Tema 4. Análisis de Fourier de señales y sistemas de tiempo discreto.

2015-2016

Índice

Índice

Introducción

Tema anterior. Sistemas LTI

- $x(t)$ y $x[n]$ se pueden expresar como combinación lineal de impulsos (deltas).
- Por tanto, la salida de un sistema LTI es:

$$y(t) = x(t) * h(t) \tag{1}$$
$$y[n] = x[n] * h[n]$$

Objetivo

Expresar las señales de tiempo continuo $x[n]$ como combinación lineal de otro tipo de señales básicas que permitan:

- Calcular la salida sin realizar la convolución.
- Entender la dinámica de las señales y sistemas de un modo más intuitivo.

Índice

Respuesta de sistemas LTI a exponenciales complejas: Autovalores y autofunciones

Consideración

Las exponenciales complejas son autofunciones de los sistemas LTI.

$$x[n] = z_0^n \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z_0^{n-k} = H(z_0) \cdot z_0^n$$

$$H(z_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] z_0^{-k} \rightarrow \text{Autovalor}$$

$$z_0^n \rightarrow \text{Autofunción}$$

Linealidad

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \rightarrow y[n] = \sum_k a_k z_k^n H(z_k)$$

Conclusión

Sabemos como se transforma una exponencial compleja $\Rightarrow$ son interesantes como señales básicas

Índice

Índice

Exponencial compleja de tiempo discreto

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n}$$

Periodicidad

- Cálculo del periodo:

$$x[n] = x[n+N]$$
$$Ae^{j\Omega n} = Ae^{j\Omega(n+N)}$$
$$\Omega N = 2\pi k \Rightarrow N = \frac{2\pi k}{\Omega},\ N, k \in \mathbb{Z}^+$$

  - No todas son periódicas !!!
  - La frecuencia es $\Omega = \frac{2\pi k}{N}$, los múltiplos de $2\pi/N,\ N \in \mathbb{Z}^+$.
- Existen muchas frecuencias que generan la misma señal: Ω y $\Omega + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$:

$$Ae^{j\Omega n} = Ae^{j(\Omega+2\pi k)n}$$

solo necesitamos un intervalo de longitud 2π para obtener todas las frecuencias!!!

Exponencial compleja de tiempo discreto

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n}$$

Periodicidad

- Cálculo del periodo:

$$x[n] = x[n+N]$$
$$Ae^{j\Omega n} = Ae^{j\Omega(n+N)}$$
$$\Omega N = 2\pi k \Rightarrow N = \frac{2\pi k}{\Omega},\ N, k \in \mathbb{Z}^+$$

  - No todas son periódicas !!!
  - La frecuencia es $\Omega = \frac{2\pi k}{N}$, los múltiplos de $2\pi/N,\ N \in \mathbb{Z}^+$.
- Existen muchas frecuencias que generan la misma señal: Ω y $\Omega + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$:

$$Ae^{j\Omega n} = Ae^{j(\Omega+2\pi k)n}$$

solo necesitamos un intervalo de longitud 2π para obtener todas las frecuencias!!!

Número de frecuencias finito

Para exponenciales periodicas con un N dado, las únicas frecuencias diferentes son:

$$\Phi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n},\ \ \Omega_k = k\frac{2\pi}{N},\ k \in [0, N)$$

Exponenciales complejas armónicamente relacionadas

Proposición

Una señal periódica con periodo N se puede expresar como una combinación de exponenciales complejas armónicamente relacionadas $\Rightarrow$ Desarrollo en Serie de Fourier (DSF).

Definición

La familia de exponenciales complejas armónicamente relacionadas con periodo N:

$$\Phi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}, \quad k \in [0, N)$$

Desarrollo en serie de Fourier

Ecuación de síntesis

Sea una señal periódica $x[n]$ con periodo fundamental $N \Rightarrow$ se puede poner como combinación lineal de exponenciales complejas armónicamente relacionadas:

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}; \quad a_k \in \mathbb{C}$$

- a_k: Coeficientes del Desarrollo en Serie de Fourier
- $k = 0 \rightarrow$ Componente continua
- $k = 1 \rightarrow$ Componente fundamental (Primer armónico)
- $k = P \rightarrow$ P-ésimo armónico

Ejemplo de DSF

Cálculo de coeficientes: ejemplo 1

Sea una señal periódica $x[n] = \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$, los coeficientes del DSF se pueden obtener por identificación con la expresión:

