 0.4, \\
V(X_2) &= 0.24.
\end{aligned}
$$

- **Cuestión:** ¿Cuáles son las medianas de X_1 y X_2?

Distribuciones condicionadas

- Además de su distribución marginal, se pueden considerar otras distribuciones de probabilidad para X_1: las **distribuciones condicionadas** por un valor particular de X_2, ya que, en muchos casos, el hecho de saber que la variable X_2 toma un determinado valor $(X_2 = k_2)$ modifica la distribución de probabilidades sobre X_1.

- **Definición**: La **función de masa de probabilidad de X_1 condicionada a $X_2 = k_2$**, que se denota $X_1|X_2 = k_2$, es

$$\begin{aligned} f_{X_1}(k_1|X_2 = k_2) &= P(X_1 = k_1|X_2 = k_2) \\ &= \frac{P(X_1 = k_1, X_2 = k_2)}{P(X_2 = k_2)} \\ &= \frac{f_{X_1,X_2}(k_1, k_2)}{f_{X_2}(k_2)}. \end{aligned}$$

Propiedades de la función de masa condicionada

- **Proposición 2:** La función de masa condicionada proporciona otra distribución de probabilidades para X_1, y como tal verifica las propiedades:

  1. $f_{X_1}(k_1|X_2 = k_2) \geq 0$ para todo $k_1 \in S_{X_1}, k_2 \in S_{X_2}$,

  2. $$\sum_{k_1 \in S_{X_1}} f_{X_1}(k_1|X_2 = k_2) = 1$$

- A partir de esta función de probabilidad condicionada podemos calcular, por ejemplo, esperanzas y varianzas condicionadas:

$$\begin{aligned} E\left(X_1|X_2 = k_2\right) &= \sum_{k_1 \in S_{X_1}} k_1 \times f_1(k_1|k_2), \\ V\left(X_1|X_2 = k_2\right) &= E\left(X_1^2|X_2 = k_2\right) - E^2\left(X_1|X_2 = k_2\right). \end{aligned}$$

La otra función de masa condicionada

- De manera similar, la función de masa de probabilidad de X_2 condicionada a $X_1 = k_1$, $(X_2|X_1 = k_1)$, viene dada por

$$f_{X_2}(k_2|X_1 = k_1) \;=\; \frac{f_{X_1,X_2}(k_1, k_2)}{f_{X_1}(k_1)}.$$

Ejemplo: distribuciones condicionadas

- **Ejercicio 1:** Para el caso de los abonos en la región del ejemplo anterior,

1. Determinar la distribución de la cantidad de abonos químicos, X_1, sabiendo que el número de abonos orgánicos empleados es $X_2 = 0$.
2. Calcular $E\left(X_1 \mid X_2 = 0\right)$ y $V\left(X_1 \mid X_2 = 0\right)$.
3. Establecer la distribución de la cantidad de abonos orgánicos, X_2, cuando se sabe que el número de abonos químicos utilizados es $X_1 = 1$.
4. Calcular $E\left(X_2 \mid X_1 = 1\right)$ y $V\left(X_2 \mid X_1 = 1\right)$.

Ejemplo: distribuciones condicionadas

- **Ejercicio 1:** Para el caso de los abonos en la región del ejemplo anterior,

  1. Determinar la distribución de la cantidad de abonos químicos, X_1, sabiendo que el número de abonos orgánicos empleados es $X_2 = 0$.
  2. Calcular $E\left(X_1 \mid X_1 = 0\right)$ y $V\left(X_1 \mid X_2 = 1\right)$.
  3. Establecer la distribución de la cantidad de abonos orgánicos, X_2, cuando se sabe que el número de abonos químicos utilizados es $X_1 = 1$.
  4. Calcular $E\left(X_2 \mid X_1 = 1\right)$ y $V\left(X_2 \mid X_1 = 1\right)$.

		X_1			
		0	1	2	
X_2	0	0.1	0.4	0.1	0.6
	1	0.2	0.2	0	0.4
		0.3	0.6	0.1	1

Solución al Ejercicio 1

1. La función de probabilidad de X_1 condicionada por $X_2 = 0$ es

$$
\begin{aligned}
f_{X_1}(0 \mid X_2 = 0) &= P(X_1 = 0 \mid X_2 = 0) = \frac{f_{X_1,X_2}(0,0)}{f_{X_2}(0)} = \frac{0.1}{0.6} = \frac{1}{6}, \\
f_{X_1}(1 \mid X_2 = 0) &= P(X_1 = 1 \mid X_2 = 0) = \frac{f_{X_1,X_2}(1,0)}{f_{X_2}(0)} = \frac{0.4}{0.6} = \frac{4}{6}, \\
f_{X_1}(2 \mid X_2 = 0) &= P(X_1 = 0 \mid X_2 = 0) = \frac{f_{X_1,X_2}(2,0)}{f_{X_2}(0)} = \frac{0.1}{0.6} = \frac{1}{6},
\end{aligned}
$$

o, expresado en forma matricial,

$$
X \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.
$$

Observamos que el reparto de probabilidades del número de abonos químicos cambia cuando se conoce cuántos de los orgánicos se emplean. Por tanto, también se modificarán su esperanza y varianza.

Solución al Ejercicio 1 (continuación)

2. Como hemos dicho, también se modifican la esperanza y la varianza de X_1 (con respecto a los valores marginales):

$$E\left(X_1 \mid X_2 = 0\right) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{4}{6} + 2 \times \frac{1}{6} = 1,$$

$$E\left(X_1^2 \mid X_2 = 0\right) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{4}{6} + 4 \times \frac{1}{6} = \frac{4}{3},$$

$$V\left(X_1^2 \mid X_2 = 0\right) = \frac{4}{3} - 1^2 = \frac{1}{3}.$$

Solución al Ejercicio 1 (continuación)

3. Del mismo modo, la distribución de probabilidades del número de abonos orgánicos también varía cuando sabemos cuántos abonos químicos se utilizan.

   Así, la función de masa de X_2 condicionada por $X_1 = 1$ es

$$f_{X_2}(0 \mid X_1 = 1) = P(X_2 = 0 \mid X_1 = 1) = \frac{f_{X_1,X_2}(1,0)}{f_{X_1}(1)} = \frac{0.4}{0.6} = \frac{2}{3},$$

$$f_{X_2}(1 \mid X_1 = 1) = P(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = \frac{f_{X_1,X_2}(1,1)}{f_{X_1}(1)} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3},$$

   o, resumidamente,

$$X \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Solución al Ejercicio 1 (continuación)

4. Del apartado anterior se deduce que,

$$
\begin{aligned}
E\left(X_2 \mid X_1 = 1\right) &= 0 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \\
E\left(X_2^2 \mid X_1 = 1\right) &= 0 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \\
V\left(X_2^2 \mid X_1 = 1\right) &= \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}.
\end{aligned}
$$

Otro ejemplo sobre vectores discretos

- **Ejercicio 2:** Para el experimento aleatorio consistente en lanzar al aire una moneda equilibrada tres veces, consideremos las variables aleatorias:

$$\begin{aligned} X &= \text{número de caras,} \\ Y &= \text{número de cruces que preceden a la primera cara } ^{(*)}. \end{aligned}$$

1. Determinar la distribución conjunta del vector aleatorio (X, Y).
2. Calcular $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, y $V(Y)$.
3. Calcular $E(X|Y=1)$ y $V(X|Y=1)$.
4. Calcular $E(Y|X=2)$ y $V(Y|X=2)$.

resolución:.........pizarra

$^{(*)}$ En caso de obtener 3 cruces $(\mathcal{X}\mathcal{X}\mathcal{X})$, se considerará que $Y=3$.

Solución a (parte del) Ejercicio 2:

2.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 1.5, \\
E(Y) &= 0.875, \\
V(X) &= 0.75, \\
V(Y) &= 1.1.
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
E(X|Y=1) &= 1.5, \\
V(X|Y=1) &= 0.25.
\end{aligned}
$$

Solución a (parte del) Ejercicio 2:

4.

$$\begin{aligned} E(Y|X=2) &= 0.125, \\ V(Y|X=2) &= 0.1094. \end{aligned}$$

Independencia de variables aleatorias

URJC

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Independencia de dos variables aleatorias

URJC

- En ocasiones, **la información referida a una variable aleatoria X no incide la distribución de probabilidades de otra variable Y.**

- En tales casos se dice que X e Y son independientes.

