Tema 3. Análisis de Fourier de señales y sistemas de tiempo continuo.

2015-2016

Índice

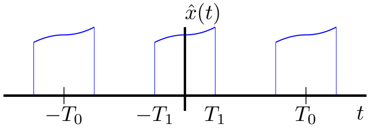
Índice

Análisis de Fourier de señales no periódicas

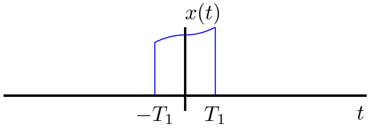
Señal aperiodica (no periódica)

Se puede considerar que una señal aperiodica es una señal periódica con periodo infinito $\Rightarrow$ el desarrollo en serie de Fourier de señales periódicas puede generalizarse al caso no periódico.

Periódica



Aperiódica

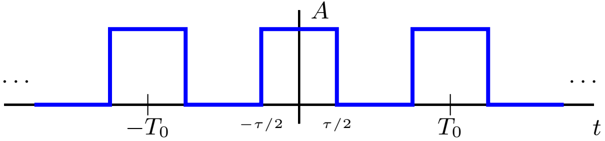


Análisis de Fourier de señales no periódicas

Ejemplo del tren de pulsos rectangulares

$$a_k = \frac{A\tau}{T_0}\mathrm{sinc}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2\pi}\right)$$

T_0 es el periodo y $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ es la pulsación fundamental.



En el límite en el cual $T_0 \to \infty$ los pulsos estarán tan separados que la señal dejará de ser periódica.

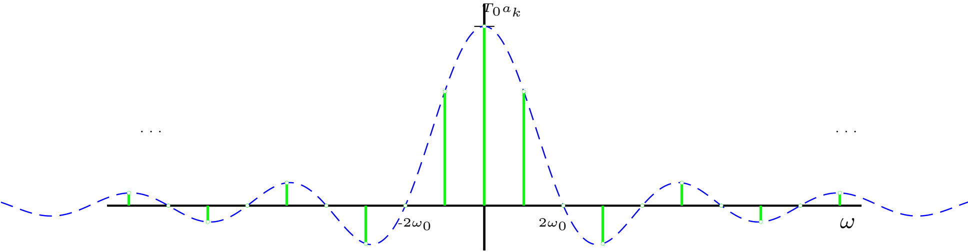
Análisis de Fourier de señales no periódicas

Si representamos:

$$a_k \cdot T_0 = A\tau \mathrm{sinc}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2\pi}\right)$$

para distintos valores de T_0 veremos el efecto producido al separar cada vez más los pulsos.

$$T_0 = 2\tau,\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$



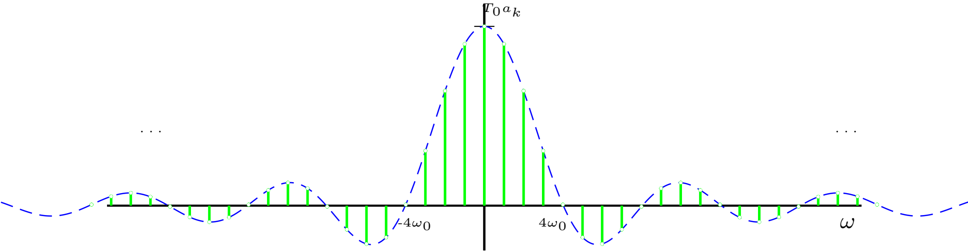
Análisis de Fourier de señales no periódicas

Si representamos:

$$a_k \cdot T_0 = A\tau \text{sinc}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2\pi}\right)$$

para distintos valores de T_0 veremos el efecto producido al separar cada vez más los pulsos.

$$T_0 = 4\tau$$



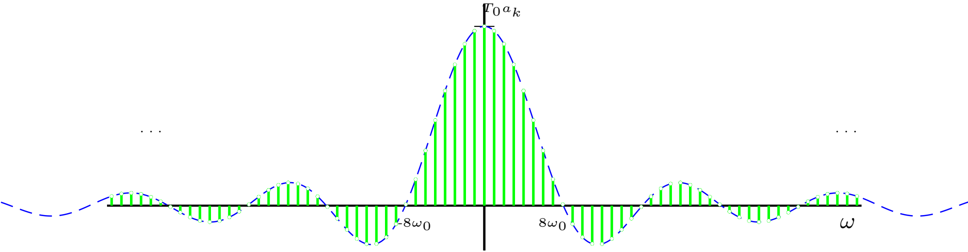
Análisis de Fourier de señales no periódicas

