

Tema 2

Estructuras reticuladas

Máster Universitario en Ingeniería
Industrial

Complemento de Formación

Índice

- Introducción.
- Indeterminación estática/cinemática.
- El método de equilibrio. Ecuación de Navier
- El método de compatibilidad. Ecuaciones Elásticas
- El método de rigidez
- Tipos de estructura
 - Nave a dos aguas (pórtico/hastial)
 - Edificios

Motivación

- La necesidad de resolver estructuras hiperestáticas se plantea a principios del siglo XIX.
 - Avances científicos y sociales en el siglo XVIII.
 - La revolución industrial demanda estructuras e infraestructuras que favorezcan el desarrollo.
- Aparecen en Europa las escuelas de ingeniería.
 - Louis Navier (París) propone el método de compatibilidad en 1826 para resolver arcos hiperestáticos y vigas continuas.
 - B. P. E. Clapeyron (París y Moscú) presenta un trabajo sobre resolución de vigas continuas en 1857.
- El método de compatibilidad es laborioso y no permite un planteamiento sistemático. Esto motivo la aparición del método de equilibrio.

Motivación

- La utilización del hormigón armado en el siglo XX provoca que las estructuras se modelen como barras conectadas con nudos rígidos (trabajar a flexión). Además, se generaliza la utilización de estructuras porticadas.
 - Grado de hiperestatismo elevado (se desaconseja el uso del método de compatibilidad).
- Métodos derivados:
 - Método de pendientes y flechas (Axel Bendixen – 1914)
 - Método de equilibrios para la resolución de pórticos (A. Calisev – 1922).
 - Método de distribución de momentos o de Cross (Hardy Cross - 1932).
 - Método de rigidez “utilización de computadoras para generalizar el método de equilibrio” (segunda mitad del siglo XX). Es la forma práctica de calcular estructuras hoy en día.

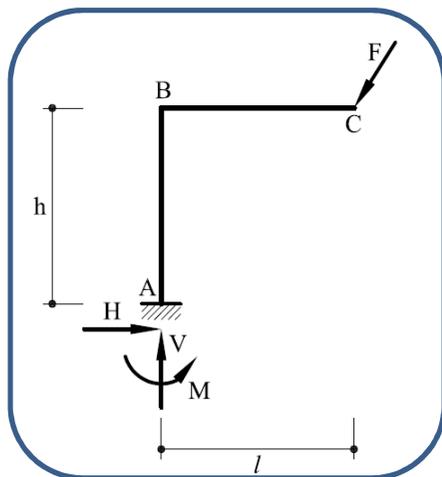
Introducción (Pórticos)

- Pórtico o estructura porticada es una estructura reticulada de plano medio formada a base de soportes y dinteles.
 - Si se cierra se denomina marco.
- Su uso es común en ingeniería civil y edificación.
- Los elementos trabajan a flexión compuesta recta (sometidos a momentos flectores de eje perpendicular al plano medio y a esfuerzos cortantes y axiles contenidos en dicho plano).
- Nudos rígidos.
- Alto grado de indeterminación estática.
- Para resolver estas estructuras por el método de compatibilidad se recomienda la simplificación por simetría.
- Aunque no tan necesario, la simetría también simplifica la resolución por el método de equilibrio.
- El método de rigidez es una generalización del método de equilibrio
- Este tema aborda los tres métodos para el análisis y diseño de pórticos sencillos

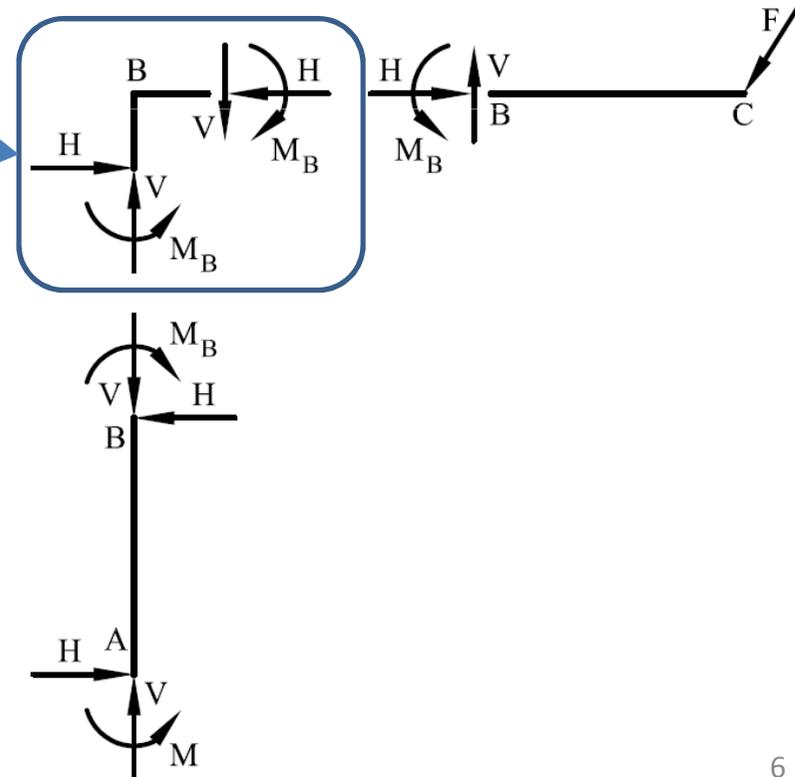
Introducción

- Equilibrio estático (ecuaciones de la estática).
 - En estructuras planas hay 3 ecuaciones estáticas linealmente independientes.
 - Todas las barras y nudos deben cumplir las ecuaciones de la estática (condición necesaria y suficiente).
 - Pequeñas deformaciones (ecuaciones de equilibrio sobre la estructura sin deformar).

En una estructura reticulada hay continuidad de fuerzas momentos en los puntos de unión.



Análisis estructura reticulada sencilla



Introducción

Hipótesis

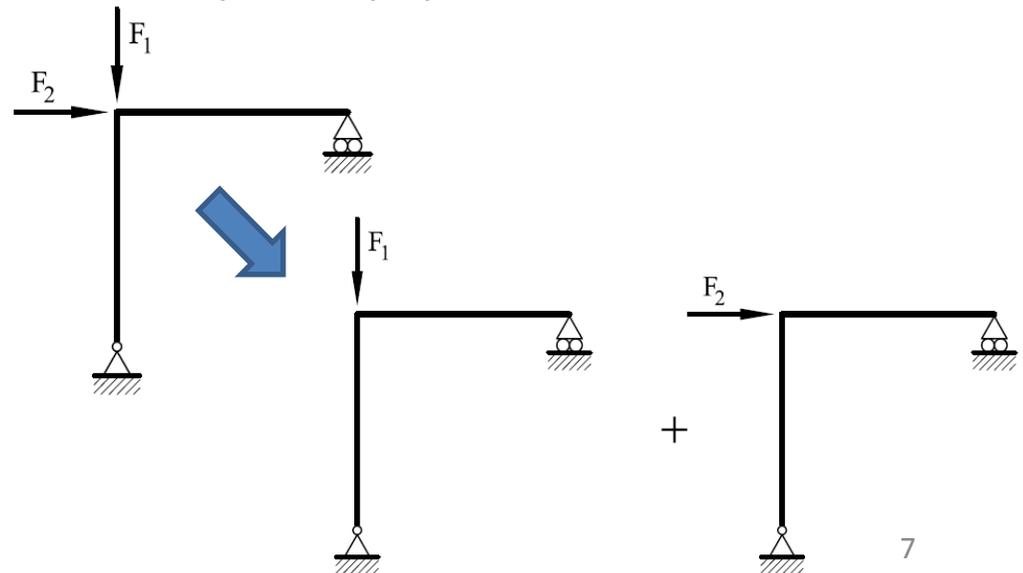
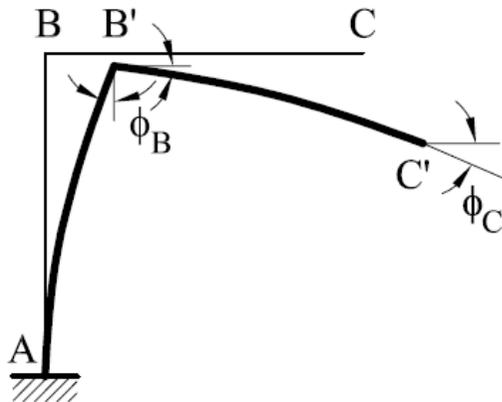
Linealidad geométrica
(pequeñas deformaciones)
Linealidad del material
(Hooke generalizada)

Simplificaciones

Solución única al aplicar
las condiciones de
equilibrio y compatibilidad
Simplificación del problema

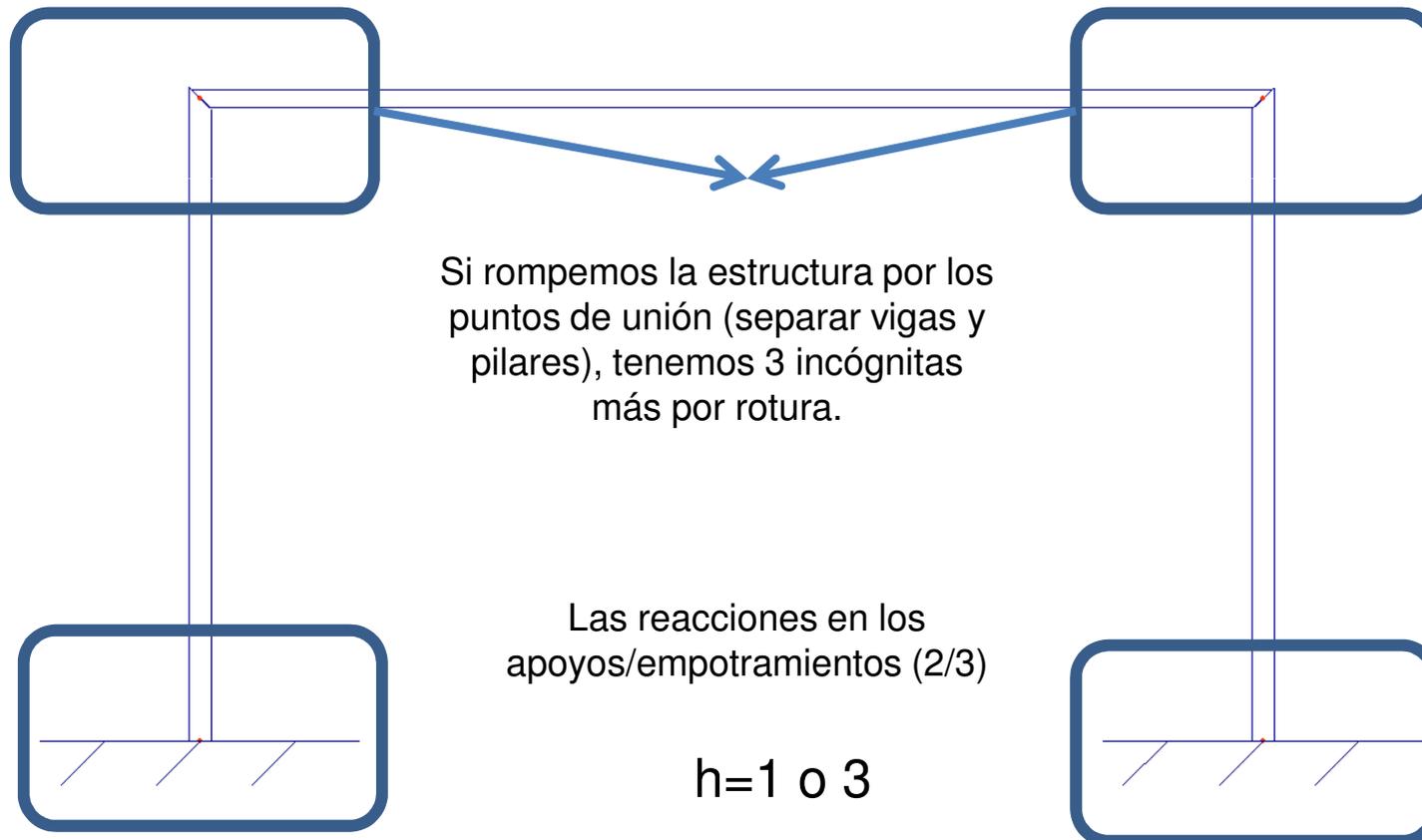
Plantear ecuaciones de equilibrio
sobre estructura original