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

para ello expresamos la señal en términos de exponenciales:

$$x[n] = \frac{1}{2j}e^{j\frac{2\pi}{N}n} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

Identificando, los coeficientes quedan:

$$a_0 = 0,\ a_1 = \frac{1}{2j},\ a_2 = 0,\ a_{N-1} = a_{-1} = -\frac{1}{2j}$$

Obtención de los coeficientes del DSF

Ecuación de síntesis

Sea $x[n]$ una señal con periodo N, se puede expresar:

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}; \quad a_k \in \mathbb{C}$$

Ecuación de análisis

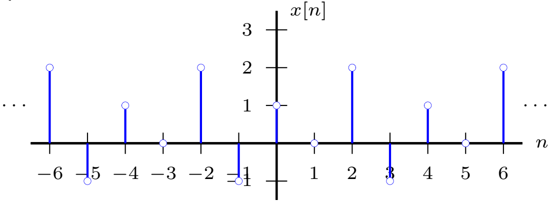
Los coeficientes se obtienen:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

Ejemplo de DSF

Cálculo de coeficientes: ejemplo 2

Sea la señal con periodo $N = 4$:

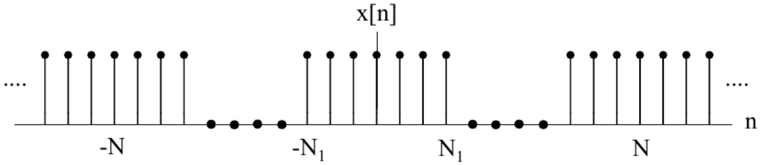


$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{4}\left[1 + 2e^{-jk\pi} - e^{-jk\frac{3\pi}{2}}\right]$$

quedando:

$$a_0 = \frac{1}{2},\quad a_1 = -\frac{1+j}{4},\quad a_2 = 1,\quad a_3 = -\frac{1-j}{4}$$

Ejemplo de análisis: Tren de pulsos rectangulares



Los coeficientes del DSF serán:

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}\frac{e^{jk\Omega_0 N_1} - e^{jk\Omega_0(N_1+1)}}{1-e^{-jk\Omega_0}} =$$

$$= \frac{1}{N}\frac{e^{jk\Omega_0(N_1+\frac{1}{2})} - e^{jk\Omega_0(N_1+\frac{1}{2})}}{e^{jk\frac{\Omega_0}{2}} - e^{-jk\frac{\Omega_0}{2}}} = \begin{cases} \frac{1}{N}\frac{\sin\left(k\Omega_0(N_1+\frac{1}{2})\right)}{\sin\left(k\frac{\Omega_0}{2}\right)}, & k \neq 0, \dot{N} \\ \frac{2N_1+1}{N}, & k = 0, \dot{N} \end{cases}$$

Tabla de DSF

EJEMPLOS DE CÁLCULO DE COEFICIENTES DEL DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER DE SEÑALES DISCRETAS

SEÑAL	COEFICIENTES
$\sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$	a_k
$e^{j\Omega_0 n}$	(a) $\Omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} 1, & k = m, m \pm N, m \pm 2N, \cdots \\ 0, & \text{otro valor} \end{cases}$ (b) $\frac{\Omega_0}{2\pi}$ irracional $\Rightarrow$ señal aperiódica
$\cos \Omega_0 n$	(a) $\Omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} 1/2, & k = \pm m, \pm m \pm N, \pm m \pm 2N, \cdots \\ 0, & \text{otro valor} \end{cases}$ (b) $\frac{\Omega_0}{2\pi}$ irracional $\Rightarrow$ señal aperiódica

EJEMPLOS DE CÁLCULO DE COEFICIENTES DEL DESARROLLO EN SERIE DE FOURIER DE SEÑALES DISCRETAS

SEÑAL	COEFICIENTES
$\operatorname{sen}\ \Omega_0 n$	(a) $\Omega_0 = \dfrac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} 1/2j, & k = m, m \pm N, m \pm 2N, \cdots \\ -1/2j, & k = -m, -m \pm N, -m \pm 2N, \cdots \\ 0, & \text{otro valor} \end{cases}$ (b) $\dfrac{\Omega_0}{2\pi}$ irracional $\Rightarrow$ señal aperiódica
$x[n] = 1$	$a_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \pm N, \pm 2N \\ 0, & \text{con otro valor} \end{cases}$
$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n - kN)$	$a_k = \dfrac{1}{N} \quad \forall\ k$
Onda cuadrada periódica $x[n] = \begin{cases} 1, & \|n\| \le N_1 \\ 0, & N_1 < \|n\| \le N/2 \end{cases}$ y $x[n+N] = x[n]$	$a_k = \dfrac{\operatorname{sen}\left[(2\pi k/N)(N_1 + \frac{1}{2})\right]}{N \operatorname{sen}\left[(2\pi k/2N)\right]}, \quad k \ne 0, \pm N, \pm 2N, \cdots$ $a_k = \dfrac{2N_1 + 1}{N}, \quad k = 0, \pm N, \pm 2N, \cdots$