Si representamos:

$$a_k \cdot T_0 = A\tau \mathsf{sinc}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2\pi}\right)$$

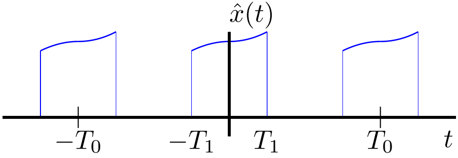
para distintos valores de T_0 veremos el efecto producido al separar cada vez más los pulsos.

$$T_0 = 8\tau$$

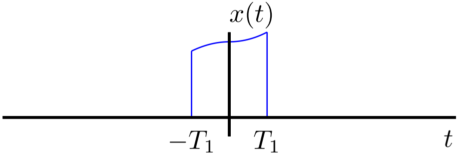


Transformada de Fourier

Consideremos una señal cualquiera periódica, $\hat{x}(t)$:



A partir de ella consideramos la versión aperiodica cuando $T = \infty$:



Definición de la transformada de Fourier

Señal periódica

La señal $\hat{x}(t)$ se puede desarrollar en serie de Fourier:

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \hat{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

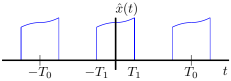
Señal aperiódica

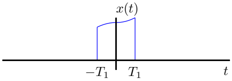
La señal $x(t)$ se puede expresar en términos de la transformada de Fourier:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Relación entre DSF y TF





Consideración

Teniendo en cuenta que $x(t) = \hat{x}(t)$ para $|t| < T_0/2$ y que $x(t) = 0$ fuera de ese intervalo, tendremos:

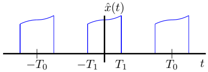
$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \hat{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt =$$

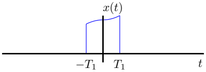
$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

Teniendo en cuenta la transformada de $x(t)$:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

Relación entre DSF y TF





Consideración

Teniendo en cuenta que $x(t) = \hat{x}(t)$ para $|t| < T_0/2$ y que $x(t) = 0$ fuera de ese intervalo, tendremos:

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \hat{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt =$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

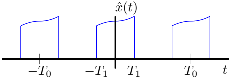
Teniendo en cuenta la transformada de $x(t)$:

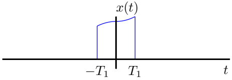
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

los a_k de la versión periódica se pueden expresar:

$$a_k = \frac{1}{T_0}X(k\omega_0)$$

Relación entre DSF y TF





Consideración

Teniendo en cuenta que $x(t) = \hat{x}(t)$ para $|t| < T_0/2$ y que $x(t) = 0$ fuera de ese intervalo, tendremos:

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \hat{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt =$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

los a_k de la versión periódica se pueden expresar:

$$a_k = \frac{1}{T_0}X(k\omega_0)$$

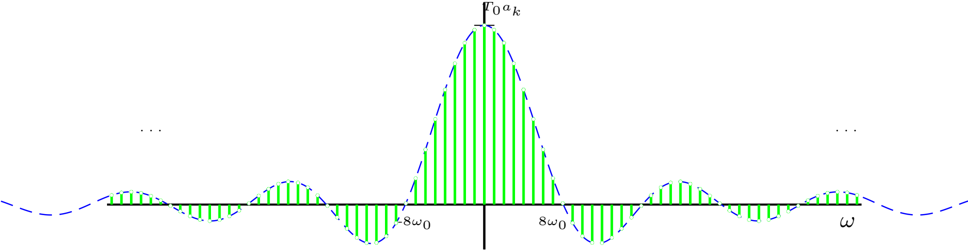
Lo cual explica la envolvente

Relación entre DSF y TF

Conclusión

- La TF de la aperiodica es la envolvente del DSF de la periódica.
- El DSF de la periódica es el muestreo de la TF de la aperiódica.

$$a_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0)$$



Transformada de Fourier: definición

Ecuación de análisis: Transformada de Fourier

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Ecuación de síntesis: Transformada inversa de Fourier

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Índice

Ejemplos de transformadas de Fourier

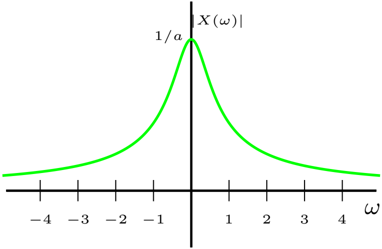
Ejemplo1

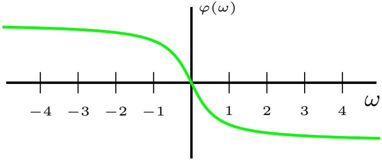
Obtener la transformada de Fourier de la señal:

$$x(t) = e^{-at}u(t) \;\; ; \;\; a > 0$$

Resultado

$$X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega} \;\; ; \;\; a > 0$$





Ejemplos de transformadas de Fourier

Ejemplo2

Obtener la transformada de Fourier de la señal:

