Tema 4. Análisis de Fourier de señales y sistemas de tiempo discreto.

2015-2016

Índice

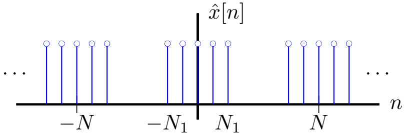
Índice

Análisis de Fourier de señales no periódicas

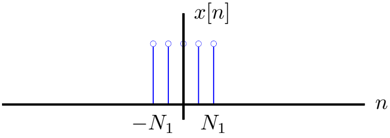
Señal aperiodica (no periódica)

Se puede considerar que una señal aperiodica es una señal periódica con periodo infinito $\Rightarrow$ el desarrollo en serie de Fourier de señales periódicas puede generalizarse al caso no periódico.

Periódica



Aperiódica

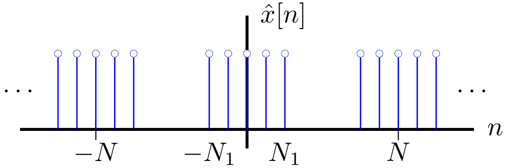


Análisis de Fourier de señales no periódicas

Ejemplo del tren de pulsos rectangulares

$$Na_k = \begin{cases} \frac{\sin\left(k\Omega_0 (N_1 + \frac{1}{2})\right)}{\sin\left(k\frac{\Omega_0}{2}\right)}, & k \neq \dot{0, N} \\ 2N_1 + 1, & k = \dot{0, N} \end{cases}$$

N es el periodo y $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ es la pulsación fundamental.



En el límite en el cual $N \to \infty$ los pulsos estarán tan separados que la señal dejará de ser periódica.

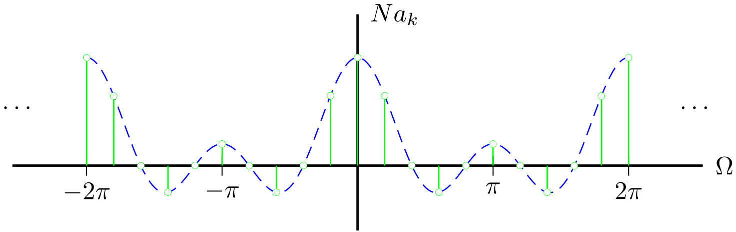
Análisis de Fourier de señales no periódicas

Si representamos:

$$Na_k = \begin{cases} \frac{\sin\left(k\Omega_0(N_1+\frac{1}{2})\right)}{\sin\left(k\frac{\Omega_0}{2}\right)}, & k \neq 0, \dot{N} \\ 2N_1+1, & k = 0, \dot{N} \end{cases}$$

para distintos valores de N veremos el efecto producido al separar cada vez más los pulsos.

$$N = 10, \;\; 2N_1 + 1 = 5$$



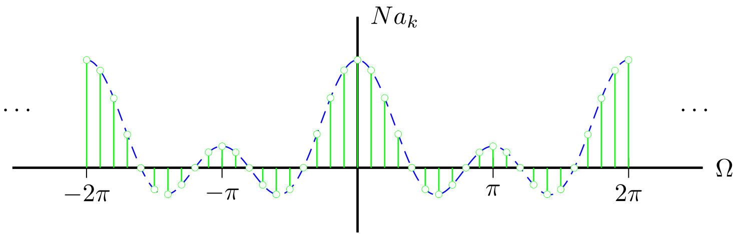
Análisis de Fourier de señales no periódicas

Si representamos:

$$Na_k = \begin{cases} \frac{\sin\left(k\Omega_0(N_1+\frac{1}{2})\right)}{\sin\left(k\frac{\Omega_0}{2}\right)}, & k \neq 0, \dot{N} \\ 2N_1+1, & k = 0, \dot{N} \end{cases}$$

para distintos valores de N veremos el efecto producido al separar cada vez más los pulsos.

$$N = 20, \;\; 2N_1 + 1 = 5$$



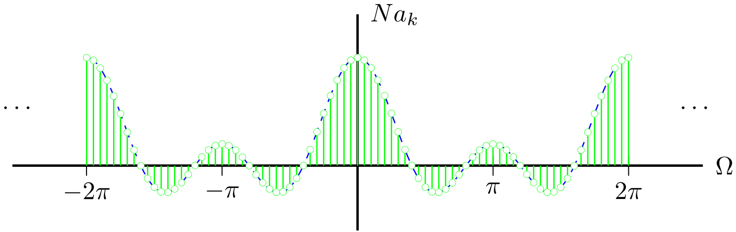
Análisis de Fourier de señales no periódicas