Índice

Tabla de DSF

SERIES DE FOURIER EN TIEMPO DISCRETO

Propiedad	Señal periódica	Coeficiente
	$\left.\begin{matrix} x[n] \\ y[n] \end{matrix}\right\}$ Periódicas con periodo N y frecuencia fundamental $\Omega_0=2\pi/N$	$\left.\begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix}\right\}$ Periódicas de periodo N
Ecuaciones	$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$	$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$
Linealidad	$A x_1[n] + B x_2[n]$	$A a_k + B b_k$
Desplazamiento de tiempo	$x[n-n_0]$	$a_k e^{-jk\frac{2\pi}{N}n_0}$
Desplazamiento en frecuencia	$x[n] e^{jM\frac{2\pi}{N}n}$	a_{k-M}
Conjugación	$x^*[n]$	a^*_{-k}
Inversión en el tiempo	$x[-n]$	a_{-k}
Escalado en el tiempo	$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m], & n \text{ multiplo de } m \\ 0, & \text{resto de valores} \end{cases}$ (periódica de periodo mN)	$\frac{1}{m} a_k$ (vistas como periódicas de periodo mN)
Convolución periódica	$z[n] = x[n] \otimes y[n] = \sum_{r=\langle N\rangle} x[r] y[n-r]$	$N a_k b_k$

SERIES DE FOURIER EN TIEMPO DISCRETO

Propiedad	Señal periódica	Coeficiente
Multiplicación	$x[n]y[n]$	$\sum_{r=\langle N\rangle} a_r b_{k-r}$
Primera diferencia	$x[n]-x[n-1]$	$\left(1-e^{-jk(2\pi/N)}\right)a_k$
Suma consecutiva	$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$ (de valor finito y periódica sólo si $a_0=0$)	$\frac{a_k}{\left(1-e^{-jk(2\pi/N)}\right)}$
Simetría conjugada para señales reales.	$x[n]$ Real	$a_k = a^*_{-k}$ $\mathrm{Re}[a_k]=\mathrm{Re}[a_{-k}]$ $\mathrm{Im}[a_k]=-\mathrm{Im}[a_{-k}]$ $\lvert a_k\rvert=\lvert a_{-k}\rvert$ $\varphi_{a_k}=-\varphi_{a_{-k}}$
Señales reales y pares	$x[n]$ REAL y PAR	a_k real y par
Señales reales e impares	$x[n]$ REAL e IMPAR	a_k imaginaria e impar
Descomposición par e impar de señales reales	$x_p[n]=\mathrm{Par}\{x[n]\}$ $[x[n]$ real$]$ $x_I[n]=\mathrm{Impar}\{x[n]\}$ $[x[n]$ real$]$	$\mathrm{Re}[a_k]$ $j\,\mathrm{Im}[a_k]$

Relación de Parseval para señales periódicas

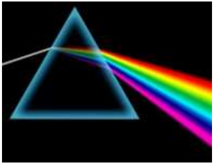
$$P_m = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} \lvert x[n]\rvert^2 = \sum_{k=\langle N\rangle} \lvert a_k\rvert^2$$

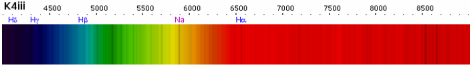
Índice

Representación espectral

Representación espectral

El espectro de frecuencias de una señal ondulatoria muestra cuál es la proporción de cada una de las frecuencias que la componen (sonora, luminosa, electromagnética,...).





Representación espectral de señales. Ejemplo 1

El valor de los coeficientes del DSF son la proporción de cada uno de los armónicos que forman la señal. Se representa el valor de los coeficientes para cada frecuencia.