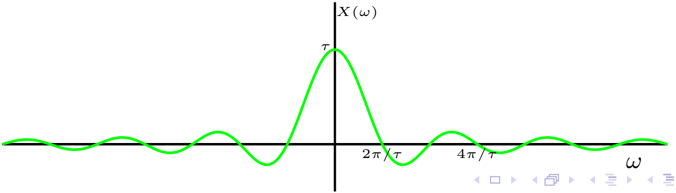
$$x(t) = \prod\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

Resultado

$$X(\omega) = \tau \mathsf{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$$

Comprar con el DSF de la versión periódica:

$$a_k = \frac{\tau}{T_0}\mathsf{sinc}\left(\frac{k\omega_0\tau}{2\pi}\right)$$



Índice

Tabla de Transformadas de Fourier

Señal	Transformada
Señal Periódica, con periodo T_0 $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$
$x(t) = A$	$X(\omega) = 2\pi A \delta(\omega)$
$x(t) = Ae^{j\omega_0 t}$	$X(\omega) = 2\pi A \delta(\omega - \omega_0)$
$x(t) = A\cos(\omega_0 t)$	$X(\omega) = \pi A \left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right]$
$x(t) = A\sin(\omega_0 t)$	$X(\omega) = \frac{\pi}{j} A \left[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\right]$
Pulso rectangular de anchura τ $x(t) = \begin{cases} A, & \lvert t\rvert < \tau/2 \\ 0, & \lvert t\rvert > \tau/2 \end{cases} = \prod\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$X(\omega) = \frac{2A\sin(\omega\tau/2)}{\omega} = A\tau \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$
Pulso triangular de anchura 2τ $x(t) = A \triangle \left(\frac{t}{2\tau}\right)$	$X(\omega) = A\tau \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$

Tabla de Transformadas de Fourier

Señal	Transformada
$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$
$x(t) = \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t}$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < \omega_c \\ 0, & \lvert\omega\rvert > \omega_c \end{cases}$
$x(t) = A\delta(t)$	$X(\omega) = A$
$x(t) = A\delta(t - t_0)$	$X(\omega) = Ae^{-j\omega t_0}$
$x(t) = u(t)$	$X(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$x(t) = e^{-at}u(t),\ \Re(a) > 0$	$X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$
$x(t) = te^{-at}u(t),\ \Re(a) > 0$	$X(\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^2}$
$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t),\ \Re(a) > 0$	$X(\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^n}$

Índice

Propiedades de la transformada de Fourier

Propiedad	Señal	Transformada
	$x(t),\ y(t)$	$X(\omega),\ Y(\omega)$
Definición	$x\left(t\right)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}X\left(\omega\right)e^{j\omega t}d\omega$	$X\left(\omega\right)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x\left(t\right)e^{-j\omega t}dt$
	$x(t)$ Par	$X\left(\omega\right)=2\displaystyle\int_{0}^{\infty}x\left(t\right)\cos(\omega t)dt$
	$x(t)$ Impar	$X\left(\omega\right)=-2j\displaystyle\int_{0}^{\infty}x\left(t\right)\sin(\omega t)dt$
Linealidad	$ax(t)+by(t)$	$aX(\omega)+bY(\omega)$
Desplazamiento en el tiempo	$x(t-t_0)$	$X(\omega)e^{-j\omega t_0}$
Modulación	$x(t)e^{j\omega_0 t}$	$X(\omega-\omega_0)$
Convolución	$x(t)*y(t)$	$X(\omega)Y(\omega)$
Multiplicación	$x(t)\cdot y(t)$	$\dfrac{1}{2\pi}X\left(\omega\right)*Y\left(\omega\right)$
Diferenciación	$\dfrac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(\omega)$
Diferenciación en frecuencia	$tx(t)$	$j\dfrac{dX(\omega)}{d\omega}$
Integración	$\displaystyle\int_{-\infty}^{t}x\left(\tau\right)$	$\dfrac{1}{j\omega}X(\omega)+\pi X(0)\delta(\omega)$
Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
Escalado del tiempo y frecuencia	$x(at)$	$\dfrac{1}{\|a\|}X\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$
Inversión temporal	$x(-t)$	$X(-\omega)$