Principio de superposición



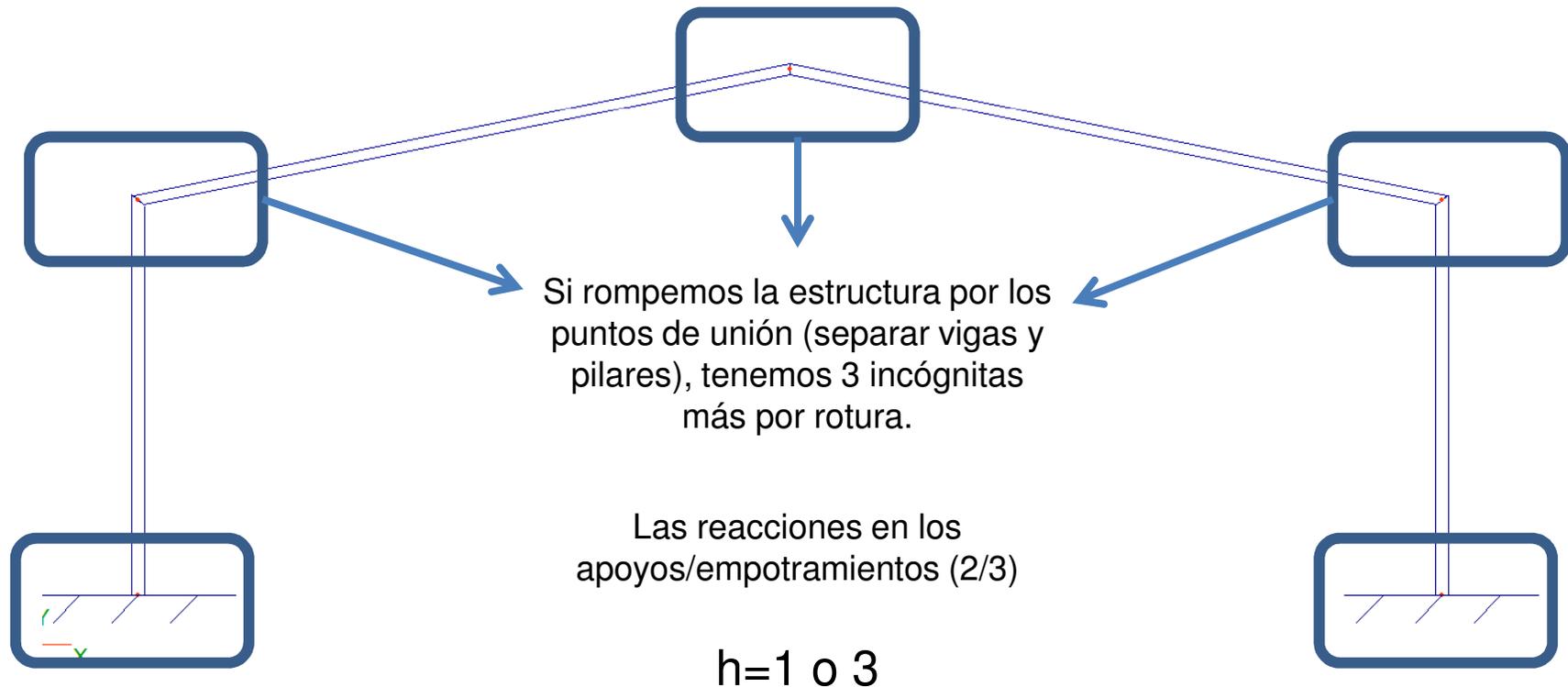
Introducción

- Grado de indeterminación estática o de hiperestaticidad (**h**): número de reacciones adicionales a las ecuaciones de equilibrio.



Indeterminación estática (Grado de Hipertatismo)

- Grado de indeterminación estática o de hiperestaticidad (h): número de reacciones adicionales a las ecuaciones de equilibrio.



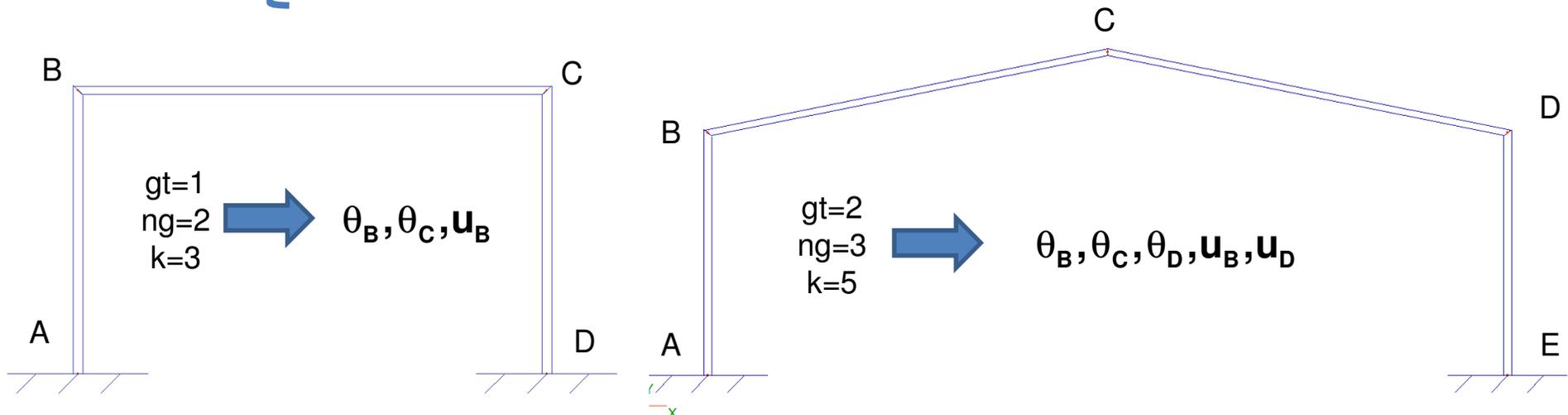
Introducción

- **Grado de indeterminación cinemática (k):** número mínimo de movimientos (desplazamientos o giros) que es necesario conocer para determinar completamente su estado de deformaciones

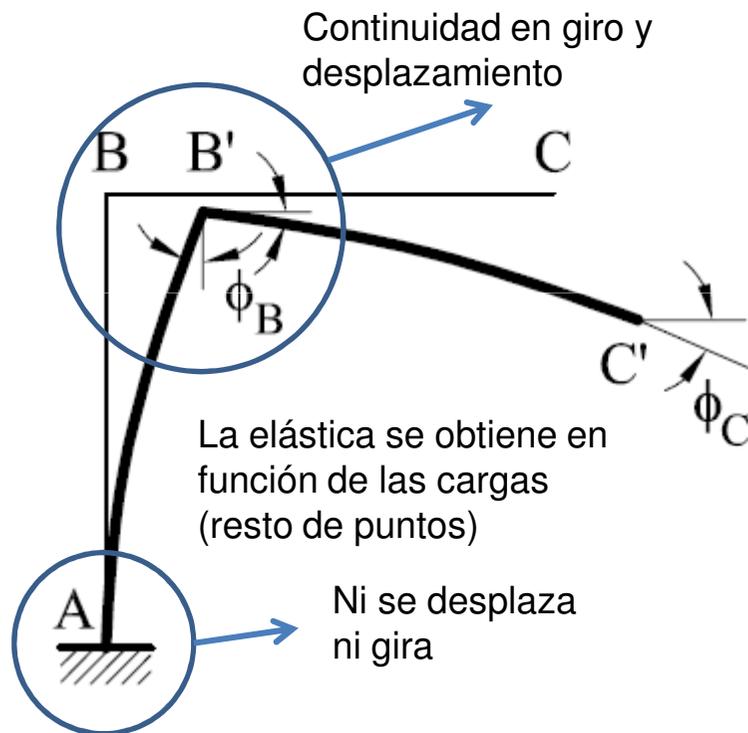
$$k = gt + ng$$

Grado de traslacionalidad (gt) número de movimientos independientes de sólido rígido de las barras (traslaciones o giros alrededor de sus CIRs). **gt** se puede obtener aproximando la estructura reticulada por una articulada de barras rígidas. El valor del grado de libertad del mecanismo rígido es el valor de **gt**.

ng: número de giros de nudos desconocidos



Introducción



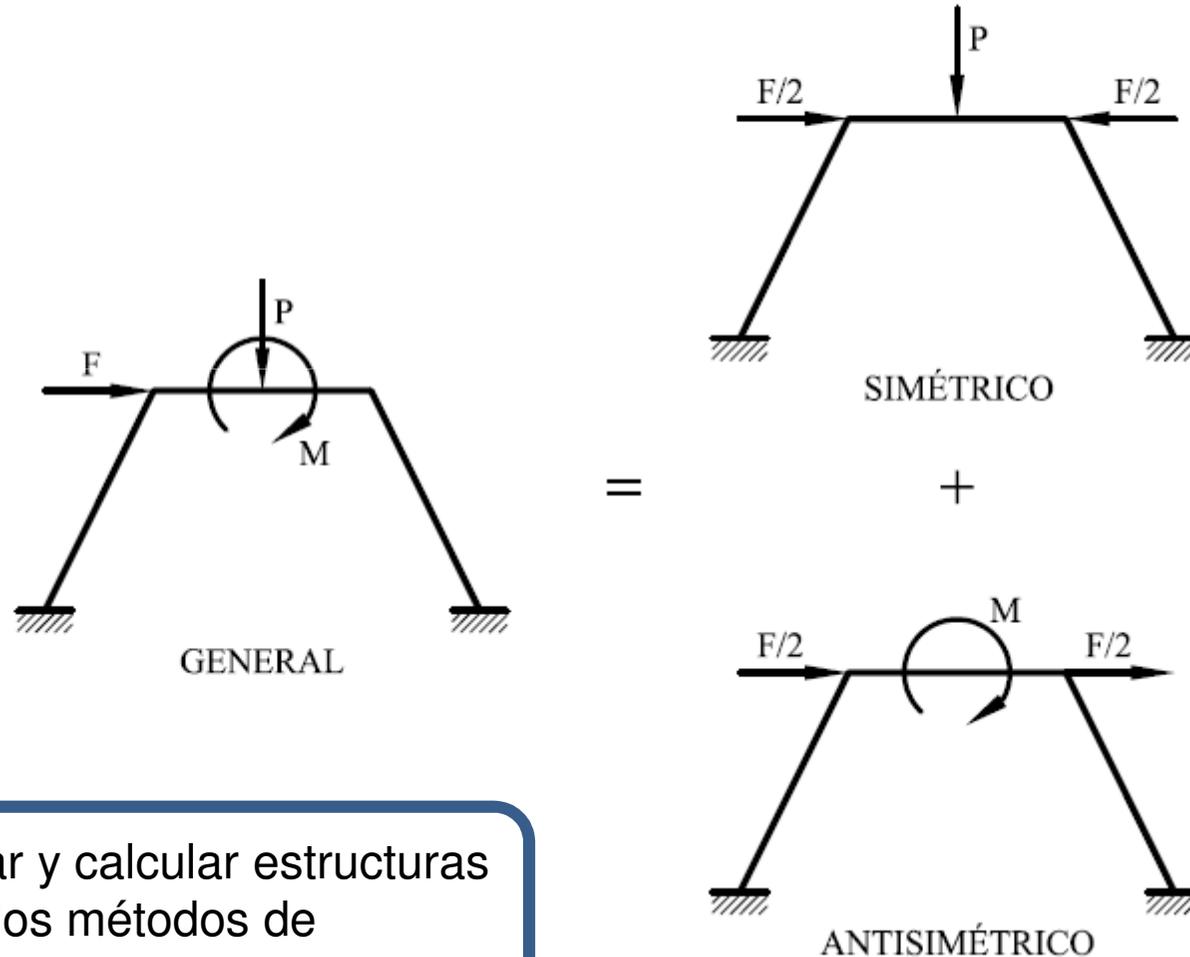
Notas

- Métodos de compatibilidad y equilibrio se desprecia la deformación en axil.
- Método de rigidez se considera la deformación en axil.
- Objetivo es conocer: reacciones en los apoyos, desplazamientos y giros en los extremos de cada una de las barras, dibujar diagramas de cortante y flector y dibujar la curva de la elástica aproximada

Introducción

- Una estructura es simétrica respecto a un eje cuando presenta simetría de forma y de características mecánicas (rigidez a flexión, axil, cortante y torsión)
- A continuación se analizan estructuras reticuladas planas simétricas respecto a un eje. Las conclusiones se podrán aplicarse a otras situaciones.
- La carga puede ser simétrica o antisimétrica respecto a ese eje de simetría.
- Cualquier estado de carga puede descomponerse en un esta simétrico + antisimétrico de carga.
- A continuación se verá las simplificaciones (reducción del grado de indeterminación estática y cinemática) que pueden considerarse para estructuras simétricas con estados de cargas simétrico y antisimétricos.