- Nos planteamos la cuestión: ¿en qué medida la información referida a una variable aleatoria X incide en los valores de otra variable Y? Por ejemplo, la inflación y la emisión monetaria, ¿son variables independientes?

- **Definición**: Las variables aleatorias X e Y son **independientes** si para cualquier par de conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ se verifica

$$P\left(X \in A, Y \in B\right) = P\left(X \in A\right) \times P\left(Y \in B\right)$$

- Puede probarse que la condición anterior es **equivalente** a la de, para todos los valores $x, y \in \mathbb{R}$ se verifique

$$F_{X,Y}\left(x, y\right) = F_X\left(x\right) \times F_Y\left(y\right)$$

Independencia de n variables aleatorias

- **Definición**: Se dice que las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son **independientes** si para cualquier colección de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}$ se verifica

$$
\begin{aligned}
& P\left(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots, X_n \in A_n\right) \\
= \;& P\left(X_1 \in A_1\right) \times P\left(X_2 \in A_2\right) \times \ldots \times P\left(X_n \in A_n\right).
\end{aligned}
$$

- **Proposición 3:** Las variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son **independientes** si y solo si para todos los valores reales de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, se verifica

$$
F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = F_{X_1}\left(x_1\right) \times F_{X_2}\left(x_2\right) \times \ldots F_{X_n}\left(x_n\right).
$$

  donde $F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}$ es la **función de distribución conjunta** de las n variables.

- Cuando las variables son independientes, **el hecho de conocer los valores que toman un subconjunto de ellas, no afecta a la distribución de probabilidades de las demás**.

Conservación independencia por transformaciones

- **Proposición 4:** Consideremos una colección de variables aleatorias independientes,

$$X_1, X_2, \ldots, X_n,$$

y un conjunto de funciones $g_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, para $j = 1, 2, \ldots, n$.

Con estos elementos podemos definir una nueva colección de variables

$$Y_1 = g_1(X_1), Y_2 = g_2(X_2), \ldots, Y_n = g_n(X_n).$$

En esta situación, **las variables aleatorias transformadas $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ son también independientes**.

- Por ejemplo, si X, Y y Z son independientes, entonces las variables

$$\sqrt{X},$$
$$\cos(Y)$$
$$2Z^2 - 7Z + 3$$

también son variables aleatorias independientes.

Independencia de variables discretas

- Como hemos dicho, dos variables aleatorias X e Y son **independientes** si para cualquier par de conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ se tiene que

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \times P(Y \in B)$$

o, equivalentemente si para todos los valores $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \times F_Y(y)$$

- En el caso de variables aleatorias discretas esto es equivalente a que para todos los valores del soporte se verifique

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y),$$

es decir, que **la función de masa conjunta sea el producto de las funciones de masa marginales:**

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y) \qquad \forall\, x \in S_X,\ \forall y \in S_Y.$$

- Esta condición resulta fácil de verificar en la tabla de doble entrada que resume la distribución de probabilidades del vector (X, Y).

Ejemplo: independencia de variables discretas

- Las variables X_1 (número de abonos químicos) y X_2 (número de abonos orgánicos) de los ejemplos anteriores, **no son independientes**, ya que, por ejemplo,

$$f_{X_1,X_2}(0,0) = 0.1 \neq 0.18 = 0.3 \times 0.6 = f_{X_1}(0) \times f_{X_2}(0)\,.$$

X_2 \ X_1	0	1	2	
0	**0.1**	0.4	0.1	**0.6**
1	0.2	0.2	0	0.4
	0.3	0.6	0.1	1

Otro ejemplo: independencia de variables discretas

- **Ejercicio 3:** La función de masa conjunta de las variables aleatorias X e Y es la que aparece en la siguiente tabla:

$Y \backslash X$	0	1	2	
1	0.15	0.09	0.01	0.25
5	0.45	0.27	0.03	0.75
	0.60	0.36	0.04	1

1. Son independientes las variables X e Y?
2. ¿Qué relación existe entre $E(X)$, $E(X|Y=1)$ y $E(X|Y=5)$? ¿A qué es esto debido?

resolución:.........pizarra

Solución al Ejercicio 3

1. En este caso, las variables X e Y sí son independientes, ya que, como se puede comprobar en la tabla, para todo $x \in \{0, 1, 2\}$ e $y \in \{1, 5\}$ se cumple que

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y),$$

2. $E(X) = E(X|Y = 1) = E(X|Y = 5)$.

Distribuciones condicionadas e independencia

- **Proposición 5:** Cuando X_1 y X_2 son variables aleatorias **independientes**, se verifica, para todos los valores $x_1 \in S_{X_1}$ y $x_2 \in S_{X_2}$, que,

$$\begin{aligned}
P\left(X_1 = x_1 | X_2 = x_2\right) &= \frac{P\left(X_1 = x_1, X_2 = x_2\right)}{P\left(X_2 = x_2\right)} \\
&= \frac{P\left(X_1 = x_1\right) \times P\left(X_2 = x_2\right)}{P\left(X_2 = x_2\right)} \\
&= P\left(X_1 = x_1\right),
\end{aligned}$$

  o expresado de otra forma, que

$$f_{X_1}\left(x_1 | X_2 = x_2\right) = \frac{f_{X_1,X_2}\left(x_1, x_2\right)}{f_{X_2}\left(x_2\right)} = \frac{f_{X_1}\left(x_1\right) f_{X_2}\left(x_2\right)}{f_{X_2}\left(x_2\right)} = f_{X_1}\left(x_1\right),$$

  Análogamente se tiene que

$$f_{X_2}\left(x_2 | X_1 = x_1\right) = f_{X_2}\left(x_2\right).$$

- Es decir, para variables independientes, la distribución **condicionada por cualquier valor de la otra variable coincide con la marginal**.

Otro ejemplo: vector aleatorio discreto

- **Ejercicio 4:** La junta de una comunidad vecinal está formada por 10 vecinos: uno del primer piso, tres del segundo, dos del tercero, tres del cuarto y uno del quinto. De los 10 miembros de la junta se selecciona al azar una comisión de dos personas.

  Se desea conocer la representación que tienen en esta junta los vecinos de los pisos más bajos.

  Sea P el número de vecinos del primer piso en la comisión y S el número de vecinos del segundo.

  1. Hallar la función de masa conjunta del vector (P, S).
  2. Encontrar las distribuciones marginales de P y S.
  3. Calcular $E(P)$, $E(P|S=0)$, $E(P|S=1)$ y $E(P|S=2)$.
  4. Determinar si las variables P y S son independientes.

  resolución:.........pizarra

Covarianza entre variables aleatorias

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Valor esperado de transformaciones de variables

- Sean X una variable aleatoria univariante, y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real.
- Recordemos que, entonces, $g(X)$ es otra variable aleatoria, y su valor esperado viene dado por

$$E\left(g\left(X\right)\right) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x_i \in S_X} g\left(x_i\right) f_X\left(x_i\right) & \text{en el caso discreto} \\ \displaystyle\int_{S_X} g\left(x\right) f_X\left(x\right) dx & \text{en el caso continuo} \end{cases}.$$

- **Ejercicio 5:** Sea X una variable aleatoria con función de masa

$$\begin{aligned} f_X(0) &= 0.3, \\ f_X(90) &= 0.2, \\ f_X(180) &= 0.4, \\ f_X(270) &= 0.1. \end{aligned}$$

  Si los angulos se miden en grados, ¿cuál es el valor esperado de $sen(X)$? ¿Y el de $cos(X)$?