Si representamos:

$$Na_k = \begin{cases} \frac{\sin\left(k\Omega_0(N_1+\frac{1}{2})\right)}{\sin\left(k\frac{\Omega_0}{2}\right)}, & k \neq 0, \dot{N} \\ 2N_1+1, & k = 0, \dot{N} \end{cases}$$

para distintos valores de N veremos el efecto producido al separar cada vez más los pulsos.

$$N = 40, \;\; 2N_1+1 = 5$$



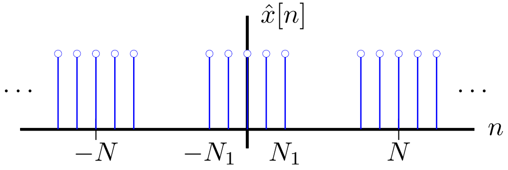
Análisis de Fourier de señales no periódicas

Conclusiones

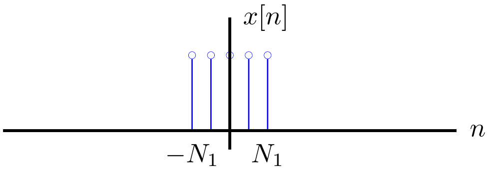
- La envolvente no depende del valor de N.
- El aumento de N solo afecta al espaciado entre armónicos.
- En el límite $N \to \infty$ el espectro es la envolvente y la señal pierde la periodicidad.

Transformada de Fourier

Consideremos una señal cualquiera periódica, $\hat{x}[n]$:



A partir de ella consideramos la versión aperiodica cuando $N = \infty$:



Definición de la transformada de Fourier

Señal periódica

La señal $\hat{x}[n]$ se puede desarrollar en serie de Fourier:

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \hat{x}[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

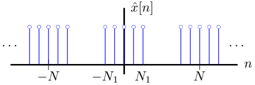
Señal aperiódica

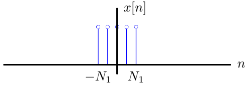
La señal $x[n]$ se puede expresar en términos de la transformada de Fourier:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

Relación entre DSF y TF





Consideración

Teniendo en cuenta que $x[n] = \hat{x}[n]$ para $|n| \leq N_1$ y que $x[n] = 0$ fuera de ese intervalo, tendremos:

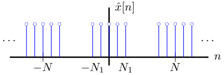
$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{N=-N_1}^{N_1} \hat{x}[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{N=-N_1}^{N_1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} =$$

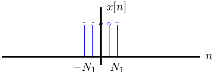
$$= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

Teniendo en cuenta la transformada de $x[n]$:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

Relación entre DSF y TF





Consideración

Teniendo en cuenta que $x[n] = \hat{x}[n]$ para $|n| \leq N_1$ y que $x[n] = 0$ fuera de ese intervalo, tendremos:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{N=-N_1}^{N_1} \hat{x}[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{N=-N_1}^{N_1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

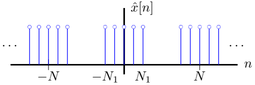
Teniendo en cuenta la transformada de $x[n]$:

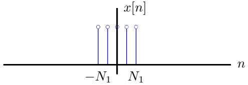
$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

los a_k de la versión periódica se pueden expresar:

$$a_k = \frac{1}{N} X(k\Omega_0)$$

Relación entre DSF y TF





Consideración

Teniendo en cuenta que $x[n] = \hat{x}[n]$ para $|n| \leq N_1$ y que $x[n] = 0$ fuera de ese intervalo, tendremos:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{N=-N_1}^{N_1} \hat{x}[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{N=-N_1}^{N_1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

los a_k de la versión periódica se pueden expresar:

$$a_k = \frac{1}{N} X(k\Omega_0)$$

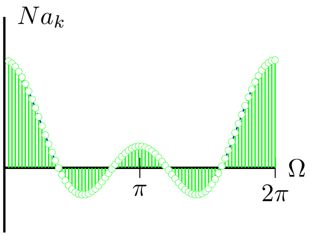
Lo cual explica la envolvente

Relación entre DSF y TF

Conclusión

- La TF de la aperiodica es la envolvente del DSF de la periódica.
- El DSF de la periódica es el muestreo de la TF de la aperiódica.