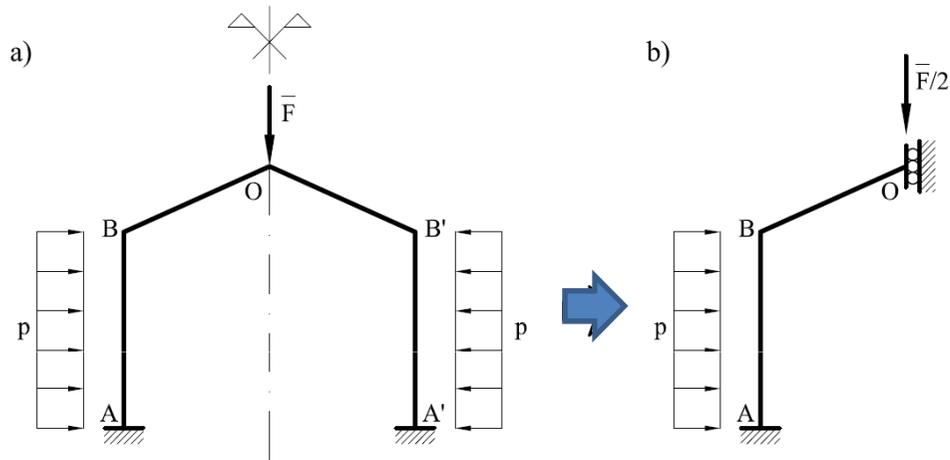
Introducción



Útil para analizar y calcular estructuras reticuladas por los métodos de compatibilidad y equilibrio.

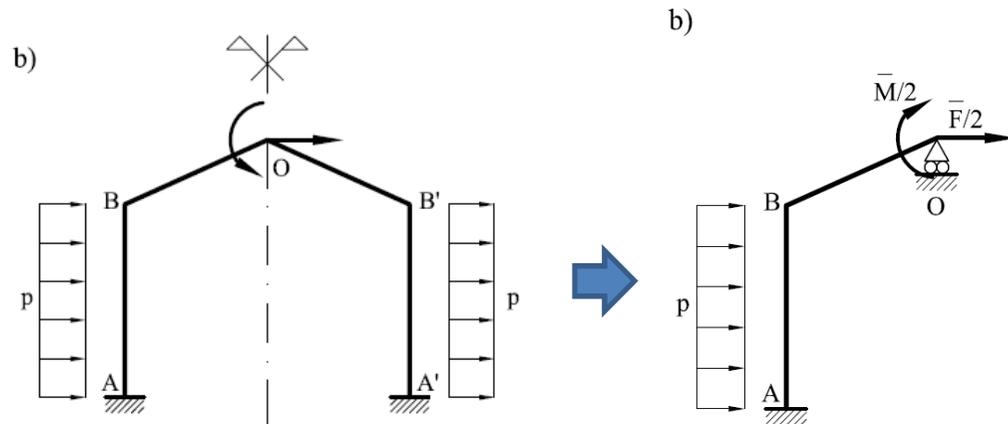
Introducción

Simétrico



h se reduce de 3 a 2
k se reduce de 5 a 2

Antisimétrico



h se reduce de 3 a 1
k se reduce de 5 a 3

Método de compatibilidad.

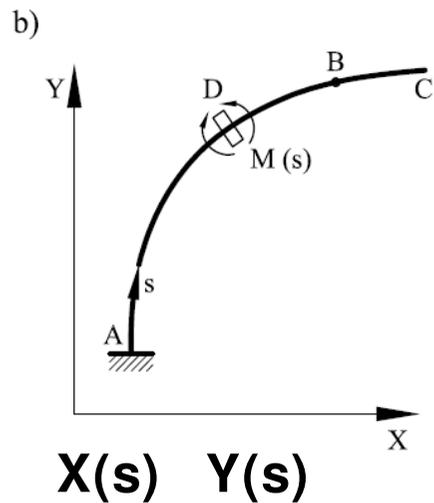
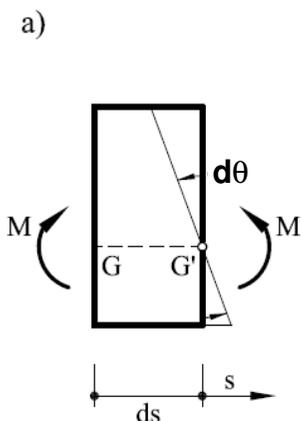
Ecuación de Navier

Página 76 Cervera

$$y''(x) = \chi_0(x) + \frac{M_z(x)}{EI_z}$$



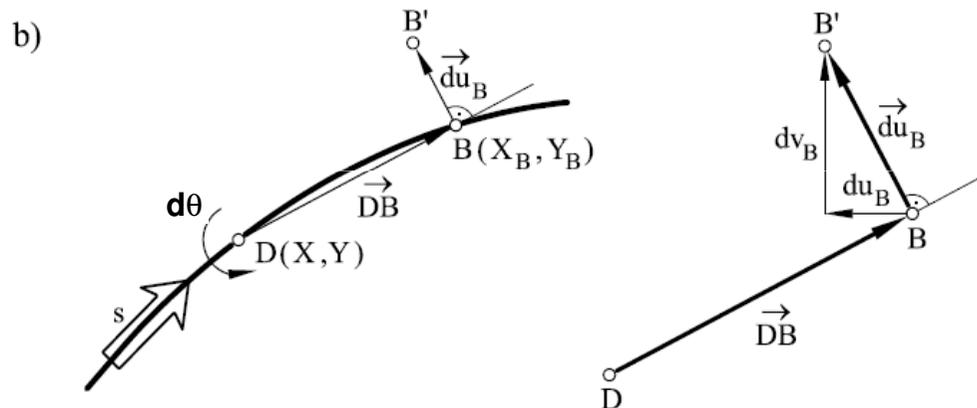
$$d\theta = \left(\chi_0 + \frac{M_z}{EI_z} \right) ds$$



Coordenadas en función de la estructura

Los desplazamientos de los puntos se indican con las coordenadas del vector formado por el punto original y el punto tras la deformación.

Si se plantea el problema desde el punto de vista diferencial:



$$d\theta_B = d\theta(s)$$

$$\vec{du}_B = \vec{BB}' = d\theta \times \vec{DB}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & d\theta(s) \\ X_B - X(s) & Y_B - Y(s) & 0 \end{vmatrix}$$

Método de compatibilidad. Ecuación de Navier

$$d\theta_B = d\theta(s)$$

$$\vec{du}_B = \vec{BB}' = d\vec{\theta} \times \vec{DB}$$

Si se tiene en cuenta desplazamiento y giros en A

$$\text{y } d\theta = \left(\chi_0 + \frac{M_z}{EI_z} \right) ds$$

Este término es cero si no se consideran deformaciones impuestas

$$\theta_B = \int_A^B d\theta(s)$$

$$u_B = -\int_A^B (Y_B - Y(s)) d\theta(s)$$

$$v_B = \int_A^B (X_B - X(s)) d\theta(s)$$

FÓRMULAS DE NAVIER

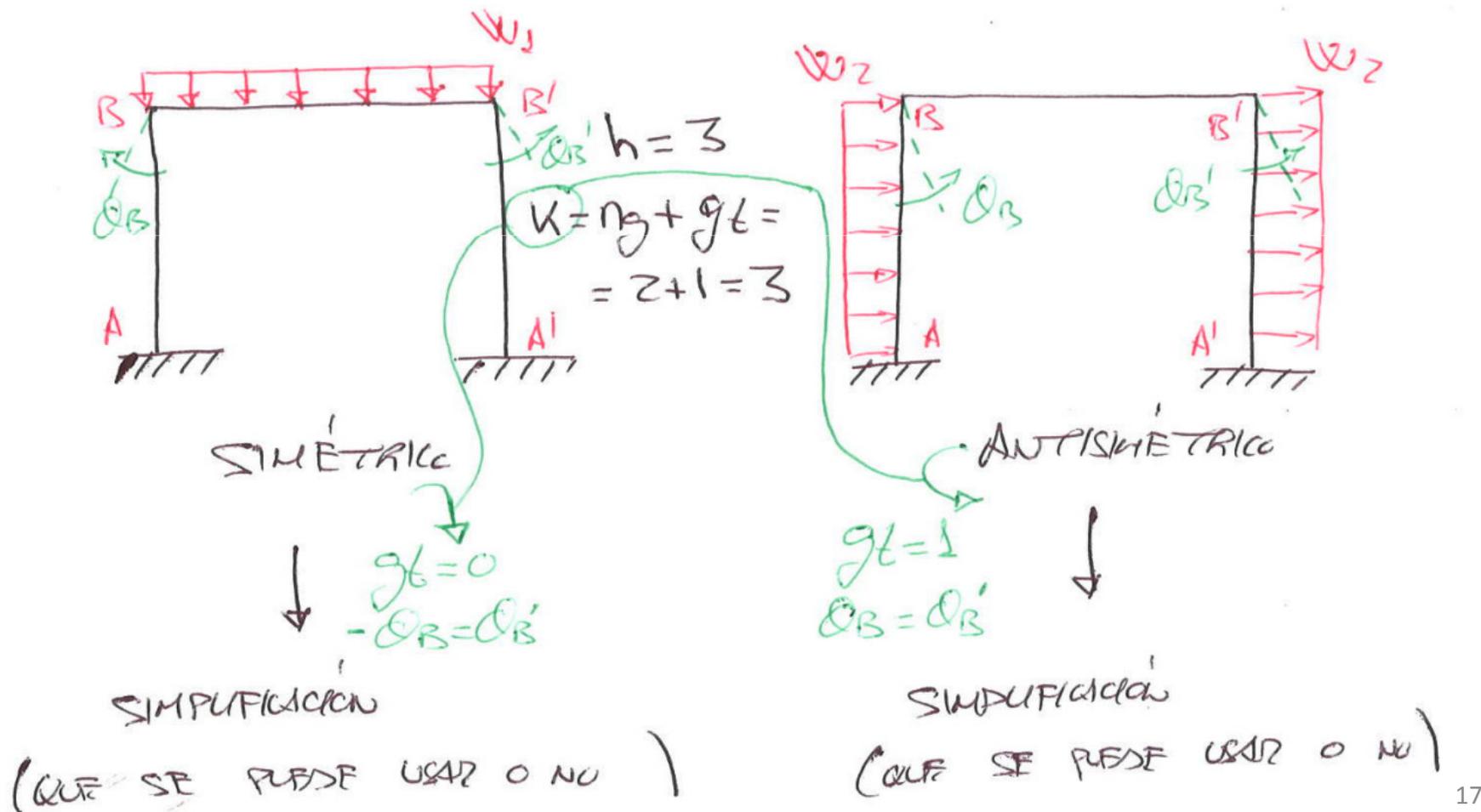
$$\theta_B = \theta_A + \int_A^B \left(\chi_0(s) + \frac{M(s)}{EI(s)} \right) ds$$

$$u_B = u_A - \theta_A (Y_B - Y_A) - \int_A^B \left(\left(\chi_0(s) + \frac{M(s)}{EI(s)} \right) (Y_B - Y(s)) ds \right)$$

$$v_B = v_A - \theta_A (X_B - X_A) + \int_A^B \left(\left(\chi_0(s) + \frac{M(s)}{EI(s)} \right) (X_B - X(s)) ds \right)$$

Método de compatibilidad. Ecuación de Navier (Ejemplo)

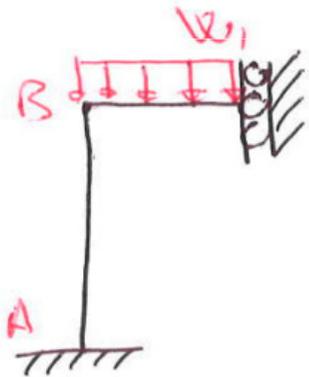
Se plantea un pórtico (edificio) que puede descomponerse en simétrico y antisimétrico



Método de compatibilidad. Ecuación de Navier (Ejemplo)

SIMPLIFICACIÓN

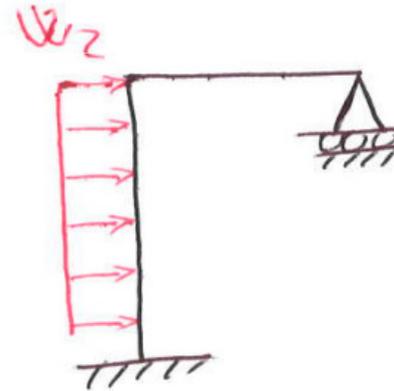
(QUE SE PUEDE USAR O NO)



$h=2$ (REDUCIDAS A DOS
ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD)

SIMPLIFICACIÓN

(QUE SE PUEDE USAR O NO)



$h=1$ (REDUCIDAS A UNA
ECUACION DE COMPATIBILIDAD)

Método de compatibilidad. Ecuación de Navier (Ejemplo)

SIMÉTRICO - COMPATIBILIDAD

RESTRICCIONES DE COMPATIBILIDAD

Ecuaciones de compatibilidad para obtener las dos incógnitas estáticas (N_c y M_c)

Las condiciones de compatibilidad son:

$$\theta_c = 0 \text{ y } \ell_c = 0$$

Las ecuaciones de compatibilidad que se pueden definir son:

$$\theta_c = \theta_A + \int_{s=0}^{s=\frac{3}{2}a} \left(\frac{M(s)}{EI} \right) ds = 0$$

DES PUNTOS $C \equiv s = \frac{3}{2}a$

$$\ell_c = \ell_A - \theta_A (Y_c - Y_A) - \int_A^C \left[\frac{M(s)}{EI} (Y_c - Y(s)) \right] ds = 0$$

Funciones de NAVIER

Método de compatibilidad. Ecuación de Navier (Ejemplo)