Solución al Ejercicio 5

- Puesto que X es una variable discreta,

$$\begin{aligned} & E\left(sen\left(X\right)\right) \\ = & \sum_{x \in S_X} sen\left(x\right) f_X\left(x\right) \\ = & 0.3 \times sen(0) + 0.2 \times sen(90) + 0.4 \times sen(180) + 0.1 \times sen(270) \\ = & \mathbf{0.1}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & E\left(cos\left(X\right)\right) \\ = & \sum_{x \in S_X} cos\left(x\right) f_X\left(x\right) \\ = & 0.3 \times cos(0) + 0.2 \times cos(90) + 0.4 \times cos(180) + 0.1 \times cos(270) \\ = & \mathbf{-0.1}. \end{aligned}$$

Esperanza transformaciones vectores aleatorios

- La generalización de este resultado a dimensión $n = 2$ es la siguiente.
- **Proposición 6:** Si (X_1, X_2) es un vector aleatorio bivariante discreto y

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

entonces $g(X_1, X_2)$ es una variable aleatoria unidimensional, y su valor esperado es

$$E\left[g(X_1, X_2)\right] = \sum_{x_1 \in S_{X_1}} \sum_{x_2 \in S_{X_2}} g\left(x_1, x_2\right) f_{X_1, X_2}\left(x_1, x_2\right).$$

Ejemplo: esperanza de transformaciones de vectores

- **Ejercicio 6:** La función de masa conjunta de las variables aleatorias X e Y es la que aparece en la siguiente tabla:

X

Y	-2	-1	2
0	0.1	0	0.3
4	0.2	0.3	0.1

- Hallar $E\left(\frac{Y}{X}\right)$ y $E(X \times Y)$ y compararlas con $\frac{E(Y)}{E(X)}$ y $E(X) \times E(Y)$, respectivamente.

  resolución:.........pizarra

Solución al Ejercicio 6

$$\begin{aligned} E\left(\frac{Y}{X}\right) &= \frac{0}{-2}\times 0.1+\frac{0}{-1}\times 0+\frac{0}{2}\times 0.3+\frac{4}{-2}\times 0.2+\frac{4}{-1}\times 0.3+\frac{4}{2}\times 0.1 = \mathbf{-1.4}, \\ E(X\times Y) &= 0\times(0.1+0+0.3)+(-2)\times 4\times 0.2+(-1)\times 4\times 0.3+2\times 4\times 0.1 = \mathbf{-2}. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} E(X) &= (-2)\times 0.3+(-1)\times 0.3+2\times 0.4 = \mathbf{-0.1}, \\ E(Y) &= 0\times 0.4+4\times 0.6 = \mathbf{2.4}. \end{aligned}$$

Luego

$$E\left(\frac{Y}{X}\right) = -1.4 \neq -24 = \frac{E(Y)}{E(X)},$$

y

$$E(X\times Y) = -2 \neq -0.24 = -0.1\times 2.4 = E(X)\times E(Y).$$

Esperanza del producto de variables aleatorias

- El ejemplo anterior ilustra el hecho de que, en general, para un par de variables aleatorias, X_1 y X_2,

$$E(X_1 \times X_2) \neq E(X_1) \times E(X_2),$$

es decir, que **la esperanza del producto de variables no tiene por qué coincidir con el producto de las esperanzas.**

- No obstante, en algunos casos sí se da esta igualdad.

- En particular, puede demostrarse que, si X_1 y X_2 son **variables aleatorias independendientes**, entonces sí se verifica

$$E(X_1 \times X_2) = E(X_1) \times E(X_2).$$

Covarianza entre variables aleatorias

- Se define la **covarianza** entre dos variables aleatorias, X e Y, como

$$\boxed{Cov\,(X,Y) = E\,[(X - E(X)) \times (Y - E(Y))]}$$

es decir

$$\boxed{Cov\,(X,Y) = E\,[(X - \mu_X) \times (Y - \mu_Y)]}$$

- Una fórmula alternativa para la covarianza, que hace los cálculos más sencillos, es la siguiente.

- **Proposición 7:** La covarianza entre dos variables aleatorias, X e Y, puede expresarse como

$$\boxed{Cov\,(X,Y) = E\,[X \cdot Y] - E\,[X] \cdot E\,[Y] = E\,[X \cdot Y] - \mu_X \cdot \mu_Y}$$

demostración:.........pizarra

¿Cuál es la covariaza de X consigo misma?

- Dada una variable aleatoria X, ¿cuál es la covarianza que tiene consigo misma?
- Es decir, qué es $Cov(X, X)$?

¿Cuál es la covariaza de X consigo misma?

- Dada una variable aleatoria X, ¿cuál es la covarianza que tiene consigo misma?
- Es decir, qué es $Cov(X, X)$?
- Observemos que

$$Cov\,(X, X) = E\,[X \times X] - E\,[X] \times E\,[Y] = E\left[X^2\right] - E^2\,[X] = V\,(X) = \sigma_X^2$$

- Es decir, **la covarianza de X consigo misma es su varianza**.

Variables aleatrorias incorrelacionadas

- Cuando la covarianza entre las variables X e Y es nula, es decir, si se verifica

$$Cov(X, Y) = 0$$

se dice que las variables son (o están) **incorrelacionadas** entre sí.

Ejemplo: covarianza entre variables aleatorias

- **Ejercicio 7:** Calcular la covarianza entre las variables aleatorias X_1 (número de abonos químicos) y X_2 (número de abonos orgánicos) de los ejemplos anteriores, cuya función de masa de probabilidad venía dada por

X_1

X_2		0	1	2	
	0	0.1	0.4	0.1	0.6
	1	0.2	0.2	0	0.4
		0.3	0.6	0.1	1

resolución:.........pizarra

Solución al Ejercicio 7:

- Se tiene que

$$
\begin{aligned}
E(X_1\,X_2) &= 0.2, \\
E(X_1) &= 0.8, \\
E(X_2) &= 0.4,
\end{aligned}
$$

y por consiguiente

$$Cov(X_1, X_2) = E\,(X_1 X_2) - E\,(X_1) \times E\,(X_2) = 0.2 - 0.8 \times 0.4 = \mathbf{-0.12}.$$

Interpretación de la covarianza

- La covarianza es una **medida de la variabilidad conjunta de dos variables variables X e Y**:

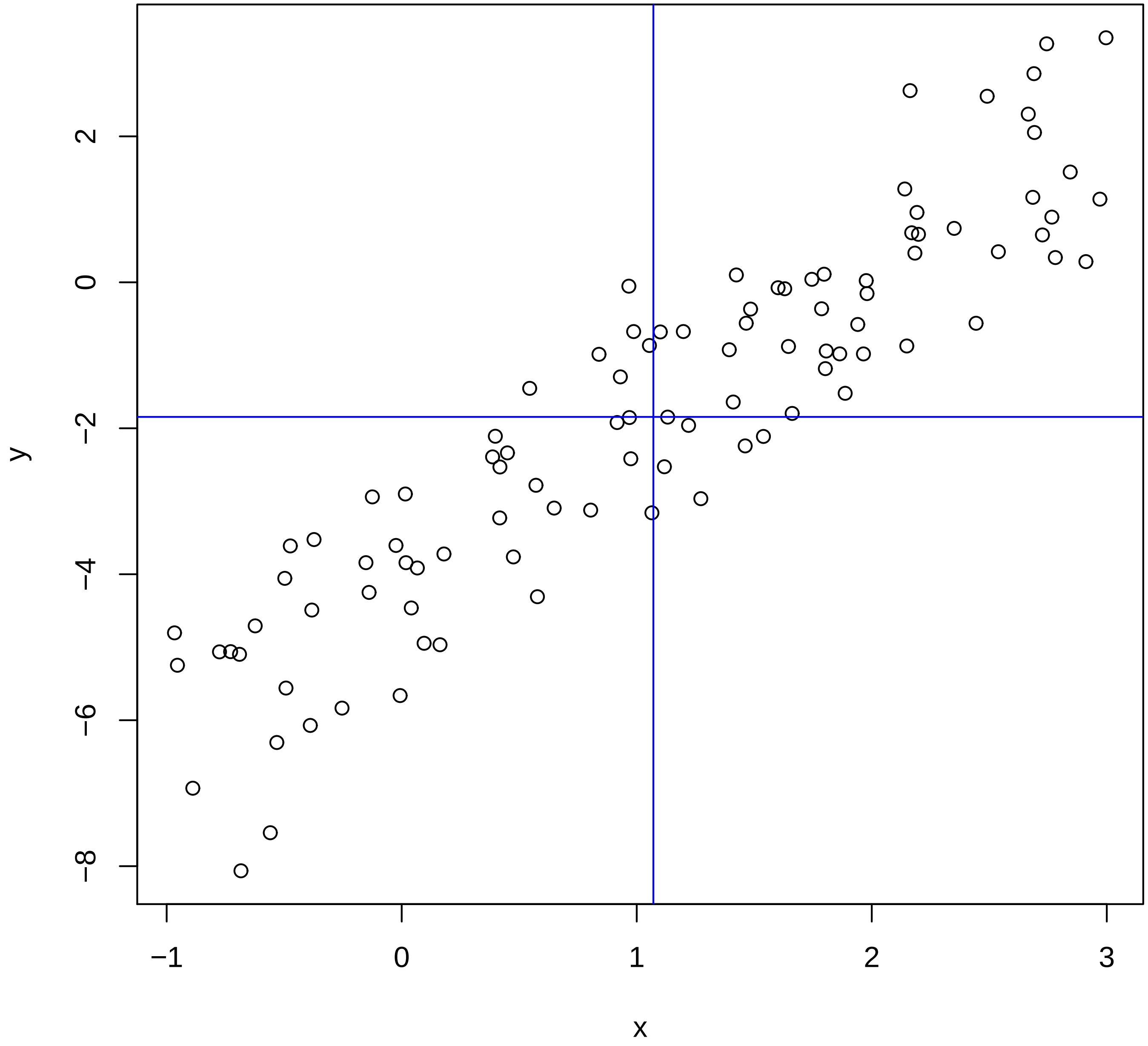
  - Cuando hay una alta probabilidad de que valores grandes de X estén asociados con valores grandes de Y, y los valores pequeños de X vayan asociados a valores pequeños de Y, la covarianza será **positiva**.