$$a_k = \frac{1}{N} X(k\Omega_0)$$



Transformada de Fourier: definición

Ecuación de análisis: Transformada de Fourier

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

Ecuación de síntesis: Transformada inversa de Fourier

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega$$

Condición de existencia

La TF existe siempre y cuando la señal sea de energía finita:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

Índice

Ejemplos de transformadas de Fourier

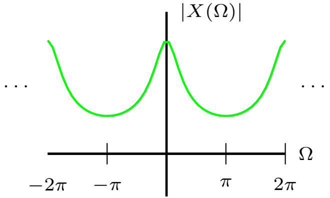
Ejemplo1

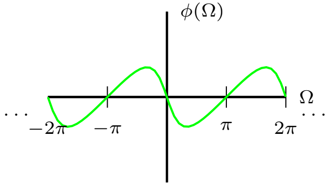
Obtener la transformada de Fourier de la señal:

$$x[n] = a^n u[n] \;\; ; \;\; |a| < 1$$

Resultado

$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$$





Índice

Tabla de Transformadas de Fourier

Señal	Transformada
Señal Periódica, con periodo N $x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n}$	$X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\Omega - k\frac{2\pi}{N})$
$x[n] = A$	$X(\Omega) = 2\pi A \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$
$x[n] = A\delta[n]$	$X(\Omega) = A$
$x[n] = A\delta[n-n_0]$	$X(\Omega) = Ae^{-j\Omega n_0}$
$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-kN)$	$X(\Omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$
$x[n] = Ae^{j\Omega_0 n}$	$X(\Omega) = 2\pi A \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k)$
$x[n] = A\cos(\Omega_0 n)$	$X(\Omega) = \pi A \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k) + \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k)]$
$x[n] = A\sin(\Omega_0 n)$	$X(\Omega) = \frac{\pi}{j} A \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k) - \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi k)]$

Tabla de Transformadas de Fourier

Señal	Transformada
Pulso rectangular de anchura $2N_1+1$ $x[n]=\begin{cases} A, & \lvert n\rvert \le N_1 \\ 0, & \lvert n\rvert > N_1 \end{cases}$	$X(\Omega)=\dfrac{A\sin\left(\Omega\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$
$x[n]=\dfrac{\sin(\Omega_c n)}{\pi n}=\dfrac{\Omega_c}{\pi}\text{sinc}\left(\dfrac{\Omega_c n}{\pi}\right),\ 0<\Omega_c<\pi$	$X(\Omega)=\begin{cases} 1, & \lvert\Omega\rvert<\Omega_c \\ 0, & \Omega_c<\lvert\Omega\rvert<\pi \end{cases}$
$x[n]=u[n]$	$X(\Omega)=\dfrac{1}{1-e^{-j\Omega}}+\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty}\pi\delta(\Omega-2\pi k)$
$x[n]=a^n u[n],\ \lvert a\rvert<1$	$X(\Omega)=\dfrac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$
$x[n]=(n+1)a^n u[n],\ \lvert a\rvert<1$	$X(\Omega)=\dfrac{1}{\left(1-ae^{-j\Omega}\right)^2}$
$x[n]=\dfrac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}a^n u[n],\ \lvert a\rvert<1$	$X(\Omega)=\dfrac{1}{\left(1-ae^{-j\Omega}\right)^r}$