NOTAS:

① $\theta_A = u_A = Y_A = 0 \rightarrow$ SIMPLICES LAS ECUACIONES

② El momento flector hay que definirlo a tramos.

$$AB \equiv s \in (0, a)$$

$$BC \equiv s \in (a, \frac{3}{2}a)$$

$$M(s) = \begin{cases} -\frac{w}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 + M_c + N_c (a-s) & s \in (0, a) \\ -\frac{w}{2} \left(\frac{3}{2}a - s\right)^2 + M_c & s \in (a, \frac{3}{2}a) \end{cases}$$

$$\theta_c = \int_A^B \left[-\frac{w}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 + M_c + N_c (a-s) \right] \frac{1}{EI} ds + \int_B^C \left[-\frac{w}{2} \left(\frac{3}{2}a - s\right)^2 + M_c \right] \frac{1}{EI} ds$$

} CAMBIO DE
VARIABLES \rightarrow

$$t = \frac{3}{2}a - s \rightarrow dt = -ds$$

Método de compatibilidad. Ecuación de Navier (Ejemplo)

$$\mathcal{O}_C = -\frac{w}{8}a^3 + M_c \cdot a + N_c \cdot a^2 - N_c \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{w}{2} \frac{1}{3} \left(0 - \frac{1}{8}a^3\right) - M_c \left(0 - \frac{1}{2}a\right) \quad (4)$$

$$\sum M_c + N_c \cdot a - \frac{7}{24} w a^2 = 0 \quad (1)$$

Las ecuaciones (1) y (2) son las de compatibilidad

$$u_c = 0 = u_A - \theta_A (Y_c - Y_A) - \int_A^C \left[\frac{M(s)}{EI} (Y_c - Y(s)) \right] ds$$

$$Y_c = a ; Y(s) = \begin{cases} s ; s \in (0, a) \\ a ; s \in (a, \frac{3}{2}a) \end{cases} \quad \begin{cases} \rightarrow \text{VARIACION DE B A C} \\ Y_c - Y(s) = 0 \end{cases}$$

$$u_c = \frac{1}{EI} \int_{s=0}^{s=a} \left[-\frac{w}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 + M_c + N_c (a-s) \right] \cdot (a-s) ds =$$

$$t = a - s \\ \downarrow dt = -ds$$

$$= - \left[-\frac{w}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{t^2}{2} + M_c \frac{t^2}{2} + N_c \frac{t^3}{3} \right]_{t=a}^{t=0} = -\frac{w}{2} \cdot \frac{a^4}{8} + M_c \frac{a^2}{2} + N_c \frac{a^3}{3}$$

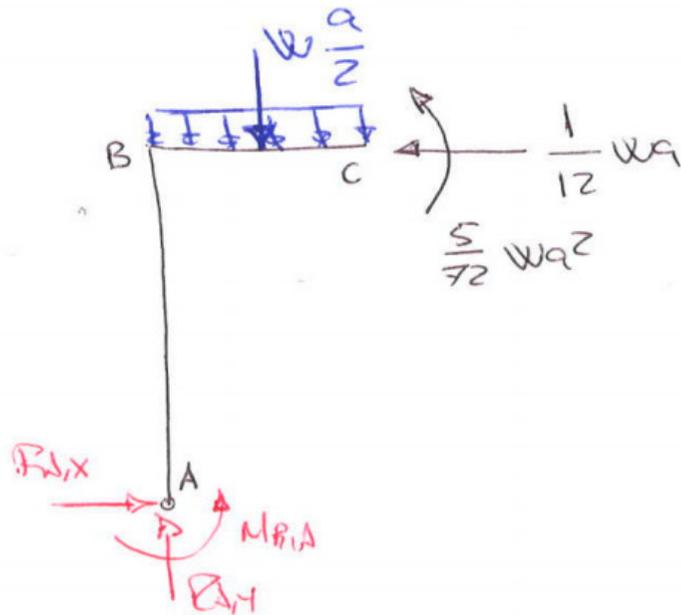
$$\sum M_c + 2N_c \cdot a - \frac{3}{8} w a^2 = 0 \quad (2)$$

Método de compatibilidad. Ecuación de Navier (Ejemplo)

⊗ (1) y (2) son las ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD.

$$N_c = \frac{1}{12} w a$$

$$M_c = \frac{5}{72} w a^2$$



$$\sum F_x = 0; \rightarrow R_{A,x} = \frac{1}{12} w a$$

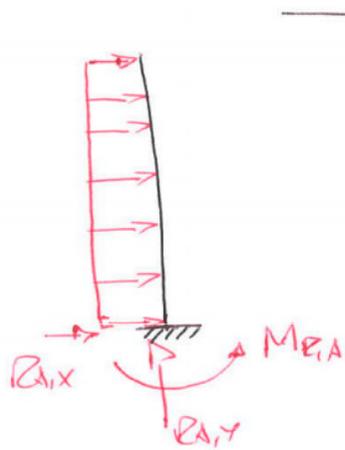
$$\sum F_y = 0; \rightarrow R_{A,y} = w \cdot \frac{a}{2}$$

$$\sum M_A = 0; M_{R,A} = -\frac{5}{72} w a^2 + w \cdot \frac{a^2}{8} - \frac{1}{12} w a^2$$

$$M_{R,A} = -\frac{1}{36} w a^2$$

Método de compatibilidad. Ecuación de Navier (Ejemplo)

ANTISIMÉTRICO - COMPATIBILIDAD



CONDICIÓN DE COMPATIBILIDAD $v_C = 0$

DOS ZANOS DE $M(s)$

$$v_C = \cancel{v_A} + \cancel{\theta_A} (x_C - x_A) + \int_A^C \left[\frac{M(s)}{EI} (x_C - x(s)) \right] ds$$

$$\left. \begin{array}{l} s \in (0, a) \rightarrow AB \\ s \in (a, \frac{3}{2}a) \rightarrow BC \end{array} \right\}$$

ZONA AB $M(s) = V_C \cdot \frac{a}{2} - w \cdot \frac{(a-s)^2}{2}$

ZONA BC $M(s) = V_C \cdot \left(\frac{3}{2}a - s \right)$

$$v_C = 0 = \int_{s=0}^{s=a} \left[V_C \cdot \frac{a}{2} - w \frac{(a-s)^2}{2} \right] \left(\frac{a}{2} - 0 \right) ds + \int_{s=a}^{s=\frac{3}{2}a} V_C \cdot \left(\frac{3}{2}a - s \right) \left(\frac{a}{2} - s + a \right) ds$$

① → CAMBIO VARIABLE
 $t = a - s \rightarrow dt = -ds$

② → CAMBIO DE VARIABLE
 $t = \frac{3}{2}a - s \rightarrow dt = -ds$

Método de equilibrio.

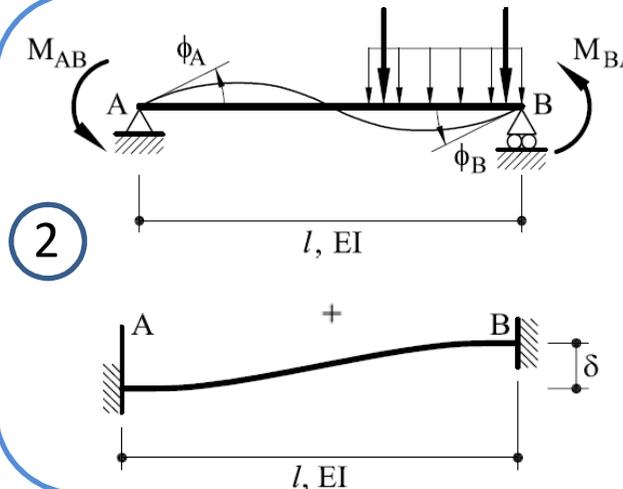
Ecuaciones Elásticas

Ecuaciones elásticas: permiten calcular los esfuerzos en una pieza en función de sus movimientos (desplazamientos y giros) y de la carga soportada por la barra.

- 1 Pieza recta sin desplazamiento transversal entre sus extremos

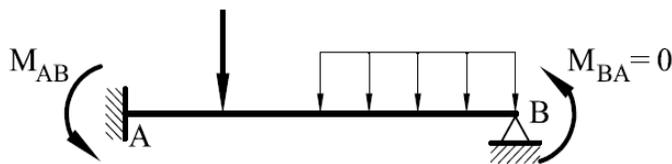


Ejemplo útil para barras que están empotradas o en nudos que no tienen desplazamiento (solo giro).



Método para deducir las ecuaciones de una pieza recta con desplazamiento transversal entre sus extremos
Es decir, si tenemos el caso (1) y hay desplazamiento relativo entre nodos.

3



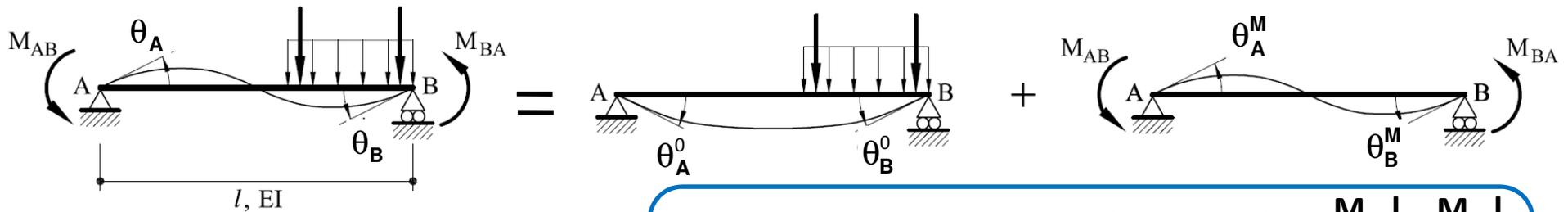
Pieza recta articulada en uno de sus extremos (momento cero). Plantear también las ecuaciones generales (con desplazamiento transversal entre sus extremos).

Es decir, que un de los extremos de la barra estén articulados (bien el nodo bien el apoyo).

(ver los problemas que tuvieron el año pasado)

Método de equilibrio. Ecuaciones Elásticas

Ecuaciones elásticas de una pieza recta sin desplazamiento transversal entre extremos



Para resolver se emplea el método de superposición, donde se separa por un lado la viga biapoyada con las cargas externas y por otro los giros impuestos.

θ_A^0
 θ_B^0 → Tablas

$$\theta_A^M = \theta_A(M_{AB}) + \theta_A(M_{BA}) = +\frac{M_{AB}l}{3EI} - \frac{M_{BA}l}{6EI}$$

$$\theta_B^M = \theta_B(M_{AB}) + \theta_B(M_{BA}) = -\frac{M_{AB}l}{6EI} + \frac{M_{BA}l}{3EI}$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{l}(2\theta_A + \theta_B) + M_{AB}^0$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{l}(2\theta_B + \theta_A) + M_{BA}^0$$

$$M_{AB}^0 = -\frac{2EI}{l}(2\theta_A^0 + \theta_B^0)$$

$$M_{BA}^0 = -\frac{2EI}{l}(2\theta_B^0 + \theta_A^0)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\theta_A = +\frac{M_{AB}l}{3EI} - \frac{M_{BA}l}{3EI} + \theta_A^0$$

$$\theta_B^M = -\frac{M_{AB}l}{6EI} + \frac{M_{BA}l}{3EI} + \theta_B^0$$

Buscar ecuaciones de equilibrio

Incógnitas cinemáticas

Tablas

Método de equilibrio. Ecuaciones Elásticas

Ecuaciones elásticas de una pieza recta sin desplazamiento transversal entre extremos

$$M_{AB} = \frac{2EI}{l}(2\theta_A + \theta_B) + M_{AB}^0$$

$$M_{AB}^0 = -\frac{2EI}{l}(2\theta_A^0 + \theta_B^0)$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{l}(2\theta_B + \theta_A) + M_{BA}^0$$

$$M_{BA}^0 = -\frac{2EI}{l}(2\theta_B^0 + \theta_A^0)$$

Lo importante de estas ecuaciones son las conclusiones siguientes:

Si no se aplican momentos en la viga, se simplifica las ecuaciones como sigue:

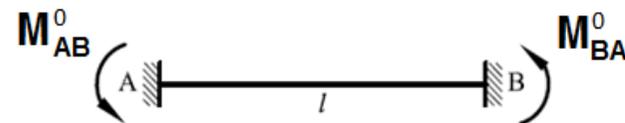
$$M_{AB} = \frac{2EI}{l}(2\theta_A + \theta_B)$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{l}(2\theta_B + \theta_A)$$