  - Por el contrario, si existe una alta probabilidad de que valores grandes de X se encuentren asociados a valores pequeños de Y y viceversa, la covarianza será **negativa**.

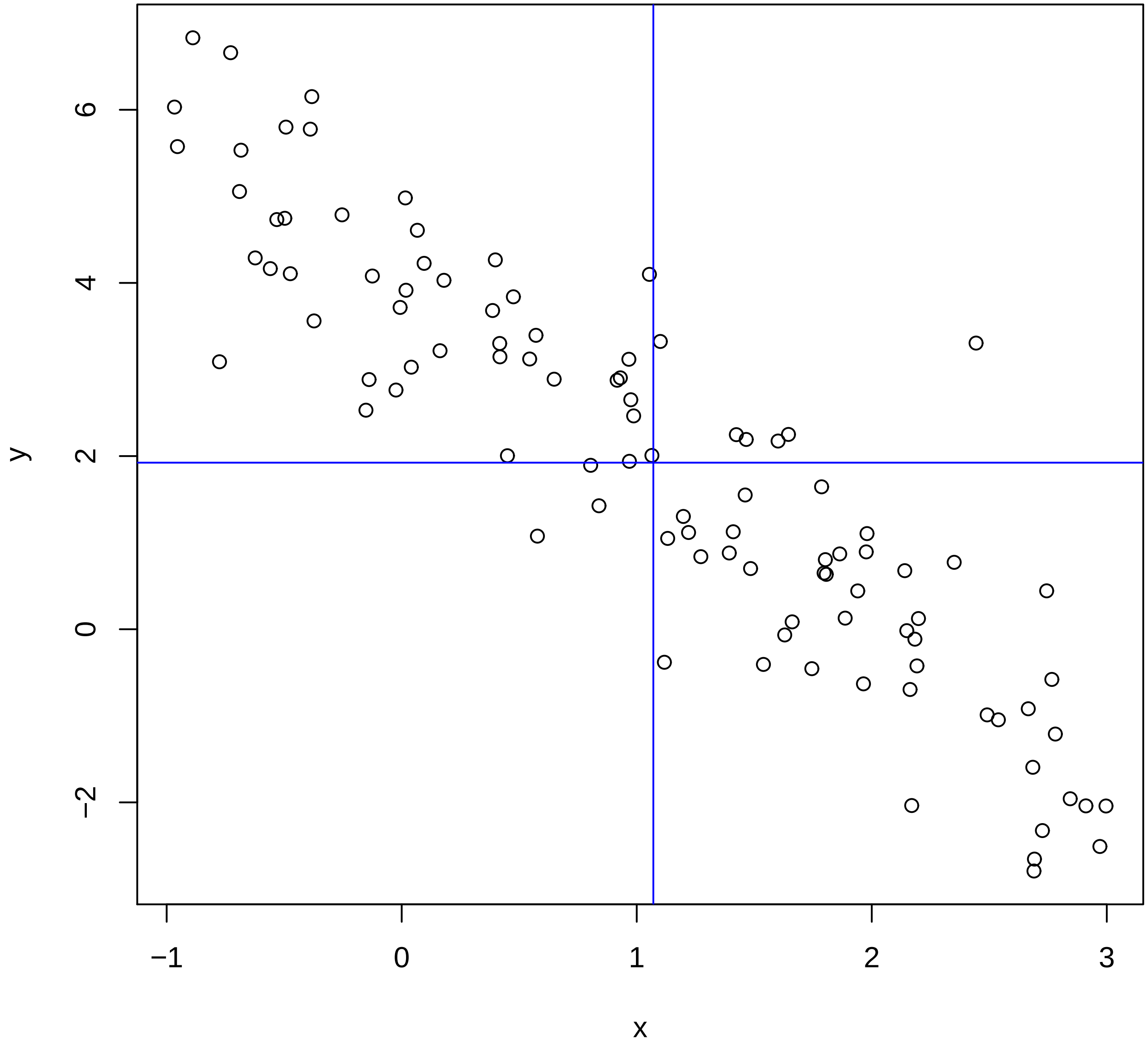
  - Cuando no existe **ninguna relación de tipo lineal** entre las variables X e Y, la covarianza entre ellas es 0, esto es, X e Y son variables **incorrelacionadas**:

- Es importante señalar que la covarianza tiene en cuenta **sólo las relaciones lineales**, por lo que dos variables aleatorias incorrelacionadas pueden estar relacionadas mediante otro tipo de función (exponencial, cuadrática, logarímica, sinusoidal, etc)