Índice

Propiedades de la transformada de Fourier

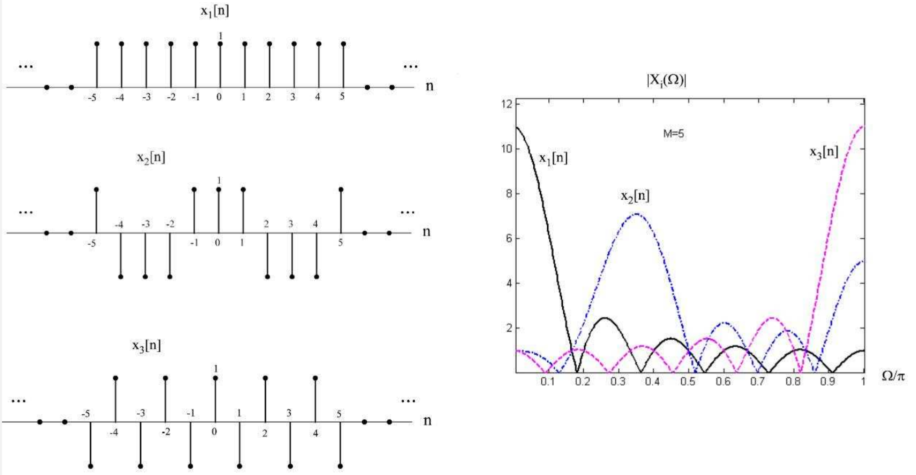
Propiedad	Señal	Transformada
	$x[n],\ y[n]$	$X(\Omega),\ Y(\Omega)$ Periódicas con periodo 2π
Definición	$x\left[n\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(\Omega\right)e^{j\Omega n}d\Omega$	$X\left(\Omega\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x\left[n\right]e^{-j\Omega n}$
Señal periódica periodo N	$x[n]=\sum_{k=<N>}a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$	$X\left(\Omega\right)=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta\left(\Omega-k\frac{2\pi}{N}\right)$
Señal periódica	$x[n]=x[n+N]$	$a_k=\frac{1}{N}X\left(k\frac{2\pi}{N}\right)=\frac{1}{N}X\left(k\Omega_0\right)$
Linealidad	$ax[n]+by[n]$	$aX(\Omega)+bY(\Omega)$
Desplazamiento en el tiempo	$x[n-n_0]$	$X(\Omega)e^{-j\Omega n_0}$
Modulación	$x[n]e^{j\Omega_0 n}$	$X(\Omega-\Omega_0)$
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(-\Omega)$
Inversión temporal	$x[-n]$	$X(-\Omega)$
Expansión temporal	$x_N\left[n\right]=\begin{cases} x\left[n/N\right] & n=\dot{N} \\ 0 & n\neq\dot{N}\end{cases}$	$X(N\Omega)$
Convolución	$x[n]*y[n]$	$X(\Omega)Y(\Omega)$
Multiplicación	$x[n]\cdot y[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(\theta\right)Y\left(\Omega-\theta\right)d\theta$
Diferenciación	$x[n]-x[n-1]$	$(1-e^{-j\Omega})X(\Omega)$

Propiedades de la transformada de Fourier

Propiedad	Señal	Transformada
	$x[n]$, $y[n]$	$X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ Periódicas con periodo 2π
Acumulación	$\sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$	$\frac{X(\Omega)}{1-e^{-j\Omega}} + \pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$
Diferenciación en frecuencia	$nx[n]$	$j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
Simetría señales reales	$x[n]$	$X(\Omega) = X^*(\Omega)$ $\mathrm{Re}\{X(\Omega)\} = \mathrm{Re}\{X(-\Omega)\}$ $\mathrm{Im}\{X(\Omega)\} = -\mathrm{Im}\{X(-\Omega)\}$ $\lvert X(\Omega)\rvert = \lvert X(-\Omega)\rvert$ $\varphi_{X(\Omega)}(\Omega) = -\varphi_{X(-\Omega)}(\Omega)$
Simetría señales reales pares	$x[n]$ real y par	$X(\Omega)$ real y par
Simetría señales reales impares	$x[n]$ real y impar	$X(\Omega)$ imaginaria pura y impar
Descomposición par e impar de señales reales	$x_e[n]$ $x_o[n]$	Re$\{X(\Omega)\}$ jIm$\{X(\Omega)\}$
Relación de Parseval para señales aperiódicas $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x[n]\rvert^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \lvert X(\Omega)\rvert^2 d\Omega$		

Algunas propiedades interesantes

Relación tiempo-frecuencia



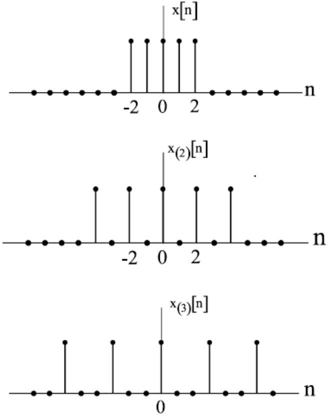
Algunas propiedades interesantes

Expansión en el tiempo

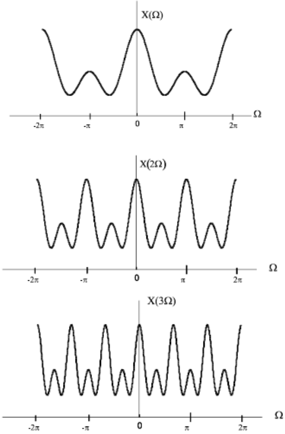
- Expansión en tiempo :

$$y[n] = x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & n \text{ multiplo de } k \\ 0, & \text{resto de valores} \end{cases} \quad \overset{TF}{\longleftrightarrow} \quad Y(\Omega) = X(k\Omega)$$