Si los giros θ_A, θ_B son cero, es decir, la viga es biempotrada, los momentos solo dependen de las cargas:

$$M_{AB} = M_{AB}^0$$

$$M_{BA} = M_{BA}^0$$



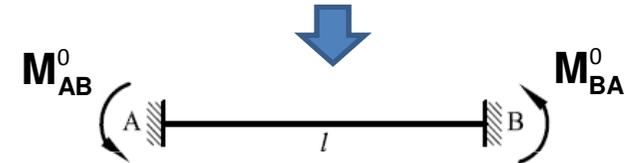
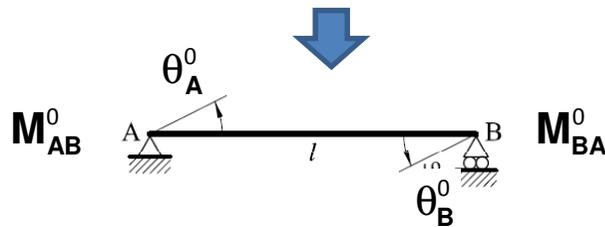
Momentos de una viga a la que se le imponen los giros

Método de equilibrio. Ecuaciones Elásticas

Ecuaciones elásticas de una pieza recta sin desplazamiento transversal entre extremos

$$M_{AB}^0 = -\frac{2EI}{l}(2\theta_A^0 + \theta_B^0) \quad M_{BA}^0 = -\frac{2EI}{l}(2\theta_B^0 + \theta_A^0)$$

$$M_{AB} = M_{AB}^0 \quad M_{BA} = M_{BA}^0$$

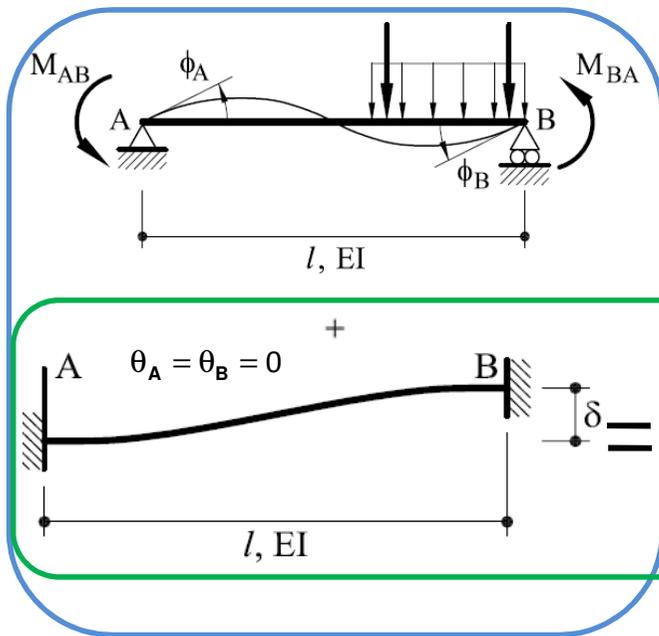


CARGA	θ_A^0	θ_B^0
	$-\frac{Pab}{6EI}(l+b)$	$+\frac{Pab}{6EI}(l+a)$
	$-\frac{pl^3}{24EI}$	$+\frac{pl^3}{24EI}$
	$-\frac{7}{360} \frac{pl^3}{EI}$	$+\frac{1}{45} \frac{pl^3}{EI}$
	$-\frac{Ml}{6EI}(3\frac{b^2}{l^2}-1)$	$-\frac{Ml}{6EI}(3\frac{a^2}{l^2}-1)$

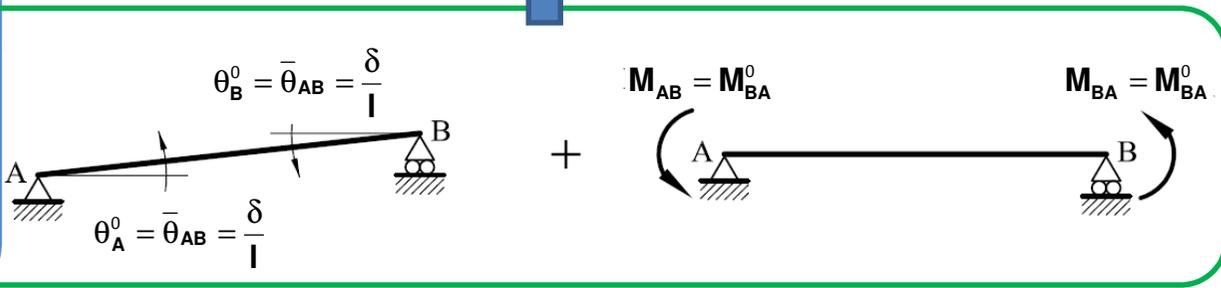
CARGA	M_{AB}^0	M_{BA}^0
	$+\frac{Pab^2}{l^2}$	$-\frac{Pa^2b}{l^2}$
	$+\frac{pl^2}{12}$	$-\frac{pl^2}{12}$
	$+\frac{pl^2}{30}$	$-\frac{pl^2}{20}$
	$-b(2a-b) \frac{M}{l^2}$	$-a(2b-a) \frac{M}{l^2}$

Método de equilibrio. Ecuaciones Elásticas

Ecuaciones elásticas de una pieza recta con desplazamiento transversal relativo entre extremos



$$\theta_A = \theta_B = 0 \Rightarrow \begin{cases} M_{AB} = M_{AB}^0 = -\frac{2EI}{l}(2\theta_A^0 + \theta_B^0) = -\frac{6EI}{l}\bar{\theta}_{AB} \\ M_{BA} = M_{BA}^0 = -\frac{2EI}{l}(2\theta_B^0 + \theta_A^0) = -\frac{6EI}{l}\bar{\theta}_{AB} \end{cases}$$

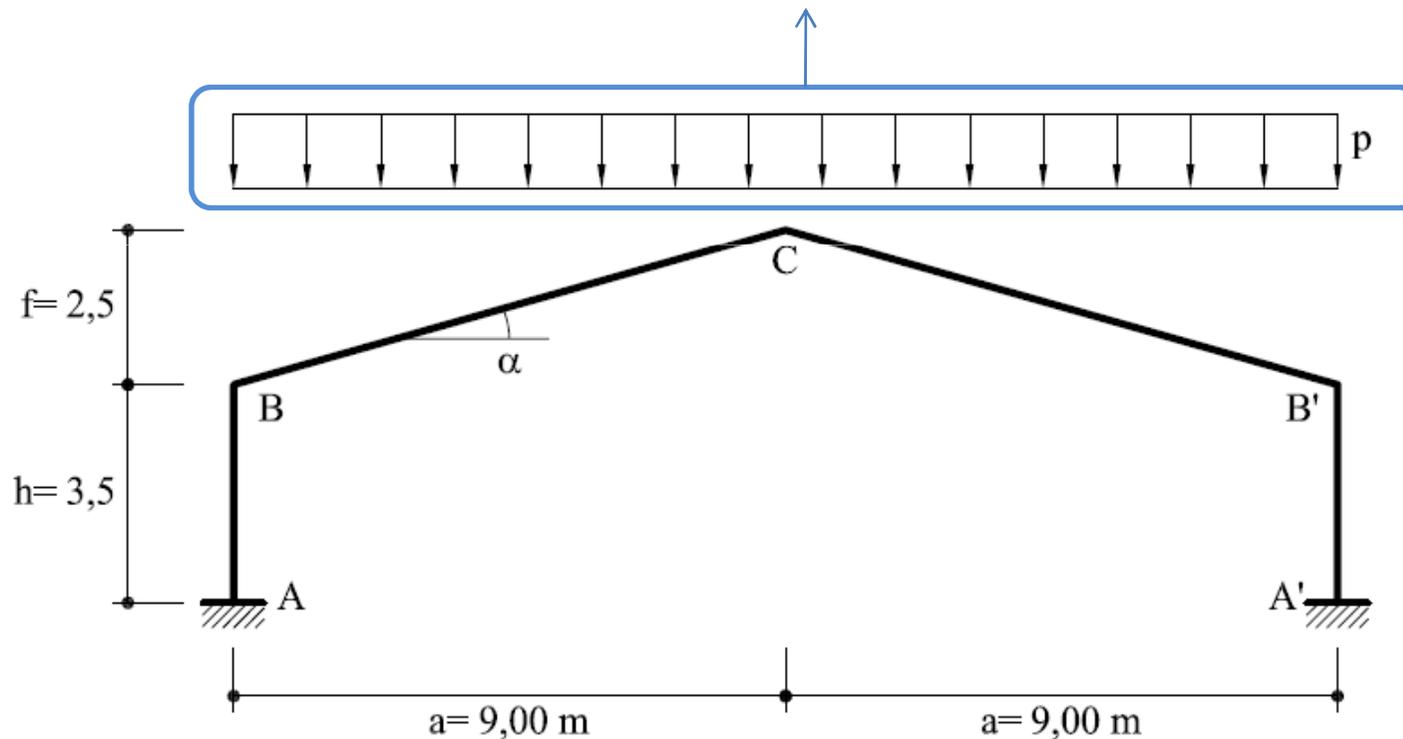


$$\begin{aligned} M_{AB} &= \frac{2EI}{l}(2\theta_A + \theta_B) + M_{AB}^0 - \frac{6EI}{l}\bar{\theta}_{AB} \\ M_{BA} &= \frac{2EI}{l}(2\theta_B + \theta_A) + M_{BA}^0 - \frac{6EI}{l}\bar{\theta}_{AB} \end{aligned}$$

Es la expresión más general

Método de equilibrio. Ecuaciones Elásticas

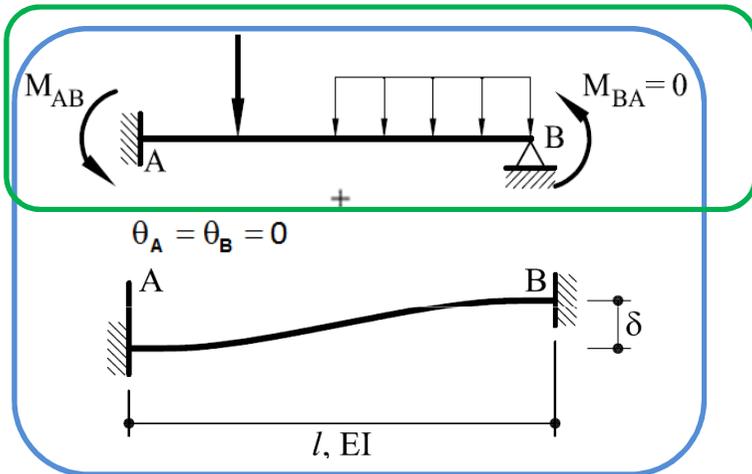
Matizar representación de la fuerza.
Comparar con peso propio de la viga



Los nodos B , C y B' se mueven. Por lo tanto, hay que estudiar el desplazamiento relativo entre nudos (pórtico traslacional)

Método de equilibrio. Ecuaciones Elásticas

Ecuaciones elásticas de una pieza recta articulada en uno de sus extremos



En esta deducción se contempla la posibilidad de desplazamiento transversal relativo entre sus extremos, que se representan como una viga empotrada sin cargas.

$$M_{BA} = 0 = \frac{2EI}{l}(2\theta_B + \theta_A) + M_{BA}^0 - \frac{6EI}{l}\bar{\theta}_{AB}$$

$$\theta_B = -\frac{1}{2}\theta_A + \frac{3}{2}\bar{\theta}_{AB} - \frac{l}{4EI}M_{BA}^0$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{l}(2\theta_A + \theta_B) + M_{AB}^0 - \frac{6EI}{l}\bar{\theta}_{AB}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{l}(2\theta_B + \theta_A) + M_{BA}^0 - \frac{6EI}{l}\bar{\theta}_{AB}$$

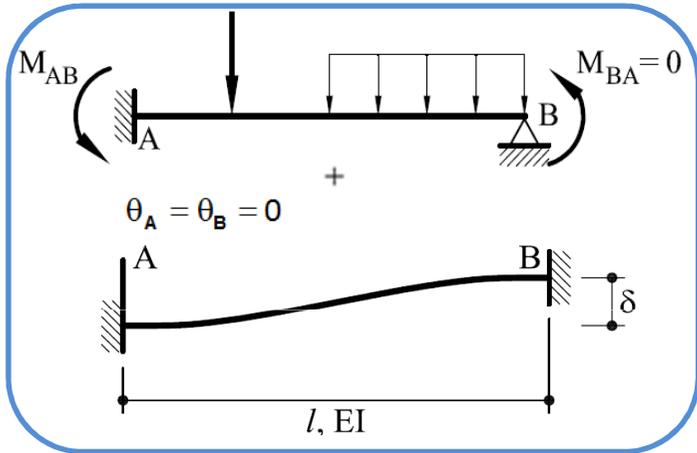
$$M_{AB} = \frac{3EI}{l}\theta_A - \frac{3EI}{l}\bar{\theta}_{AB} + M_{AB}^0 - \frac{1}{2}M_{BA}^0$$

$$M_{AB} = \frac{3EI}{l}\theta_A - \frac{3EI}{l}\bar{\theta}_{AB} + (M_{AB}^0)^*$$

Tablas

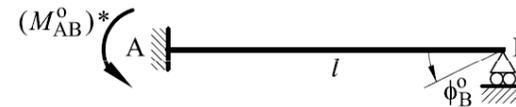
Método de equilibrio. Ecuaciones Elásticas