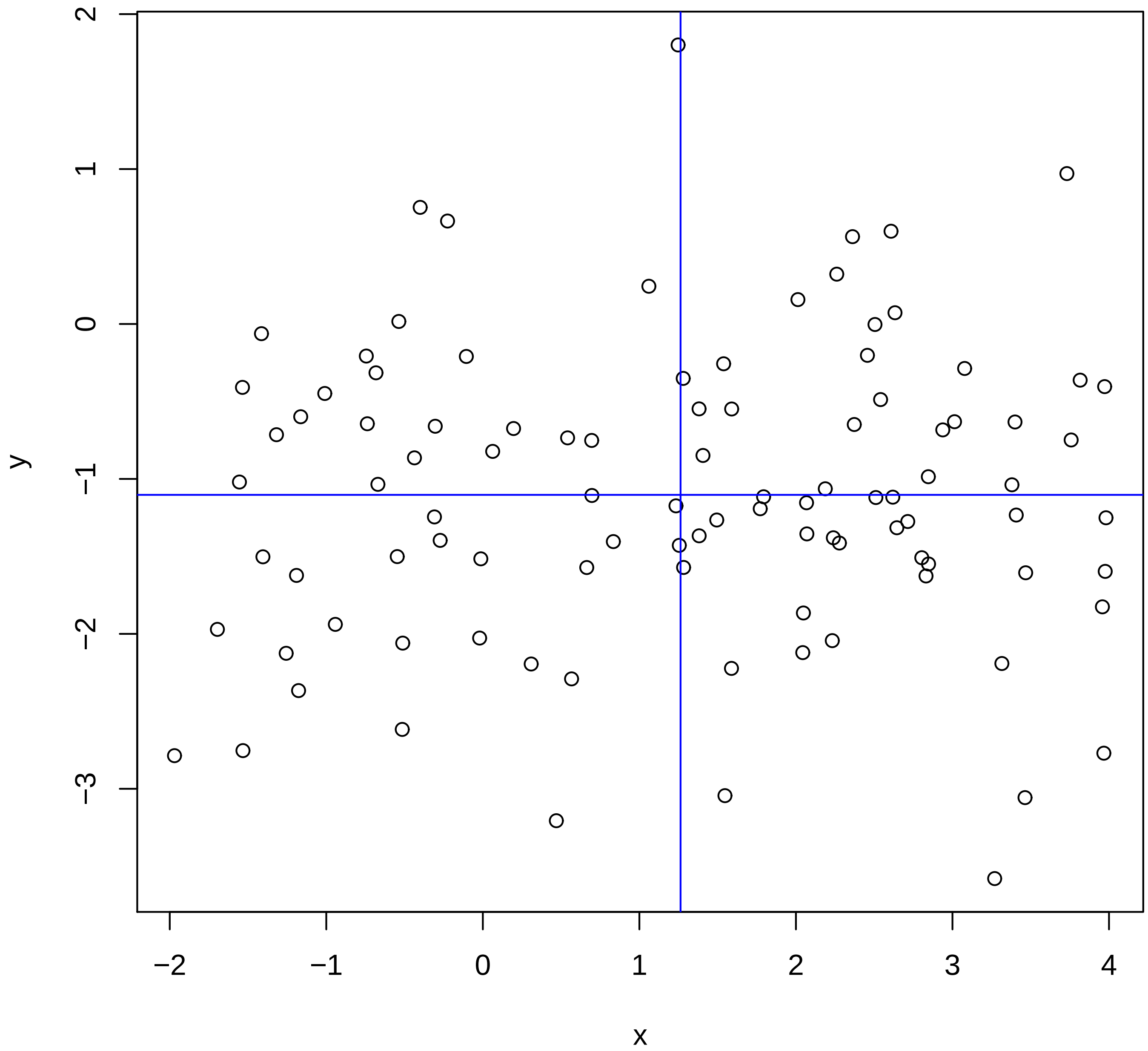
Relación lineal positiva



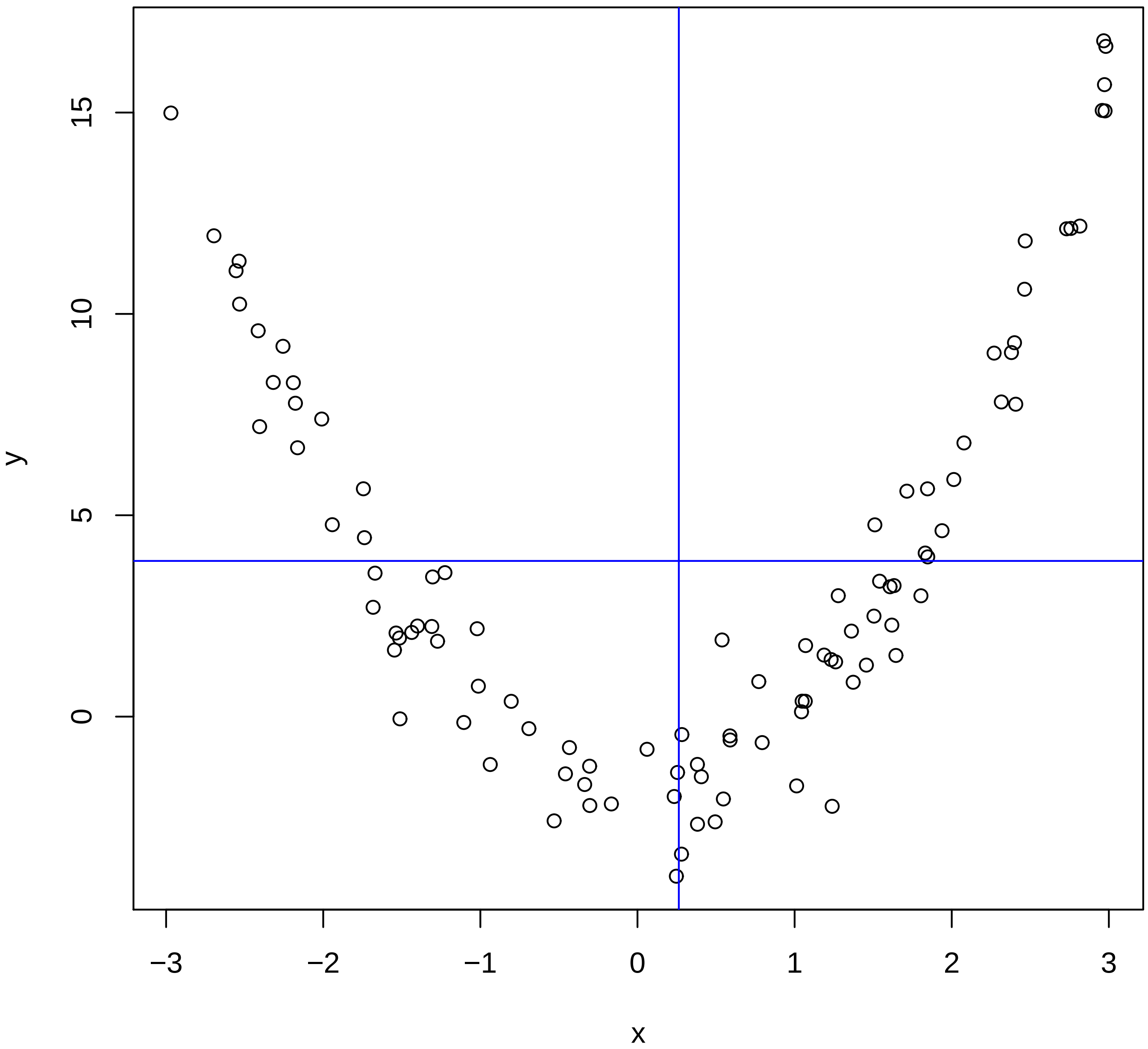
Relación lineal negativa



Ausencia de relación



Relación no lineal



Covarianza de variables independientes

- **Proposición 8:** Si X e Y son **variables aleatorias independendientes**, entonces se verifica

$$E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)$$

y en consecuencia

$$Cov\,(X, Y) = 0$$

demostración:.........pizarra (caso discreto)

- Por tanto, **las variables aleatorias independientes son siempre variables incorrelacionadas**.

Ejemplo: covarianza de variables independientes

- La función de masa conjunta de las variables aleatorias X e Y es la que aparece en la siguiente tabla:

Y \ X	0	1	2
1	0.15	0.09	0.01
5	0.45	0.27	0.03

- **X e Y son variables aleatorias independientes**, ya que

$$P(X = m, Y = n) = P(X = m) \times P(Y = n) \quad \forall x \in \{0, 1, 2\} \ \forall y \in \{1, 5\}.$$

- Por tanto, X e Y tienen que ser necesariamente variables **incorrelacionadas**, es decir, **su covarianza debe ser nula**. Para comprobar que esto es efectivamente así basta observar que

$$E(X) = 0.44; \quad E(Y) = 4; \quad E(X \times Y) = 1.76,$$

y en consecuencia

$$Cov\,(X, Y) = E\,[X \times Y] - E\,[X] \times E\,[Y] = 1.76 - 0.44 \times 4 = \mathbf{0}.$$

Ejemplo: incorrelación e independencia

- La función de masa conjunta de las variables aleatorias A e B es la que aparece en la siguiente tabla:

		A		
		-1	0	1
B	0	0.1	0.1	0.1
	10	0.2	0.3	0.2

- A y B **son variables aleatorias incorrelacionadas,** ya que

$$E(A) = 0; \quad E(B) = 7; \quad E(A \times B) = 0,$$

y por consiguiente

$$Cov\,(A, B) = E\,[A \times B] - E\,[A] \times E\,[B] = 0 - 0 \times 7 = \mathbf{0}.$$

- Sin embargo, **las variables A y B no son independientes**, ya que, por ejemplo

$$0.1 = P(A = -1, B = 0) \neq P(A = -1) \times P(B = 0) = 0.3 \times 0.3 = 0.09$$

Incorrelación e independencia de variables aleatorias

- Hemos visto que las variables aleatorias independientes son siempre variables incorrelacionadas.
- El ejemplo anterior ilustra el hecho de que, el recíproco de esta afirmación no es cierto, ya que **dos variables aleatorias pueden tener covarianza cero y ser dependientes**.
- Es decir **la incorrelación no implica independencia.**
- Esto es debido a que covarianza entre X e Y lo que mide es la **codependencia lineal** entre dos variables aleatorias.
- Pero, evidentemente, dos variables pueden depender la una de la otra mediante otro tipo de relación.
- Sin embargo, y como ya veremos, en el caso concreto de las **distribuciones normales** o gaussianas, **independencia e incorrelación sí son equivalentes**.

Limitaciones de la covarianza

- La covarianza es una medida de la variabilidad conjunta de dos variables X e Y que tiene en cuenta sólo co-dependencias de tipo lineal.
- Además, la covarianza entre dos variables varía si cambiamos las unidades en las que medimos alguna de ellas.
- Por ejemplo, si la variable aleatoria X está está expresada en gramos, su covarianza con cualquier otra variable Y será 1000 veces mayor que la covarianza entre esa misma variable X expresada en kilos, e Y.
- Por tanto, **tiene sentido fijarse en el signo de la covarianza, pero su valor absoluto no resulta de utilidad**.