-Ejemplo :



$$X(\Omega) = \frac{sen\Omega\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)}{sen\frac{\Omega}{2}}$$



Algunas propiedades interesantes

Convolución

- Convolución : $p[n] = x[n] * y[n] \xleftrightarrow{TF} P(\Omega) = X(\Omega) \cdot Y(\Omega)$

-Ejemplo : $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad ; \quad y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{TF} X(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}}$$

$$y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{TF} Y(\Omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3} e^{-j\Omega}}$$

$$p[n] = x[n] * y[n] \xleftrightarrow{TF} P(\Omega) = X(\Omega) \cdot Y(\Omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2} e^{-j\Omega}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3} e^{-j\Omega}\right)}$$

$$\mathrm{P}(\Omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-j\Omega}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \mathrm{e}^{-j\Omega}\right)} = \frac{3}{1 - \frac{1}{2} \mathrm{e}^{-j\Omega}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{3} \mathrm{e}^{-j\Omega}} \xleftrightarrow{\text{TFInv}} \mathrm{p}[\mathrm{n}] = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{n}} \cdot \mathrm{u}[\mathrm{n}] - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{n}} \cdot \mathrm{u}[\mathrm{n}]$$

Algunas propiedades interesantes

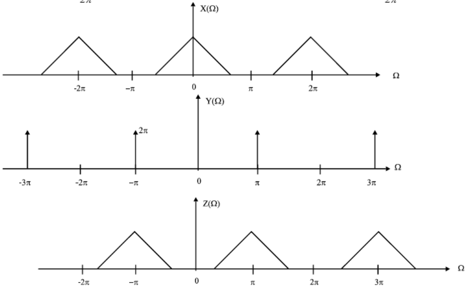
Modulación

- Modulación : $p[n]=x[n]\cdot y[n] \xleftrightarrow{TF} P(\Omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot X(\Omega)\otimes Y(\Omega)=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{2\pi} X(\varphi)\cdot Y(\Omega-\varphi)\,d\varphi$

-Ejemplo : Obtener la TF del producto de x[n] e y[n], (X(Ω): TF de x[n]).

$$y[n]=(-1)^n=e^{j\pi n} \xleftrightarrow{TF} Y(\Omega)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\cdot\delta(\Omega-\pi-2k\pi)$$

$$Z(\Omega)=\frac{1}{2\pi}X(\Omega)\otimes Y(\Omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\varphi)\cdot 2\pi\delta(\Omega-\varphi-\pi)\,d\varphi = X(\Omega-\pi)\cdot\int_{2\pi}\delta(\Omega-\varphi-\pi)\,d\varphi = X(\Omega-\pi)$$



Algunas propiedades interesantes

Teorema de Parseval

Son aquellas en las cuales la energía es finita. Cumplen por tanto:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

En ese caso también se puede calcular la energía a partir de la transformada de Fourier:

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

Por esta razón, el módulo del espectro está relacionado con la distribución de la energía en la frecuencia.

Índice

Transformada de Fourier de señales periódicas

Hasta ahora

- Señales periódicas → DSF
- Señales aperiódicas → TF

Se puede calcular la TF de una señal periódica??

Sea la siguiente señal:

$$f[n] = e^{j\Omega_0 n} \leftrightarrow F(\Omega) = 2\pi \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi r)$$

Si ahora consideramos la señal:

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n}$$

Su transformada será:

$$X(\Omega) = \sum_{k=<N>} \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\Omega - k\Omega_0 - 2\pi r)$$

Transformada de Fourier de señales periódicas

Proposición:

La transformada de Fourier de una señal periódica consiste en un tren de impulsos (deltas) equiespaciados en frecuencia y con periodo 2π.