Propiedades de la transformada de Fourier

Propiedad	Señal	Transformada
	$x(t)$, $y(t)$	$X(\omega)$, $Y(\omega)$
Simetría señales reales	$x(t)$	$X(\omega) = X^*(-\omega)$ $\Re\{X(\omega)\} = \Re\{X(-\omega)\}$ $\Im\{X(\omega)\} = -\Im\{X(-\omega)\}$ $\|X(\omega)\| = \|X(-\omega)\|$ $\mathrm{Arg}\{X(\omega)\} = -\mathrm{Arg}\{X(-\omega)\}$
Simetría señales reales pares	$x(t)$ real y par	$X(\omega)$ real y par
Simetría señales reales impares	$x(t)$ real y impar	$X(\omega)$ imaginaria pura e impar
Descomposición par e impar de señales reales	$x_e(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$	$\Re\{X(\omega)\}$
	$x_o(t) = \frac{1}{2}(x(t) - x(-t))$	$j\Im\{X(\omega)\}$
Dualidad	$f(t)$	$G(\omega)$
	$G(t)$	$2\pi f(-\omega)$
Relación de Parseval para señales aperiódicas		

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Índice

Transformada de Fourier de señales periódicas

Hasta ahora

- Señales periódicas $\rightarrow$ DSF
- Señales aperiódicas $\rightarrow$ TF

Se puede calcular la TF de una señal periódica??

Sea la siguiente señal:

$$f(t) = e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

Si ahora consideramos la señal:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Su transformada será:

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Transformada de Fourier de señales periódicas

Proposición:

La transformada de Fourier de una señal periódica consiste en un tren de impulsos (deltas) equiespaciados en frecuencia.

Expresión de la transformada

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Índice

Relación de Parseval

Señales definidas en energía

Son aquellas en las cuales la energía es finita. Cumplen por tanto:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

En ese caso también se puede calcular la energía a partir de la transformada de Fourier:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Por esta razón, el espectro de amplitudes está relacionado con la distribución de la energía en la frecuencia.

Índice

Convergencia de la transformada de Fourier

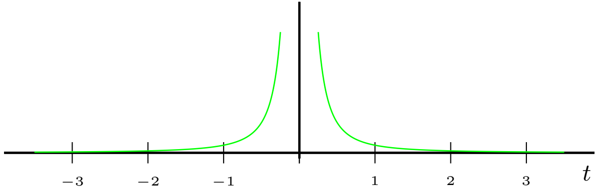
Condiciones de Dirichlet

Condición 1. $x(t)$ debe ser absolutamente integrable:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Ejemplo donde no se cumple:

$$x(t) = \frac{1}{t^2}$$



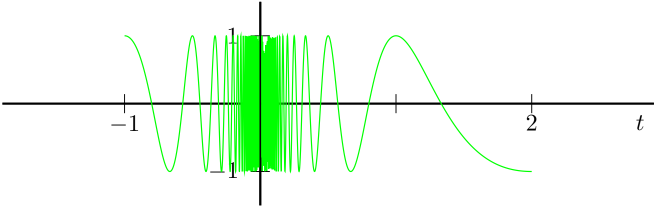
Convergencia de la transformada de Fourier

Condiciones de Dirichlet

Condición 2. $x(t)$ debe tener un número finito de máximos y mínimos dentro de cualquier intervalo.

Ejemplo donde no se cumple:

$$x(t) = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{t}\right) & -1 < t \leq 2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



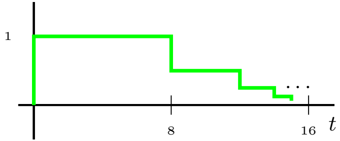
Convergencia de la transformada de Fourier

Condiciones de Dirichlet

Condición 3. $x(t)$ debe tener un número finito de discontinuidades dentro de cualquier intervalo finito y éstas deben ser finitas.

Ejemplo que no cumple

Señal compuesta por infinitas secciones donde cada una de ellas tiene la mitad de anchura y de altura que la anterior. Está definida en el intervalo (0,16).