Matriz de varianzas-covarianzas

y vector de medias

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Matriz de varianzas y covarianzas

- Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ un **vector aleatorio** $n-$ **dimensional**.
- La **matriz de varianzas y covarianzas** de $\mathbf{X}$ es la matriz cuadrada

$$\Sigma_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} V(X_1) & Cov(X_1, X_2) & \ldots & Cov(X_1, X_n) \\ Cov(X_2, X_1) & V(X_2) & \ldots & Cov(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Cov(X_n, X_1) & Cov(X_n, X_1) & \ldots & V(X_n) \end{pmatrix}$$

- Puesto que

  $$Cov\,(X, Y) = E\,[XY] - E\,[X]\,E\,[Y] = E\,[YX] - E\,[Y]\,E\,[X] = Cov\,(Y, X)\,,$$

  es evidente que la matriz de covarianzas $\Sigma_{\mathbf{X}}$ es una **matriz simétrica**, es decir, verifica $\Sigma_{\mathbf{X}}' = \Sigma_{\mathbf{X}}$

- Además puede demostrarse que la matriz de varianzas y covarianzas de cualquier vector aleatorio es **semidefinida positiva.**

M. de varianzas y covarianzas: caso bivariante

- Para **variable aleatoria bidimensional**,

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

la **matriz de varianzas y covarianzas** es

$$\Sigma_{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} V(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(X,Y) & V(Y) \end{pmatrix}$$

Vector de medias

- Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ un **vector aleatorio** $n-$**dimensional**.
- El **vector de medias** de $\mathbf{X}$ es

$$\mu_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

- En particular, para **variable aleatoria bidimensional**,

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

el vector de medias es

$$\mu_{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} E(X) \\ E(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}.$$

Ejemplo: vector de medias y matriz de covarianzas

- Para las variables aleatorias X_1 (número de abonos químicos) y X_2 (número de abonos orgánicos) de los ejemplos anteriores teníamos

$$\begin{aligned} E(X_1) = 0.8, &\qquad V(X_1) = 0.36, \\ E(X_2) = 0.4, &\qquad V(X_2) = 0.24, \\ Cov(X_1, X_2) &= -0.12. \end{aligned}$$

- Por tanto, el vector de medias y la matriz de varianzas y covarianzas del vector (X_1, X_2) son, respectivamente

$$\mu_{(X_1,X_2)} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.4 \end{pmatrix},$$

y

$$\mathbf{\Sigma}_{(\mathbf{X_1},\mathbf{X_2})} = \begin{pmatrix} 0.36 & -0.12 \\ -0.12 & 0.24 \end{pmatrix}$$

Coeficiente de correlación

entre variables aleatorias

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Correlación entre dos variables aleatorias

- Se define el **coeficiente de correlación** entre dos variables aleatorias, X y Y, como

$$\rho_{X,Y} = \frac{Cov\,(X,Y)}{\sqrt{V(X) \times V(Y)}} = \frac{Cov\,(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

- Evidentemente, el coeficiente de correlación siempre conserva el **signo de la covarianza**, por lo que

  - Cuando hay una alta probabilidad de que valores grandes de X estén asociados con valores grandes de Y, y los valores pequeños de X estén asociados con valores pequeños de Y, $\rho_{X,Y}$ será **positivo**.
  - Cuando existe una alta probabilidad de que valores grandes de X se encuentren asociados a valores pequeños de Y y viceversa, $\rho_{X,Y}$ será **negativo**.

- Pero además, puede demostrarse que **el coeficiente de correlación** entre dos variables aleatorias **siempre toma valores entre -1 y 1**, es decir, $-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$, para cualquier par de variables X e Y.

Interpretación del coeficiente de correlación

- Esto permite **evaluar el grado de dependencia lineal** entre dos variables aleatorias.

  - Si $\rho_{X,Y} = 0$, es decir, si X e Y son **incorrelacionadas**, no existe ninguna dependencia lineal entre ellas.
  - Si $\rho_{X,Y} = 1$, X es una función lineal de Y con pendiente positiva.
  - Si $\rho_{X,Y} = -1$, X es una función lineal de Y con pendiente negativa.
  - Si $\rho_{X,Y}$ **toma un valor próximo a 1**, X e Y tienen una fuerte dependencia lineal de tipo positivo.
  - Si $\rho_{X,Y}$ **toma un valor próximo a -1**, X e Y tienen una fuerte dependencia lineal de tipo negativo.
  - Si $\rho_{X,Y}$ **toma un valor próximo a 0**, la dependencia lineal entre X e Y es leve.

Ejemplo: coeficiente de correlación

- Para las variables aleatorias X_1 (número de abonos químicos) y X_2 (número de abonos orgánicos) de los ejemplos anteriores hemos visto que la matriz de varianzas y covarianzas del vector (X_1, X_2) es

$$\mathbf{\Sigma_{(X_1,X_2)}} = \begin{pmatrix} 0.36 & -0.12 \\ -0.12 & 0.24 \end{pmatrix}$$

- Por tanto su coeficiente de correlación es

$$\rho_{X_1,X_2} = \frac{Cov\,(X_1, XX_2)}{\sqrt{V(X_1) \times V(X_2)}} = \frac{-0.12}{\sqrt{0.36 \times 0.24}} = \mathbf{-0.4082}.$$

- Este valor del coeficiente de correlación indica que existe cierta relación lineal negativa entre ambas variables, aunque no muy fuerte.

M. de varianzas y covarianzas: caso bivariante

- Para **variable aleatoria bidimensional**,

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

la **matriz de varianzas y covarianzas** es

$$\Sigma_{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} V(X) & Cov(X,Y) \\ \\ Cov(X,Y) & V(Y) \end{pmatrix}$$

- Observemos que $\Sigma_{\mathbf{Z}}$ puede expresarse también de la forma siguiente

$$\Sigma_{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{X,Y} \\ \\ \sigma_{X,Y} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_X \times \sigma_Y \times \rho_{X,Y} \\ \\ \sigma_x \times \sigma_Y \times \rho_{X,Y} & \sigma_X^2 \end{pmatrix},$$

donde $\sigma_X^2 = V(X)$, $\sigma_Y^2 = V(Y)$, $\sigma_{X,Y} = Cov(X,Y)$, y

$$\rho_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,Y}}{\sigma_X \times \sigma_Y}.$$

Ejercicio 4 (continuación)

- La junta de una comunidad vecinal está formada por 10 vecinos: uno del primer piso, tres del segundo, dos del tercero, tres del cuarto y uno del quinto. De los 10 miembros de la junta se selecciona al azar una comisión de dos personas.

  Se desea conocer la representación que tienen en esta junta los vecinos de los dos pisos más bajos. Sea P el número de vecinos del primer piso en la comisión y S el número de vecinos del segundo.

  1. Hallar la función de masa conjunta del vector (P, S).
  2. Encontrar las distribuciones marginales de P y S.
  3. Calcular $E(P)$, $E(P|S=0)$, $E(P|S=1)$ y $E(P|S=2)$.
  4. Determinar si las variables P y S son independientes.
  5. Calcular el coeficiente de correlación entre P y S.

  resolución:.........pizarra

Solución a (parte del) Ejercicio 4:

3.

$$\begin{aligned} E(P) &= \frac{3}{15} = 0.2, \\ E(P|S=0) &= \frac{2}{7}, \\ E(P|S=1) &= \frac{1}{7}, \\ E(P|S=2) &= 0. \end{aligned}$$

5.

$$\rho_{(P,S)} = -0.2181$$

Vectores aleatorios continuos

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Vectores aleatorios continuos

- **Definición**: Se dice que un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es **continuo** si para cada componente $i = 1, 2, \ldots, n$, X_i es una variable aleatoria continua.