Ecuaciones elásticas de una pieza recta articulada en uno de sus extremos



$$M_{AB} = \frac{3EI}{l} \theta_A - \frac{3EI}{l} \theta_B + (M_{AB}^0)^*$$

Tablas



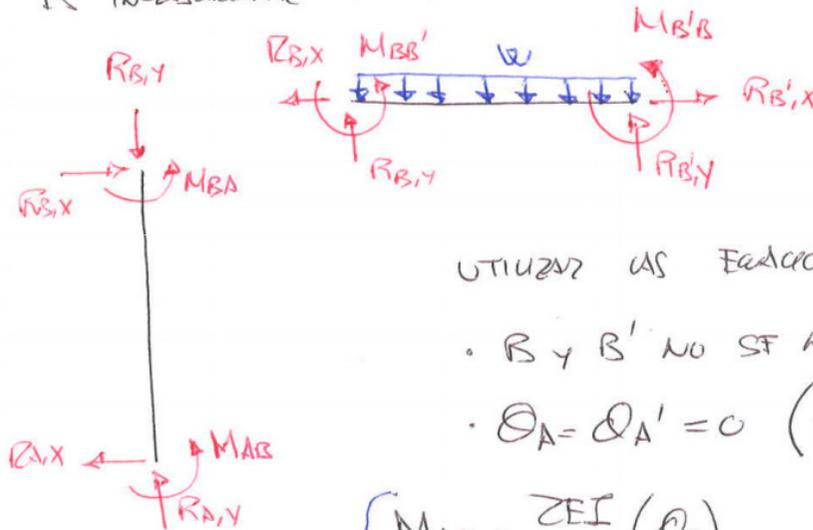
CARGA	$(M_{AB}^0)^*$	ϕ_B^0
	$+\frac{Pb}{2l^2}(l^2-b^2)$	$+\frac{Pa^2b}{4EI}$
	$+\frac{pl^2}{8}$	$+\frac{pl^3}{48EI}$
	$+\frac{pl^2}{15}$	$+\frac{pl^3}{120EI}$
	$-\frac{M}{2l^2}(l^2-3b^2)$	$+\frac{M}{4EI}(4lb+l^2+3b^2)$

Método de equilibrio. Ecuaciones Elásticas (Ejemplo)

SIMÉTRICO - EQUILIBRIO

(5)

⊗ NO HACE FALTA LA SIMPLIFICACIÓN POR SIMETRÍA, ES ÚTIL SABER QUE EL PÓRTICO ES INDEFORMABLE \rightarrow SOLO HAY GIROS.



UTILIZAR LAS ECUACIONES ELÁSTICAS SABIENDO QUE:

- B y B' NO SE MUEVEN ; $\theta_B = -\theta_{B'}$
- $\theta_A = \theta_{A'} = 0$ (EMPOZAMIENTO)

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{AB} = \frac{2EI}{a} (\theta_B) \\ M_{BA} = \frac{2EI}{a} (2\theta_B) \\ M_{BB'} = \frac{2EI}{a} (2\theta_B - \theta_{B'}) + \frac{w a^2}{12} = \frac{2EI}{a} \theta_B + \frac{w a^2}{12} \\ M_{B'B} = -\frac{2EI}{a} \theta_B - \frac{w a^2}{12} \end{array} \right.$$

PRINCIPALES ECUACIONES DE EQUILIBRIO (EN NODOS)

Método de equilibrio. Ecuaciones Elásticas (Ejemplo)

$$\sum M_B = 0; \rightarrow M_{BA} + M_{BB'} = 0; \quad \frac{2EI}{a} \theta_B + \frac{2EI}{a} \theta_B + \frac{W a^2}{12} = 0;$$

$$\theta_B = -\frac{W a^2}{12EI}$$

$$M_{AB} = M_{BA} = \frac{2EI}{a} \left(-\frac{W a^2}{12EI} \right) = -\frac{1}{36} W a^2$$

⊗ Igual que en equilibrio

⊗ Se pueden plantear ecuaciones en elementos para conocer el estado de esfuerzos. Es importante conocer el estado de momento en los nodos (Ayuda a dibujar los diagramas).

$$\sum M_B = 0; \quad M_{AB} + M_{BA} = R_{A,x} = 0 \rightarrow R_{A,x} = \frac{1}{12} W a^2$$

(BARRA VERTICAL)

↪ Igual que por compatibilidad.

$$\sum F_y = 0; \quad R_{A,y} = R_{B,y}$$

(BARRA VERTICAL)

$$\sum M_{B'} = 0; \quad \underline{M_{BB'} + M_{B'B}} + \frac{W a^2}{2} = R_{B,y} \cdot a;$$

(BARRA HORIZONTAL)

$$R_{A,y} = R_{B,y} = \frac{W a^2}{2}$$

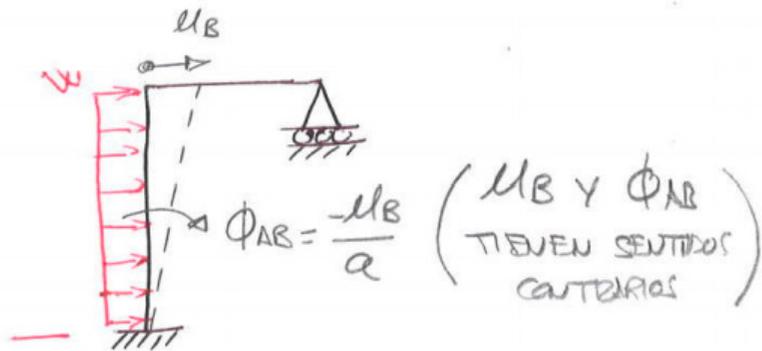
PARA COMPLETAR $M_{BB'} = -M_{B'B} = \frac{1}{18} W a^2$

Método de equilibrio. Ecuaciones Elásticas (Ejemplo)

ANTISIMÉTRICO - EQUILIBRIO

(7)

- EN ESTE CASO SE PUEDE RESOLVER UTILIZANDO LA ESTRUCTURA SIMPLIFICADA Y SIN SIMPLIFICAR. SE PUEDE LA SIMPLIFICACIÓN PARA VER LA UTILIDAD DE LAS ECUACIONES ELÁSTICAS CON EMPUJOS-APORTOS.



$$M_{AB} = \frac{2EI}{a} \phi_B + \frac{6EI}{a} \frac{u_B}{a} + \frac{wa^2}{12}$$

$$w_{B/C} = \frac{3EI}{(a/2)} \phi_B = \frac{6EI}{a} \phi_B$$

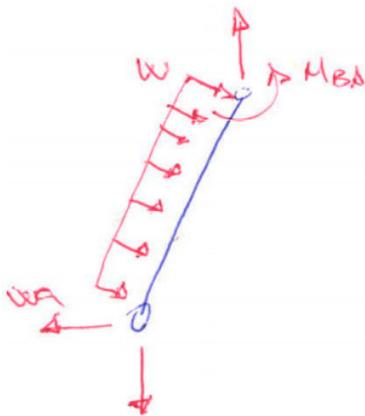
$\rightarrow K=2$ ($g_t=1$ porque el punto es fijo)

$$\rightarrow K = \frac{n_s + g_t}{\rightarrow \phi_B} \rightarrow u_B \text{ (o } \phi_{AB})$$

Método de equilibrio. Ecuaciones Elásticas (Ejemplo)

* La primera ecuación de equilibrio: $M_{BA} + M_{BC} = 0$

$$\frac{10EI}{a} \theta_B + \frac{6EI}{a^2} l_B - \frac{W a^2}{12} = 0 \quad (1)$$



⊗ LINEALIDAD GEOMÉTRICA

↳ ECUACIONES DE EQUILIBRIO DE LA ESTRUCTURA SIN DEFORMAR.

$$\sum M_A = 0; M_{AB} + M_{BA} - \frac{W a^2}{2} = 0$$

$$\frac{6EI}{a} \theta_B + \frac{12EI}{a^2} l_B - \frac{W a^2}{2} = 0 \quad (2)$$

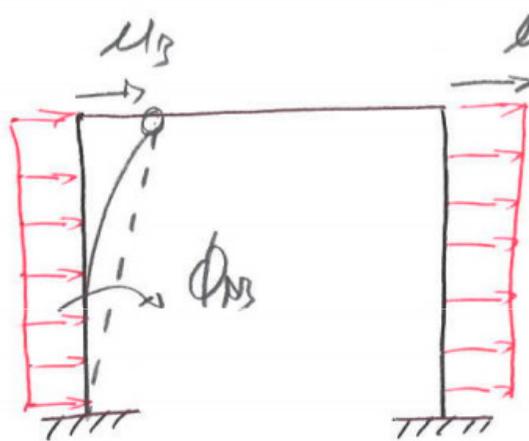
$$(1) - (2) \rightarrow \begin{cases} \theta_B = -\frac{W a^3}{42EI} \\ l_B = \frac{3W a^4}{56EI} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} M_{AB} = -\frac{2}{42} W a^2 + \frac{9}{28} W a^2 + \\ + \frac{1}{12} W a^2 = \frac{5}{14} W a^2 \end{cases}$$

⊗ IGUAL CEF POR MÉTODOS DE COMPATIBILIDAD

Método de equilibrio. Ecuaciones Elásticas (Ejemplo)

⊗ La idea SIN SIMPLIFICAR TAMBIÉN ES VIABLE

(8)



$$\theta_B = \theta_{B'} \quad \left\{ \begin{array}{l} K=2 \\ u_B = u_{B'} \end{array} \right.$$

$$M_{AB} = \frac{2EI}{a} \theta_B + \frac{6EI}{a} \frac{u_B}{a} + \frac{W a^2}{12}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{a} (2\theta_B) + \frac{6EI}{a} \frac{u_B}{a} - \frac{W a^2}{12}$$

$$M_{BB'} = \frac{2EI}{a} (3\theta_B)$$

$$\sum M_B = 0 ; \quad \boxed{\frac{10EI}{a} \theta_B + \frac{6EI}{a^2} u_B - \frac{W a^2}{12} = 0}$$

¡GUA! NO SE SIMPLIFICAN

Compatibilidad y Equilibrio.

Finalización de un ejercicio

RESULTADOS

SIMÉTRICO

$$R_{A,x} = \frac{1}{12} w a$$

$$R_{A,y} = \frac{1}{2} w a$$

$$M_{B,A} = -\frac{1}{36} w a^2$$

$$\theta_B = -\frac{w a^3}{72 E I}$$

ANTISIMÉTRICO

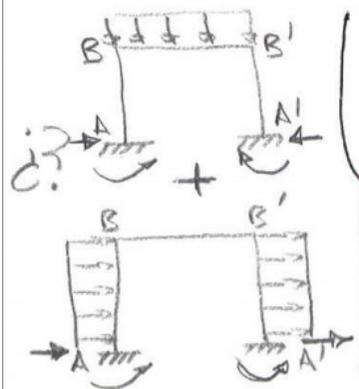
$$R_{A,x} = -w a$$

$$R_{A,y} = -\frac{2}{7} w a$$

$$M_{B,A} = \frac{5}{14} w a^2$$

$$\theta_B = -\frac{w a^3}{42 E I}$$

$$u_B = \frac{3 w a^4}{56 E I}$$



$$R_{A,x} = \frac{1}{12} w a - w a = -\frac{11}{12} w a ; R_{A',x} = \frac{13}{12} w a$$

$$R_{A,y} = \frac{1}{2} w a - \frac{2}{7} w a = \frac{-3}{14} w a ; R_{A',y} = -\frac{3}{14} w a$$

$$M_{B,A} = -\frac{1}{36} w a^2 + \frac{5}{14} w a^2 = 0,33 w a^2 ; M_{B,A'} = 0,38 w a^2$$

Compatibilidad y Equilibrio.