Ejemplo coseno

$$x[n] = A_0 \cos\left(\frac{\pi}{3}n + \phi_0\right)$$

$$x[n] = \frac{A_0}{2} e^{-j\frac{\pi}{3}n} \cdot e^{-j\phi_0} + \frac{A_0}{2} e^{j\frac{\pi}{3}n} \cdot e^{j\phi_0}$$

- ¿Cuanto vale el periodo?
- ¿Cuanto valen los coeficientes?
- ¿Cuál es la representación espectral?

Representación espectral de señales. Ejemplo 1

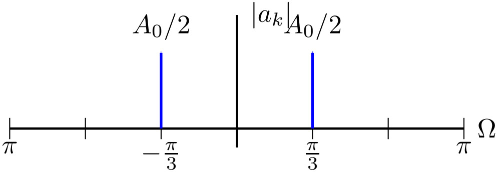


Figura: Módulo

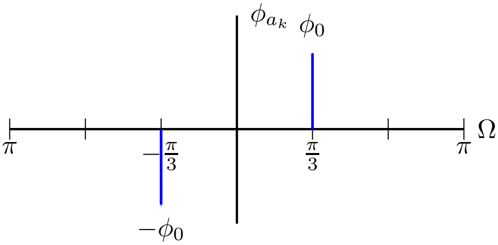


Figura: Fase

Ejemplo de representación espectral. Ejemplo 2

Representar el desarrollo en serie de la señal:

$$x[n] = 1 + \text{sen}\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{N}n + \pi/4\right)$$

Identificando términos: si lo ponemos en función de exponenciales complejas quedará:

$$x[n] = \frac{\sqrt{2}}{4}\,(1-j)\,e^{-j\,\frac{4\pi}{N}n} + \left(1 - \frac{1}{2j}\right)e^{-j\,\frac{2\pi}{N}n} + 1 + \cdots$$

$$\cdots + \left(1 + \frac{1}{2j}\right)e^{j\,\frac{2\pi}{N}n} + \frac{\sqrt{2}}{4}\,(1+j)\,e^{j\,\frac{4\pi}{N}n} +$$

Ejemplo de representación espectral. Ejemplo 2

Representar el desarrollo en serie de la señal:

$$x[n] = 1 + \text{sen}\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{N}n + \pi/4\right)$$

Identificando términos: si lo ponemos en función de exponenciales complejas quedará:

$$x[n] = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-j)\,e^{-j\frac{4\pi}{N}n} + \left(1 - \frac{1}{2j}\right)e^{-j\frac{2\pi}{N}n} + 1 + \cdots$$

$$\cdots + \left(1 + \frac{1}{2j}\right)e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{\sqrt{2}}{4}(1+j)\,e^{j\frac{4\pi}{N}n} +$$

Coeficientes de la serie de Fourier: $a_0 = 1$, $a_1 = \left(1 - \frac{1}{2}j\right)$, $a_{-1} = \left(1 + \frac{1}{2}j\right)$, $a_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+j)$, $a_{-2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-j)$

Ejemplo de representación espectral. Ejemplo 3

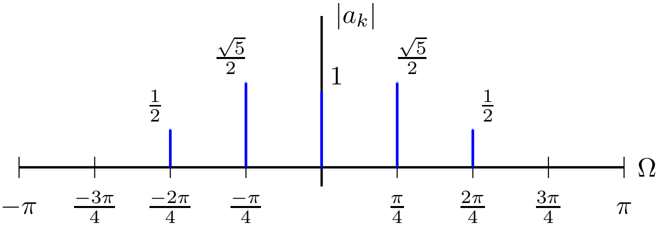


Figura: Amplitud

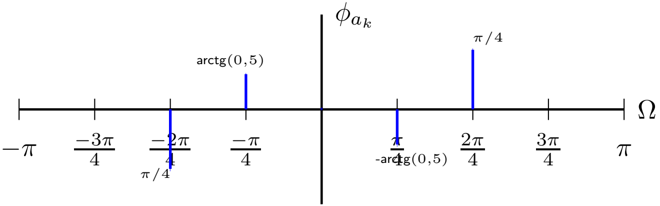


Figura: Fase

Ejemplo de representación espectral. Ejemplo 4

Representación espectral del tren de pulsos rectangulares:

$$Na_k = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(k\Omega_0(N_1+\frac{1}{2})\right)}{\sin\left(k\frac{\Omega_0}{2}\right)}, & k \neq 0, \dot{N} \\ 2N_1+1, & k = 0, \dot{N} \end{cases}$$