Vectores aleatorios continuos bivariantes

- La distribución de probabilidades de un vector aleatorio bivariante continuo, (X_1, X_2), viene determinada por una **función de densidad conjunta**, $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$, que satisface

$$1.- \qquad f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \geq 0 \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

y

$$2.- \qquad \int_{S_{X_2}} \int_{S_{X_1}} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = 1.$$

- La probabilidad de que el vector aleatorio tome valores en un determinado conjunto se calcula integrando esta función de densidad en dicho conjunto:

$$P\left(a_1 \leq X_1 \leq b_1, a_2 \leq X_2 \leq b_2\right) = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2.$$

Ejemplo: vectores aleatorios continuos bivariantes

- La cantidad de dos elementos en cierto tipo de mineral (X_1, X_2) viene dada por la función de densidad

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 6e^{-2x_1}e^{-3x_2} & \text{si } x_1 > 0, x_2 > 0 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

1. Comprobar que esta función bivariante es en efecto una función de densidad conjunta.

2. Calcular las probabilidades,

$$P\left(1 \leq X_1 \leq 2, 2 \leq X_2 \leq 3\right)$$

   y

$$P\left(0 \leq X_1 \leq 2, 2 \leq X_2 \leq \infty\right)$$

Solución al ejemplo sobre vectores continuos

1. Es claro que $f(x_1, x_2) \geq 0$ para todos los valores de x_1 y x_2.

   Además
   $$\int_{S_{X_2}} \int_{S_{X_1}} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\, dx_2 dx_1 = \int_0^\infty \int_0^\infty 6e^{-2x_1} e^{-3x_2} dx_2 dx_1 = 1$$

   Por tanto $f(x_1, x_2)$ es una función de densidad.

2. $$\begin{aligned} P(1 \leq X_1 \leq 2, 2 \leq X_2 \leq 3) &= \int_2^3 \int_1^2 6e^{-2x_1} e^{-3x_2} dx_1 dx_2 \\ &= \left(e^{-4} - e^{-2}\right)\left(e^{-9} - e^{-6}\right) = \mathbf{0.0003}, \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} P(0 \leq X_1 \leq 2, 2 \leq X_2 \leq \infty) &= \int_0^2 \int_2^\infty 6e^{-2x_1} e^{-3x_2} dx_2 dx_1 \\ &= \left(1 - e^{-4}\right) e^{-6} = \mathbf{0.0024}. \end{aligned}$$

Funciones de densidad marginales

- Sea (X_1, X_2) un vector aleatorio continuo. La **función de densidad marginal** de X_1 viene dada por

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{S_{X_2}} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\, dx_2,$$

- De forma análoga, la función de densidad marginal de X_2 viene dada por

$$f_{X_2}(x_2) = \int_{S_{X_1}} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\, dx_1.$$

- A partir de estas densidades marginales se pueden calcular la esperanza, varianza, etc, de cada una de las variables aleatorias consideradas individualmente.

Ejemplo: funciones de densidad marginales

- En el caso de los dos elementos del mineral, la función de densidad marginal de X_1 es

$$f_{X_1}(x_1) = \int_0^\infty f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\,dx_2 = \begin{cases} 0 & \text{para } x_1 \leq 0, \\ 2e^{-2x_1} & \text{para } x_1 > 0, \end{cases}$$

- La densidad marginal de X_2 es

$$f_{X_2}(x_2) = \int_0^\infty f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\,dx_1 = \begin{cases} 0 & \text{para } x_2 \leq 0 \\ 3e^{-3x_1} & \text{para } x_2 > 0 \end{cases}$$

- Por consiguiente,

$$E(X_1) = \int_0^\infty 2xe^{-2x}dx = \frac{1}{2}, \qquad V(X_1) = \frac{1}{4}$$

y

$$E(X_2) = \int_0^\infty 3xe^{-3x}dx = \frac{1}{3}, \qquad V(X_2) = \frac{1}{9}$$

Otro ejemplo: funciones de densidad marginales

- Se desea analizar la proporción (o tanto por uno) que presentan los desechos orgánicos (X) y los microorganismos patógenos (Y) en el agua de cierta región. Su función de densidad bivariante es

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}(x+2y) & \text{para } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

  Queremos saber cuál es la **proporción esperada de cada una de las sustancias contaminantes por separado.**

- La función de densidad marginal de X es

$$f_X(x) = f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin (0,1) \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)\,dy & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin (0,1) \\ \dfrac{2}{3}(x+1) & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Otro ejemplo: densidades marginales (continuación)

- Por tanto, la proporción esperada de desechos orgánicos en el agua es

$$E(X) = \int_0^1 x\,\frac{2}{3}(x+1)\,dx = \int_0^1 \frac{2}{3}\left(x^2+x\right)dx = \mathbf{\frac{5}{9}}$$

- Por otra parte, la función de densidad marginal de Y es

$$f_Y(y) = f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin (0,1) \\ \int_0^1 \frac{2}{3}(x+2y)\,dx & \text{si } 0 < y < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin (0,1) \\ \frac{1}{3}(1+4y) & \text{si } 0 < y < 1 \end{cases}$$

- Luego la proporción esperada de micoorganismos patógenos es

$$E(Y) = \int_0^1 x\,\frac{1}{3}(1+4x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{3}\left(x+4x^2\right)dx = \mathbf{\frac{11}{18}}$$

Funciones de densidad condicionadas

- Al igual que ocurre en el caso discreto, cuando se sabe que una variable ha tomado un determinado valor, la distribución de probabilidades de la otra variable aleatoria puede verse modificada.

- La función de densidad de X_1 **condicionada** por la ocurrencia del suceso $X_2 = x_2$ ($X_1|X_2 = x_2$) es

  $$f_{X_1}(x_1|X_2 = x_2) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}.$$

  Esta función de densidad tiene sentido si (y sólo si) $x_2 \in S_{X_2}$.

- De igual forma, para $x_1 \in S_{X_1}$, podemos considerar la función de densidad de X_2 condicionada por el suceso $X_1 = x_1$ ($X_2|X_1 = x_1$):

  $$f_{X_2}(x_2|X_1 = x_1) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)}.$$

Ejemplo: funciones densidad condicionadas

- En el caso de los dos elementos del mineral, la función de densidad de X_1 condicionada por que ha ocurrido $X_2 = x_2$ (con $x_2 > 0$) es

$$f_{X_1}(x_1|X_2 = x_2) = \begin{cases} \dfrac{6e^{-2x_1}e^{-3x_2}}{3e^{-3x_2}} & \text{si } x_1 > 0, \\ 0 & \text{si } x_1 \le 0 \end{cases} = \begin{cases} 2e^{-2x_1} & \text{si } x_1 > 0, \\ 0 & \text{si } x_1 \le 0 \end{cases}$$

- Observamos que en este caso se verifica $f_{X_1}(x_1|X_2 = x_2) = f_{X_1}(x_1)$ para todo x_2, es decir, que las funciones de densidad condicionadas por cualquier valor de X_2 coinciden con la marginal.

- De forma similar se comprueba que, si $x_1 > 0$,

$$f_{X_2}(x_2|X_1 = x_1) = \begin{cases} 3e^{-3x_2} & \text{si } x_2 > 0, \\ 0 & \text{si } x_2 \le 0 \end{cases}$$

- Como puede verse, también se verifica $f_{X_2}(x_2|X_1 = x_1) = f_{X_2}(x_2)$ para todo x_1.

Otro ejemplo: funciones densidad condicionadas

- En el ejemplo de los contaminantes del agua, supongamos que sabemos que la proporción de sustancias radioctivas es $Y = 0.25$ y queremos saber cómo se distribuye la probabilidad para la variable X (proporción de microorganismos patógenos)

- La densidad de X condicionada a $Y = y$ (con $y \in (0,1)$) es

$$f\left(x|Y=y\right) = \begin{cases} \dfrac{\frac{2}{3}\left(x+2y\right)}{\frac{1}{3}\left(x+4y\right)} & \text{si } 0 < x < 1, \\ \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2x+4y}{1+4y} & \text{si } 0 < x < 1, \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- En particular, la densidad de X condicionada por $Y = 0.25$ es

$$f_X\left(x|Y=0.25\right) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{1} & \text{si } 0 < x < 1, \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Nótese que, en este caso, $f_X\left(x|Y=0.25\right) \neq f_X(x)$.

Independencia de variables aleatorias continuas

- Recordemos que dos variables aleatorias X e Y son **independientes** si para cualquier par de conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ se verifica

$$P\left(X \in A, Y \in B\right) = P\left(X \in A\right) \times P\left(Y \in B\right).$$

- Puede demostrarse que, en el caso de variables aleatorias continuas esto es equivalente a que para todos los valores del soporte se verifique

$$f_{X,Y}\left(x,y\right) = f_X\left(x\right) \times f_Y\left(y\right) \qquad \forall\, x \in S_X,\ \forall y \in S_Y.$$

es decir, que **la función de densidad conjunta sea el producto de las funciones de densidad marginales.**

Ejemplo: v. al. continuas independientes

- En el caso de los dos elementos del mineral, las variables X_1 yX_2 **son independientes**, ya que se verifica

  $$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = 6e^{-2x_1}e^{-3x_2} = 2e^{-2x_1} \times 3e^{-3x_1} = f_{X_1}(x_1) \times f_{X_2}(x_2)\,,$$

  para todo $x_1 \in S_{X_1}$, $x_2 \in S_{X_2}$.