Finalización de un ejercicio

$$\theta_B = -0,0377 \frac{w a^3}{EI} \quad ; \quad \theta_{B'} = -0,01 \frac{w a^3}{EI}$$

(↻) (↻)

$$\Delta_B = \Delta_{B'} = \frac{3}{56} w a^4$$

DISORDEN

ES NECESARIO CONOCER LOS VALORES EN B Y B'

$$M_{B,A} = 0,33 w a^2 \rightarrow M(0) = -0,33 w a^2$$

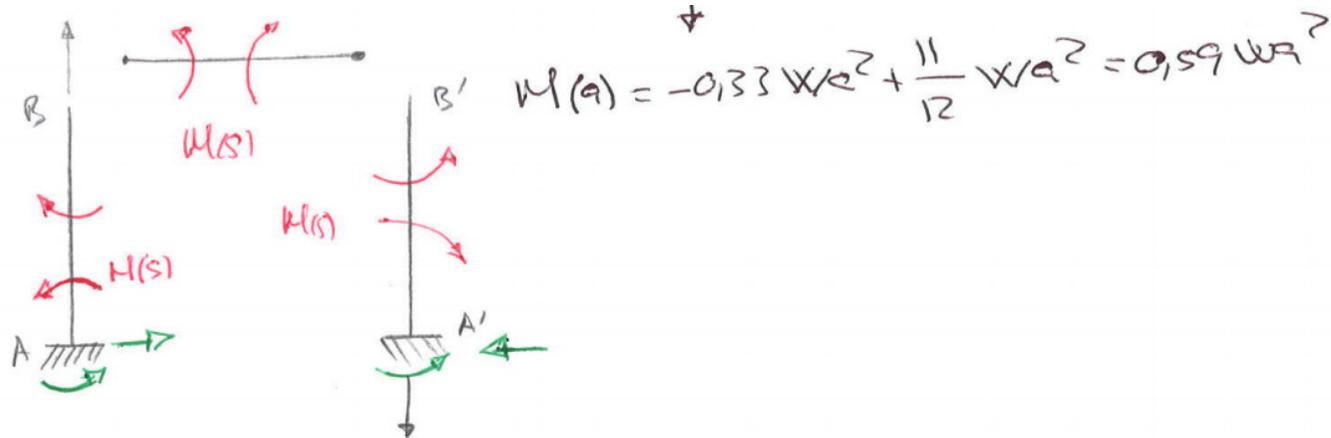
(↻)

$$R_{A,x} = -\frac{11}{12} w a \rightarrow M(s) = -0,33 w a^2 + \frac{11}{12} w a \cdot s$$

(→) SG(0,a)

Compatibilidad y Equilibrio.

Finalización de un ejercicio



$$M_{B,A'} = 0,38 w a^2 \rightarrow M(3a) = 0,38 w a^2$$

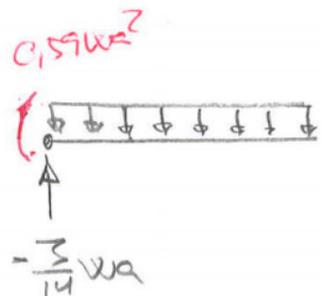
(↻)

$$R_{A',X} = + \frac{15}{12} w a \rightarrow M(s) = 0,38 w a^2 - (3a-s) \cdot \frac{13}{12} w a$$

(←)

SE(2a, 3a)

$$M(z) = -1,79 w a^2$$

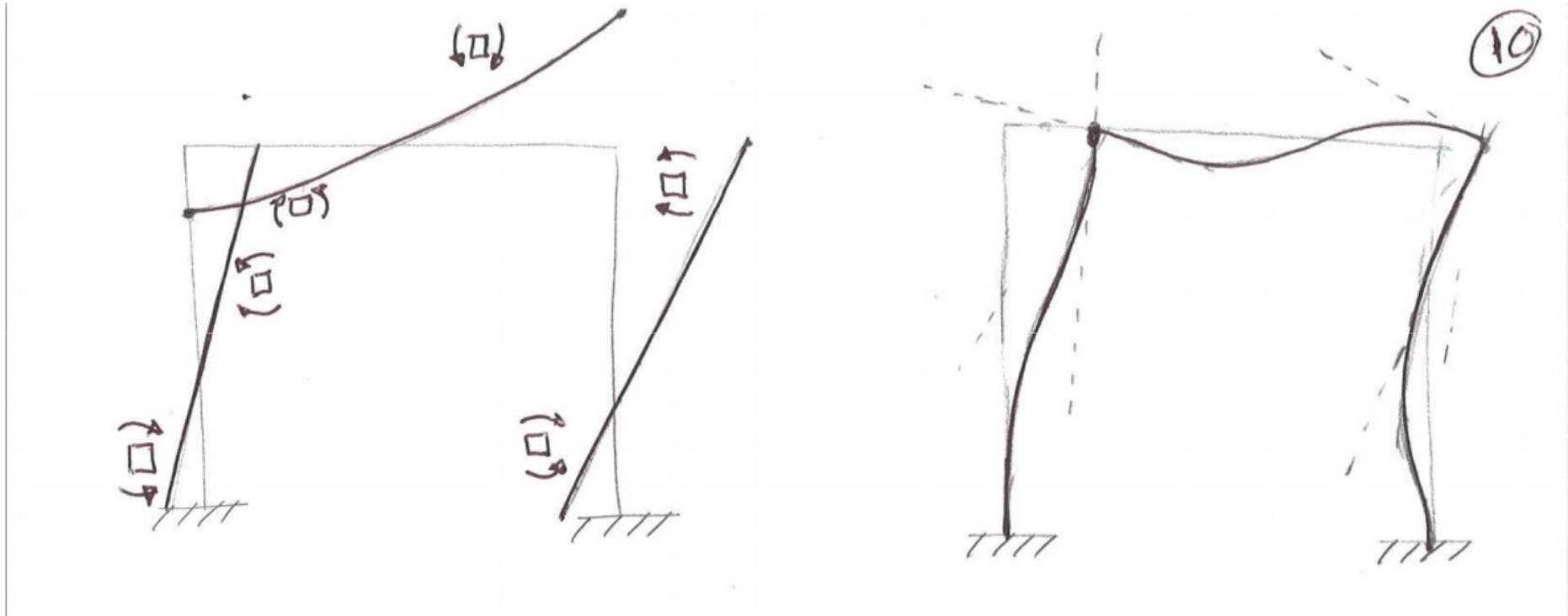


$$M(s) = 0,59 w a^2 - \frac{3}{14} w a (s-a) - w \frac{(s-a)^2}{2}$$

SE(a, z)

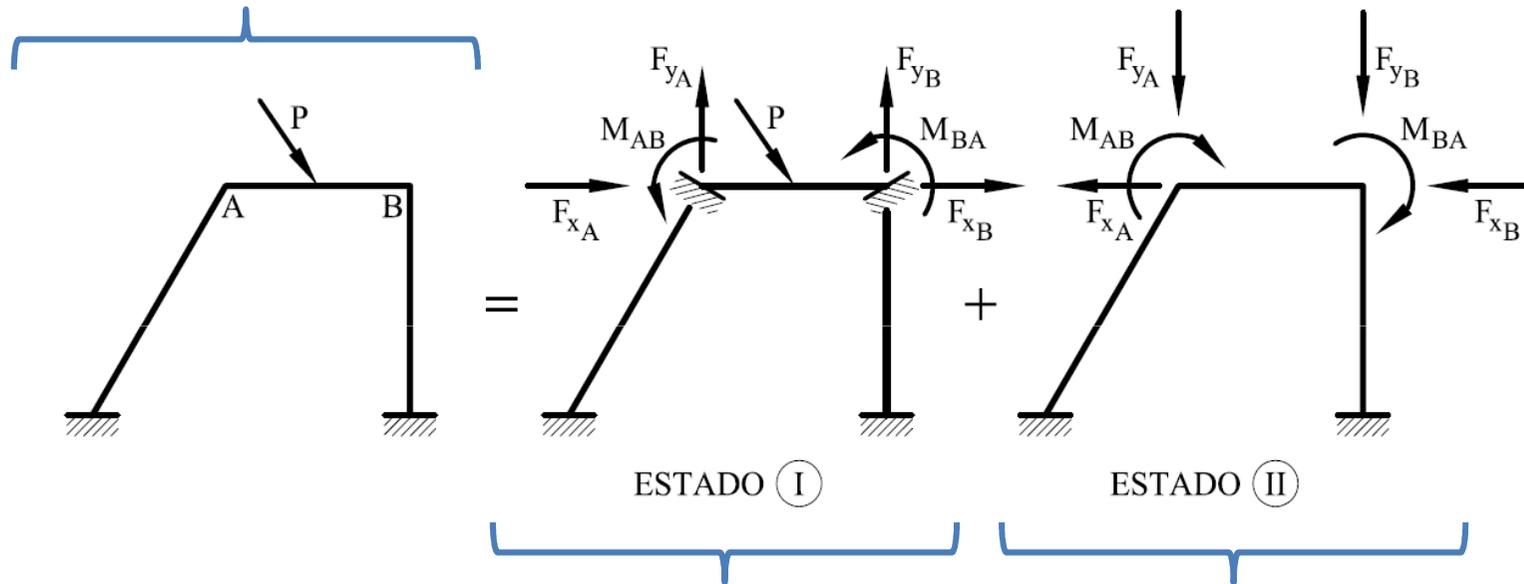
Compatibilidad y Equilibrio.

Finalización de un ejercicio



El método de rigidez

Descomponer el sistema en dos estados.
La solución es la suma de los dos.



Analizar cada una de las piezas por separado y calcular las reacciones. Estas reacciones se utilizan como carga en los nudos en el estado II. Las piezas se resuelven con tablas o mediante las técnicas vistas con anterioridad.

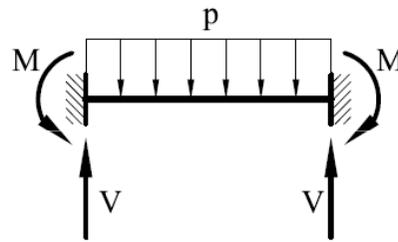
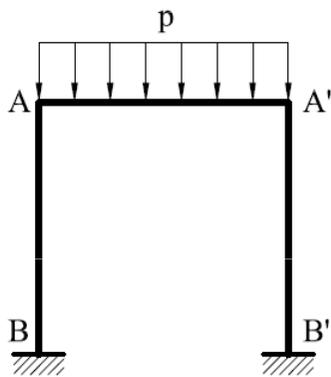
Estructura traslacional con fuerzas y momentos aplicados en los nudos. El método de rigidez permite de forma sistemática resolver este estado.

Nos centramos en el **Estado II**

El método de rigidez

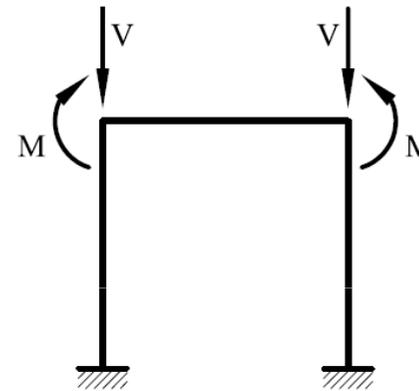
Descomponer el sistema en dos estados.
La solución es la suma de los dos.

Está resuelto en tablas



ESTADO I

+



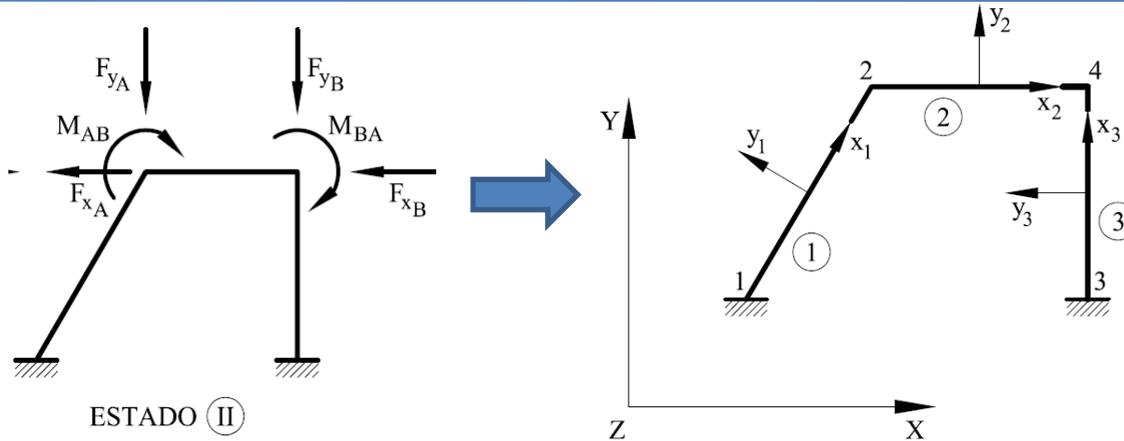
ESTADO II

Analizar cada una de las piezas por separado y calcular las reacciones. Estas reacciones se utilizan como carga en los nudos en el estado II. Las piezas se resuelven con tablas o mediante las técnicas vistas con anterioridad.

Estructura traslacional (o que puede serlo) con fuerzas y momentos aplicados en los nudos. El método de rigidez permite de forma sistemática resolver este estado.

El método de rigidez

Definición geométrica de la estructura

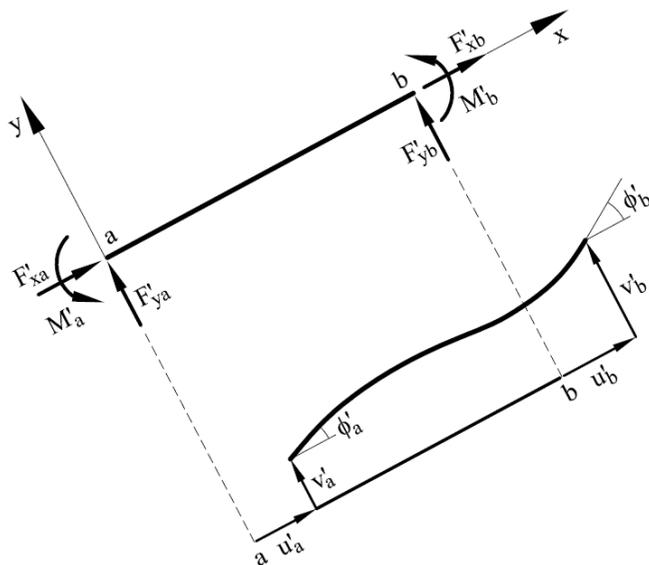


Definición geométrica de la estructura. La notación está orientada a la programación.