Índice

Respuesta en frecuencia de sistemas LTI

Dominio del tiempo

Sea un sistema LTI, la salida $y(t)$ es:

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Sistema LTI}\\ h(t)\end{array}} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

Dominio de la frecuencia

Si obtenemos las transformadas de Fourier de $x(t)$, $y(t)$, $h(t)$ y aplicamos la propiedad de la convolución de la transformada de Fourier:

$$X(\omega) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Sistema LTI}\\ H(\omega)\end{array}} \longrightarrow Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

Respuesta en frecuencia

Definición

Despejando $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = |H(\omega)| \cdot e^{j\phi(\omega)}$$

- La transformada de Fourier de la respuesta al impulso, $H(\omega)$, se le conoce como **respuesta en frecuencia del sistema**.
- Su módulo, $|H(\omega)|$, se conoce como módulo de la respuesta en frecuencia o respuesta en amplitud.
- La fase, $\phi(\omega)$ se conoce como respuesta en fase.

Respuesta en frecuencia

Efecto de la respuesta en frecuencia:

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$$

Tiene un efecto de **filtrado**:

- si $|H(\omega)|$ es nulo o casi nulo en unas determinadas frecuencias, esas se eliminarán y no estarán en la señal de salida.
- Si $|H(\omega)|$ tiene un valor "grande" en unas frecuencias, estas aparecerán reforzadas a la salida.

Índice

Respuesta de un sistema LTI a una exponencial compleja

Autofunción

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Sistema LTI}\\ h(t)\end{array}} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

Las exponenciales complejas son autofunciones de los sistemas LTI:

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega_0 (t-\tau)} d\tau = H(\omega_0) \cdot e^{j\omega_0 t}$$

$$H(\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau \rightarrow \text{Autovalor (Respuesta en frecuencia)}$$

$$e^{j\omega_0 t} \rightarrow \text{Autofunción}$$

Conclusión

Si la entrada es $x(t) = e^{j\omega_0 t}$ la salida será:

$$y(t) = H(\omega_0) \cdot e^{j\omega_0 t}$$

Respuesta de un sistema LTI a una señal sinusoidal

Problema:

Si se introduce a la entrada una señal sinusoidal:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \theta)$$

Se puede poner en forma exponencial mediante la relación de Euler:

$$x(t) = A \cdot \frac{1}{2} \left(e^{j(\omega_0 t + \theta)} + e^{-j(\omega_0 t + \theta)} \right) = \frac{A}{2} \cdot e^{j\theta} \cdot e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} \cdot e^{-j\theta} \cdot e^{-j\omega_0 t}$$

Respuesta de un sistema LTI a una señal sinusoidal

Aplicando la propiedad de linealidad y de autofunción:

$$y(t) = H(\omega_0) \cdot \frac{A}{2} \cdot e^{j\theta} \cdot e^{j\omega_0 t} + H(-\omega_0) \cdot \frac{A}{2} \cdot e^{-j\theta} \cdot e^{-j\omega_0 t}$$

$$y(t) = |H(\omega_0)| \cdot e^{j\phi(\omega_0)} \cdot \frac{A}{2} \cdot e^{j\theta} \cdot e^{j\omega_0 t} + |H(-\omega_0)| \cdot e^{j\phi(-\omega_0)} \cdot \frac{A}{2} \cdot e^{-j\theta} \cdot e^{-j\omega_0 t}$$

Consideración

Si el sistema es real se cumplen las siguientes propiedades de la transformada:

$$H^*(\omega) = H(-\omega) \Rightarrow \begin{cases} |H(\omega)| = |H(-\omega)| \\ \phi(\omega) = -\phi(-\omega) \end{cases}$$

Respuesta de un sistema LTI a una señal sinusoidal

Usando esta propiedad:

$$y(t) = |H(\omega_0)| \cdot e^{j\phi(\omega_0)} \cdot \frac{A}{2} \cdot e^{j\theta} \cdot e^{j\omega_0 t} + |H(\omega_0)| \cdot e^{-j\phi(\omega_0)} \cdot \frac{A}{2} \cdot e^{-j\theta} \cdot e^{-j\omega_0 t}$$

Finalmente:

$$y(t) = |H(\omega_0)| \frac{A}{2} \left(e^{j(\omega_0 t + \theta + \phi(\omega_0))} + e^{-j(\omega_0 t + \theta + \phi(\omega_0))} \right)$$

$$y(t) = A \cdot |H(\omega_0)| \cdot \cos(\omega_0 t + \theta + \phi(\omega_0))$$

Conclusión

- El coseno es atenuado o amplificado por el módulo de la respuesta en frecuencia y se desfasa con la fase de la respuesta en frecuencia.
- En ambos casos la respuesta en frecuencia se evalúa en la frecuencia del coseno.