- Esto explica por qué en este ejemplo las distribuciones condicionadas coinciden con las marginales.

Ejemplo: v. al. continuas dependientes

- En el caso de los dos contaminantes del agua, las variables X e Y **no son independientes**, ya que, por ejemplo,

$$f_{X,Y}(0.5, 0.25) = \frac{1}{3} \neq 1 \times \frac{2}{3} = f_X(0.5) \times f_Y(0.25).$$

- Nótese que esto también podía haberse deducido directamente del hecho de que

$$f_X\left(x|Y = 0.25\right) \neq f_X(x).$$

Vectores aleatorios continuos de dimensión n

- Los conceptos y resultados que hemos analizado para el caso bivariante ($n = 2$), se pueden extender al caso n variante, es decir, a n **variables continuas**, $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

- La **función de densidad conjunta** verificará

1.– $$f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0 \quad \forall\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R},$$

2.– $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n = 1.$$

- La **distribución marginal** de X_k viene dada por

$$f_{X_k}(x_k) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_{k-1} dx_{k+1} \ldots dx_n$$

Distribución normal multivariante

URJC

Sonia Hernández Alonso
Probabilidad-Grado en Matemáticas (URJC)

Distribuciones gaussianas multivariantes

- Sean $\mu \in \mathbb{R}^n$ un vector n-dimensional y $\mathbf{\Sigma}$ una matriz cuadrada de orden n simétrica y semidefinida positiva.

- Se dice que el vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)'$ sigue una **distribución normal n-variante con vector de medias μ y matriz de covarianzas Σ** si su función de densidad es

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\mathbf{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\mu)\right\},$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$.

- Esto se denota como

$$\mathbf{X} \sim N_n(\mu, \mathbf{\Sigma}).$$

Distribuciones gaussianas bivariantes

- Consideremos ahora el caso particular $n = 2$, es decir, el de distribuciones gaussianas bivariantes. Sea $\mathbf{Z} = (X, Y)'$ un vector normal,

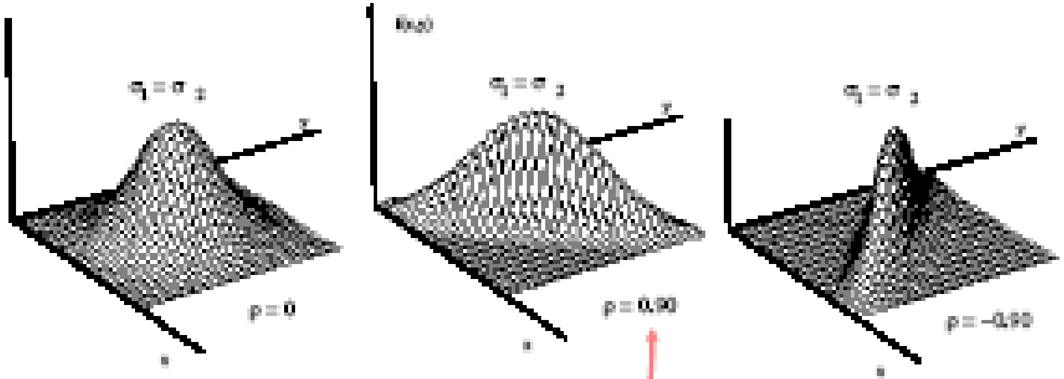
$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_2\left(\mu_{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_X \times \sigma_Y \times \rho_{X,Y} \\ \sigma_X \times \sigma_Y \times \rho_{X,Y} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}\right)$$

- La función de densidad bivariante de $\mathbf{Z}$, puede expresarse como

$$f_{\mathbf{Z}}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{X,Y}^2}} \times$$
$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{X,Y}^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - 2\rho_{X,Y}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)\right]\right\}$$

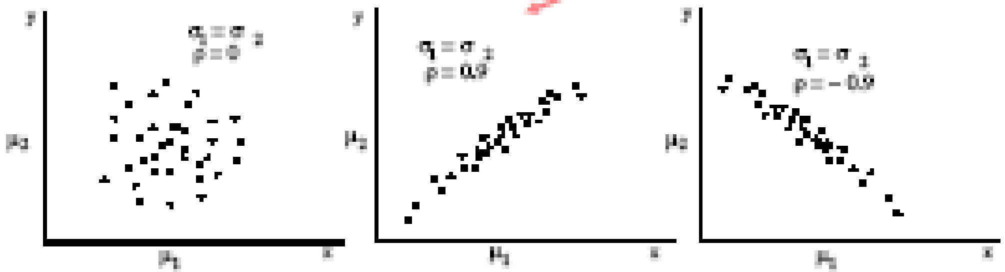
para todo $\mathbf{z} = (x, y)' \in \mathbb{R}^2$,

Gráficos de distribuciones gaussianas bivariantes



Función de densidad

Diagrama de dispersión



Transformaciones lineales de normales

- Sea $\mathbf{X}$ un vector aleatorio con **distribución gaussiana**,

$$\mathbf{X} \sim N_n(\mu, \mathbf{\Sigma}),$$

  y sea A cualquier matriz de dimensión $p \times n$ con $p \leq n$.

- Consideremos el vector aleatorio

$$\mathbf{Y} = A\mathbf{X}.$$

- Puede probarse que **la distribución de $\mathbf{Y}$ también es gaussiana.**
- Es decir, **al aplicar cualquier transformación a una distribución lineal, la variable resultante es también normal.**
- Más concretamente

$$\mathbf{Y} = A\mathbf{X} = N_p(A\mu, A\mathbf{\Sigma}A^t).$$

Ejemplo: transformaciones lineales de normales

- **Ejercicio 8:** Consideremos el vector aleatorio

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

A partir de este vector definimos las variables

$$T = X + Y$$

$$Z = X - 2Y,$$

Determinar la distribución del vector aleatorio $(T, Z)^t$.

resolución:.........pizarra

Solución al Ejercicio 8

- **Solución:**

$$\begin{pmatrix} T \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \right)$$

Ejercicio 9: transformaciones lineales de normales

- Consideremos el vector aleatorio tridimensional

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \sim N_3\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

A partir de este vector definimos las variables

$$C = -2X + 3Z$$

$$D = X + Y - Z,$$

Determinar la distribución del vector aleatorio $(C, D)^t$.

resolución:.........pizarra

(Ejercicio incluído en la Hoja de Problemas de Repaso 2)

Independencia de variables gaussianas

- En el caso de **distribuciones normales, independencia e incorrelación son equivalentes**.

- Es decir, si X e Y son variables gaussianas, entonces serán independientes si y sólo si su **matriz de varianzas y covarianzas es una matriz diagonal**, esto es, de la forma

$$\Sigma_{\mathbf{X},\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

  con $a \geq 0$, $b \geq 0$.

- Recordemos que las **variables independientes siempre son incorrelacionadas**, pero que el recíproco, en general, no es cierto.

- Sin embargo, para variables gaussianas, la incorrelación garantiza la independencia.

Ejemplo: independencia de variables normales

- **Ejercicio 10:** Consideremos el vector aleatorio

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

A partir de este vector definimos $T = X + Y$ y $Z = X - 2Y$.

¿Son las variables aleatorias X e Y independientes?

¿Lo son las variables Z y T?

resolución:.........pizarra

Solución al Ejercicio 10:

- Las variables X **e** Y **sí son independientes,** ya que

$$Cov(X, Y) = 0,$$

y para distribuciones gaussianas, la incorrelación garantiza independencia.

Por otra parte, hemos visto que

$$\begin{pmatrix} T \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \right)$$

Puesto que

$$Cov(Z, T) = -1 \neq 0,$$

las variables Z **y** T **no son independientes**.

Ejercicio 9 (continuación)

- Consideremos el vector aleatorio tridimensional

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \sim N_3 \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

A partir de este vector definimos las variables

$$C = -2X + 3Z$$

$$D = X + Y - Z,$$

Determinar si las variables C y D son o no son independientes.

resolución:.........pizarra

(Ejercicio incluído en la Hoja de Problemas de Repaso 2)