Expresión de la transformada

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n} \leftrightarrow X(\Omega) = \sum_{k=<N>} \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\Omega - k\Omega_0 - 2\pi r)$$

Transformada de Fourier de señales periódicas. Ejemplo

Obtener la transformada de Fourier la señal:

$$x[n] = \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) = \sin\left(\Omega_0 n\right)$$

Los coeficientes valen:

$$a_0 = 0,\ a_1 = \frac{1}{2j},\ a_2 = 0,\ \ldots,\ a_{N-1} = a_{-1} = \frac{-1}{2j}$$

La Transformada de Fourier:

$$X(\Omega) = \frac{\pi}{j}\left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi r) - \delta(\Omega - (N-1)\Omega_0 - 2\pi r)\right]$$

Transformada de Fourier de señales periódicas. Ejemplo

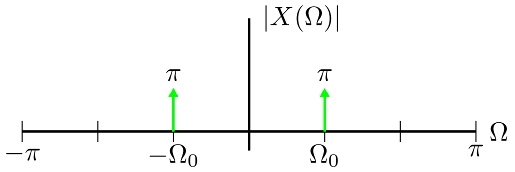


Figura: Módulo

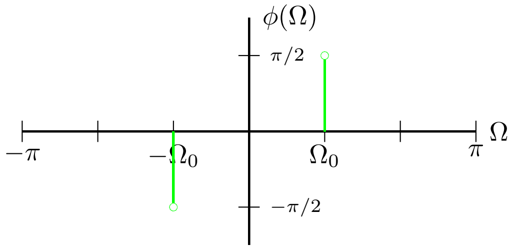


Figura: Fase

Índice

Respuesta en frecuencia de sistemas LTI

Dominio del tiempo

Sea un sistema LTI, la salida $y[n]$ es:

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Sistema LTI}\\ h[n]\end{array}} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

Dominio de la frecuencia

Si obtenemos las transformadas de Fourier de $x[n]$, $y[n]$, $h[n]$ y aplicamos la propiedad de la convolución de la transformada de Fourier:

$$X(\Omega) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Sistema LTI}\\ H(\Omega)\end{array}} \longrightarrow Y(\Omega) = X(\Omega) \cdot H(\Omega) = \begin{cases} |Y(\Omega)| = |X(\Omega)| \cdot |H(\Omega)| \\ \phi_Y(\Omega) = \phi_X(\Omega) + \phi_H(\Omega) \end{cases}$$

Respuesta en frecuencia

Despejando $H(\Omega)$:

$$Y(\Omega) = H(\Omega) \cdot X(\Omega), \qquad H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = |H(\Omega)| \cdot e^{j\phi_H(\Omega)}$$

- $H(\Omega)$ es la **respuesta en frecuencia del sistema**.
- $|H(\Omega)|$ es el módulo de la respuesta en frecuencia o respuesta en amplitud.
- La fase, $\phi_H(\Omega)$, se conoce como respuesta en fase.

Respuesta en frecuencia

Despejando $H(\Omega)$:

$$Y(\Omega) = H(\Omega) \cdot X(\Omega), \qquad H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = |H(\Omega)| \cdot e^{j\phi_H(\Omega)}$$

- $H(\Omega)$ es la **respuesta en frecuencia del sistema**.
- $|H(\Omega)|$ es el módulo de la respuesta en frecuencia o respuesta en amplitud.
- La fase, $\phi_H(\Omega)$, se conoce como respuesta en fase.

Efecto de la respuesta en amplitud:

Tiene un efecto de **filtrado**:

- si $|H(\Omega)|$ es nulo o casi nulo en unas determinadas frecuencias, esas se atenuarán en la salida
- Si $|H(\Omega)|$ tiene un valor “grande“ en unas frecuencias, estas aparecerán reforzadas a la salida.

Respuesta en frecuencia

Ejemplo de la respuesta en fase:

Supongamos que $|H(\Omega)| = 1$ y la fase es lineal ($\phi_H(\Omega) = -\Omega n_0$):

$$H(\Omega) = |H(\Omega)| \cdot e^{j\phi_H(\Omega)} = e^{-j\Omega n_0} \Rightarrow Y(\Omega) = e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$$

En el dominio del tiempo:

$$y[n] = x[n - n_0]$$

Conclusión: en el dominio del tiempo se produce un desplazamiento sin distorsión de la señal

Sistemas definidos por ecuaciones en diferencias

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

Consideramos sistemas LTI causales (reposo inicial):

Sistemas IIR (Infinite Impulse Response)

Se evalúan de forma recursiva:

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

donde se ha considerado $a_0 = 1$. Generalmente se implementan de un modo muy eficiente.

La respuesta en frecuencia es:

$$H(\Omega) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{M} b_k\, e^{-j\Omega k}}{\sum\limits_{k=0}^{N} a_k\, e^{-j\Omega k}} = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\, e^{-j\Omega k}$$

Sistemas definidos por ecuaciones en diferencias

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, y\,[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k \, x\,[n-k]$$

Consideramos sistemas LTI causales (reposo inicial):

Sistemas FIR (Finite Impulse Response)

son un caso particular con todos los $a_k = 0$ (excepto el $a_0 = 1$), se pierde la recursión,

$$y\,[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \, x\,[n-k]$$

Son interesantes porque pueden tener fase lineal. La respuesta en frecuencia es:

$$H(\Omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k \, e^{-j\Omega k} = \sum_{k=0}^{M} h[k] \, e^{-j\Omega k}$$

Índice

Respuesta de un sistema LTI a una exponencial compleja

Autofunción

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Sistema LTI}\\ h[n]\end{array}} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

Las exponenciales complejas son autofunciones de los sistemas LTI:

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} \rightarrow y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] e^{j\Omega_0 (n-m)} = H(\Omega_0) \cdot e^{j\Omega_0 n}$$

$$H(\Omega_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega_0 n} \rightarrow \text{Autovalor (Respuesta en frecuencia)}$$

$$e^{j\Omega_0 n} \rightarrow \text{Autofunción}$$

Conclusión

Si la entrada es $x[n] = e^{j\Omega_0 n}$ la salida será:

$$y[n] = H(\Omega_0) \cdot e^{j\Omega_0 n}$$

Respuesta de un sistema LTI a una señal sinusoidal

Problema:

Si se introduce a la entrada una señal sinusoidal:

$$x[n] = A \cdot \cos(\Omega_0 n + \theta)$$

Se puede poner en forma exponencial mediante la relación de Euler:

$$x[n] = A \cdot \frac{1}{2}\left(e^{j(\Omega_0 n+\theta)} + e^{-j(\Omega_0 n+\theta)}\right) = \frac{A}{2} \cdot e^{j\theta} \cdot e^{j\Omega_0 n} + \frac{A}{2} \cdot e^{-j\theta} \cdot e^{-j\Omega_0 n}$$

Respuesta de un sistema LTI a una señal sinusoidal

Aplicando la propiedad de linealidad y de autofunción:

$$y[n] = H(\Omega_0) \cdot \frac{A}{2} \cdot e^{j\theta} \cdot e^{j\Omega_0 n} + H(-\Omega_0) \cdot \frac{A}{2} \cdot e^{-j\theta} \cdot e^{-j\Omega_0 n}$$

$$y[n] = |H(\Omega_0)| \cdot e^{j\phi(\Omega_0)} \cdot \frac{A}{2} \cdot e^{j\theta} \cdot e^{j\Omega_0 n} + |H(-\Omega_0)| \cdot e^{j\phi(-\Omega_0)} \cdot \frac{A}{2} \cdot e^{-j\theta} \cdot e^{-j\Omega_0 n}$$

Consideración

Si $h[n]$ es real se cumplen las siguientes propiedades de la transformada:

$$H^*(\Omega_0) = H(-\Omega_0) \Rightarrow \begin{cases} |H(\Omega_0)| = |H(-\Omega_0)| \\ \phi(\Omega_0) = -\phi(-\Omega_0) \end{cases}$$

Respuesta de un sistema LTI a una señal sinusoidal

Usando esta propiedad:

$$y[n] = |H(\Omega_0)| \cdot e^{j\phi(\Omega_0)} \cdot \frac{A}{2} \cdot e^{j\theta} \cdot e^{j\Omega_0 n} + |H(\Omega_0)| \cdot e^{-j\phi(\Omega_0)} \cdot \frac{A}{2} \cdot e^{-j\theta} \cdot e^{-j\Omega_0 n}$$

Finalmente:

$$y[n] = |H(\Omega_0)| \frac{A}{2} \left(e^{j(\Omega_0 n + \theta + \phi(\Omega_0))} + e^{-j(\Omega_0 n + \theta + \phi(\Omega_0))} \right)$$

$$y[n] = A \cdot |H(\Omega_0)| \cdot \cos(\Omega_0 n + \theta + \phi(\Omega_0))$$

Conclusión

- El coseno es atenuado o amplificado por el módulo de la respuesta en frecuencia y se desfasa con la fase de la respuesta en frecuencia.
- En ambos casos la respuesta en frecuencia se evalúa en la frecuencia del coseno.