- Nudo
- Barra
- Material

Definición matricial de cada una de las barras (ecuaciones elásticas).

Ecuaciones elásticas generales donde solo se aplica carga en los nudos



FUERZAS	
a	$F'_{xa} \quad F'_{ya} \quad M'_a$
b	$F'_{xb} \quad F'_{yb} \quad M'_b$
MOVIMIENTOS	
a	$u'_a \quad v'_a \quad \phi'_a$
b	$u'_b \quad v'_b \quad \phi'_b$

SISTEMA LOCAL DE REFERENCIA

$$M_{AB} = \frac{2EI}{l}(2\theta_A + \theta_B) + \cancel{M_{AB}^0} - \frac{6EI}{l}\theta_{AB}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{l}(2\theta_B + \theta_A) + \cancel{M_{BA}^0} - \frac{6EI}{l}\theta_{AB}$$

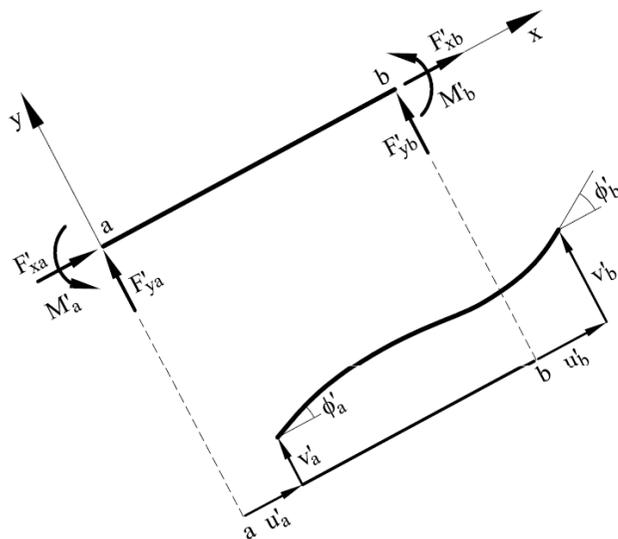
$$M'_a = \frac{4EI}{l}\theta'_a + \frac{2EI}{l}\theta'_b - \frac{6EI}{l} \frac{v'_b - v'_a}{l}$$

$$M'_b = \frac{2EI}{l}\theta'_a + \frac{4EI}{l}\theta'_b - \frac{6EI}{l} \frac{v'_b - v'_a}{l}$$

El método de rigidez

Cargas actuantes sobre las piezas

Definición matricial de cada una de las barras (ecuaciones elásticas).



FUERZAS			
a	F'_{xa}	F'_{ya}	M'_a
b	F'_{xb}	F'_{yb}	M'_b
MOVIMIENTOS			
a	u'_a	v'_a	ϕ'_a
b	u'_b	v'_b	ϕ'_b

SISTEMA LOCAL DE REFERENCIA

$$M'_a = \frac{4EI}{l} \theta'_a + \frac{2EI}{l} \theta'_b + \frac{6EI(v'_a - v'_b)}{l^2}$$

$$M'_b = \frac{2EI}{l} \theta'_a + \frac{4EI}{l} \theta'_b + \frac{6EI(v'_a - v'_b)}{l^2}$$

$$F'_{xa} = -F'_{xb} = \frac{EA}{l} (u'_a - u'_b)$$

$$\sum M_a = 0; M'_a + M'_b + F'_{yb} \cdot l = 0 \Rightarrow F'_{ya} = -F'_{yb} = \frac{M'_a + M'_b}{l};$$

$$F'_{ya} = -F'_{yb} = + \frac{6EI}{l^2} \theta'_a + \frac{6EI}{l^2} \theta'_b + \frac{12EI}{l^3} (v'_a - v'_b)$$

$$K'_{aa} = \begin{bmatrix} +\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{12EI}{l^3} & +\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & +\frac{6EI}{l^2} & +\frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

$$K'_{ab} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & +\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & +\frac{2EI}{l} \end{bmatrix}$$

$$K'_{ba} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & +\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & +\frac{2EI}{l} \end{bmatrix}$$

$$K'_{bb} = \begin{bmatrix} +\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & +\frac{4EI}{l} \end{bmatrix}$$

$$f'_a = \begin{bmatrix} F'_{xa} \\ F'_{ya} \\ M'_a \end{bmatrix} \quad f'_b = \begin{bmatrix} F'_{xb} \\ F'_{yb} \\ M'_b \end{bmatrix} \quad d'_a = \begin{bmatrix} u'_a \\ v'_a \\ \theta'_a \end{bmatrix} \quad d'_b = \begin{bmatrix} u'_b \\ v'_b \\ \theta'_b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f'_a \\ f'_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{aa} & K'_{ab} \\ K'_{ba} & K'_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d'_a \\ d'_b \end{bmatrix}$$

El método de rigidez

Matriz elemental de rigidez

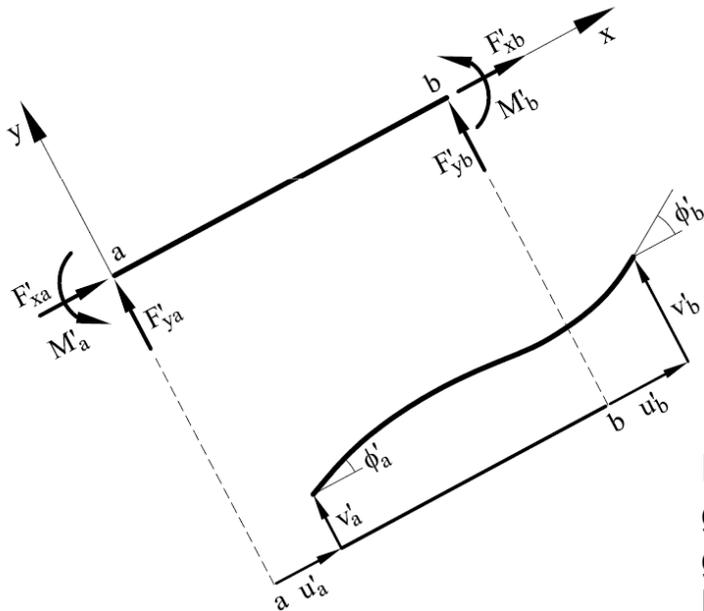
$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}'_a \\ \mathbf{f}'_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}'_{aa} & \mathbf{K}'_{ab} \\ \mathbf{K}'_{ba} & \mathbf{K}'_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}'_a \\ \mathbf{d}'_b \end{bmatrix}$$



$\mathbf{f}' = \mathbf{K}' \mathbf{d}'$ Forma matricial compacta

$$\mathbf{f}'_i = \sum_{j=1}^m \mathbf{K}'_{ij} \mathbf{d}'_j$$

Componente del vector de fuerzas en función de las componentes de la matriz de rigidez y del vector de desplazamiento.



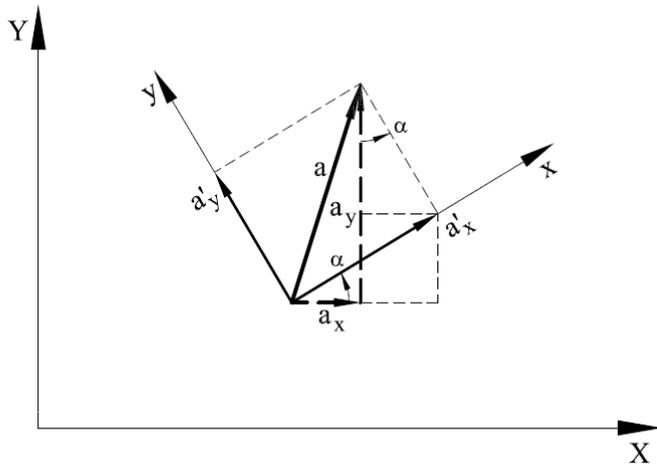
\mathbf{K}' →

Esta matriz es no invertible porque la barra tiene movimiento de sólido rígido. Si se fija uno de los extremos, la matriz resultante se podría invertir, siendo esta inversa la matriz de flexibilidad.

Lo interesante de esta conclusión es que la matriz del sistema global no se podrá invertir para obtener los desplazamientos y giros desconocidos hasta que no se impongan las restricciones de los apoyos.

El método de rigidez

Matriz global de rigidez



$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha & 0 \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'_x \\ a'_y \\ a'_z \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{T} \mathbf{a}'$$

Como es una transformación ortogonal, la traspuesta es igual que su inversa.

$$\mathbf{a}' = \mathbf{T}^T \mathbf{a}$$

Los desplazamientos y fuerzas en el sistema global de referencia son:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}'_a &= \mathbf{T}^T \mathbf{d}_a & \mathbf{d}'_b &= \mathbf{T}^T \mathbf{d}_b \\ \mathbf{f}'_a &= \mathbf{T}^T \mathbf{f}_a & \mathbf{f}'_b &= \mathbf{T}^T \mathbf{f}_b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'_a &= \mathbf{K}'_{aa} \mathbf{d}'_a + \mathbf{K}'_{ab} \mathbf{d}'_b \\ \mathbf{f}'_b &= \mathbf{K}'_{ba} \mathbf{d}'_a + \mathbf{K}'_{bb} \mathbf{d}'_b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'_a &= \mathbf{K}'_{aa} \mathbf{T}^T \mathbf{d}_a + \mathbf{K}'_{ab} \mathbf{T}^T \mathbf{d}_b \\ \mathbf{f}'_b &= \mathbf{K}'_{ba} \mathbf{T}^T \mathbf{d}_a + \mathbf{K}'_{bb} \mathbf{T}^T \mathbf{d}_b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a &= \mathbf{T} \mathbf{f}'_a = \mathbf{T} \mathbf{K}'_{aa} \mathbf{T}^T \mathbf{d}_a + \mathbf{T} \mathbf{K}'_{ab} \mathbf{T}^T \mathbf{d}_b \\ \mathbf{f}_b &= \mathbf{T} \mathbf{f}'_b = \mathbf{T} \mathbf{K}'_{ba} \mathbf{T}^T \mathbf{d}_a + \mathbf{T} \mathbf{K}'_{bb} \mathbf{T}^T \mathbf{d}_b \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{T} \mathbf{K}'_{ij} \mathbf{T}^T$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a &= \mathbf{K}_{aa} \mathbf{d}_a + \mathbf{K}_{ab} \mathbf{d}_b \\ \mathbf{f}_b &= \mathbf{K}_{ba} \mathbf{d}_a + \mathbf{K}_{bb} \mathbf{d}_b \end{aligned}$$

El método de rigidez

Matriz global de rigidez

$$K_{aa} = \begin{bmatrix} C^2 \frac{EA}{I} + S^2 \frac{12EI}{I^3} & SC \left(\frac{EA}{I} - \frac{12EI}{I^3} \right) & -S \frac{6EA}{I^2} \\ + S^2 \frac{EA}{I} + C^2 \frac{12EA}{I^3} & + C \frac{6EA}{I^2} & \\ \text{simétrica} & & + \frac{4EA}{I} \end{bmatrix}$$

$$K_{ab} = \begin{bmatrix} -C^2 \frac{EA}{I} - S^2 \frac{12EA}{I^3} & -SC \left(\frac{EA}{I} - \frac{12EA}{I^3} \right) & -S \frac{6EA}{I^2} \\ -SC \left(\frac{EA}{I} - \frac{12EA}{I^3} \right) & -S^2 \frac{EA}{I} - C^2 \frac{12EA}{I^3} & + C \frac{6EA}{I^2} \\ S \frac{6EA}{I^2} & -C \frac{6EA}{I^2} & + \frac{2EA}{I} \end{bmatrix}$$

$$K_{ba} = \begin{bmatrix} -C^2 \frac{EA}{I} - S^2 \frac{12EA}{I^3} & -SC \left(\frac{EA}{I} - \frac{12EA}{I^3} \right) & S \frac{6EA}{I^2} \\ -SC \left(\frac{EA}{I} - \frac{12EA}{I^3} \right) & -S^2 \frac{EA}{I} - C^2 \frac{12EA}{I^3} & -C \frac{6EA}{I^2} \\ -S \frac{6EA}{I^2} & C \frac{6EA}{I^2} & + \frac{2EA}{I} \end{bmatrix}$$

$$K_{bb} = \begin{bmatrix} C^2 \frac{EA}{I} + S^2 \frac{12EI}{I^3} & SC \left(\frac{EA}{I} - \frac{12EI}{I^3} \right) & S \frac{6EA}{I^2} \\ + S^2 \frac{EA}{I} + C^2 \frac{12EA}{I^3} & + C \frac{6EA}{I^2} & -C \frac{6EA}{I^2} \\ \text{simétrica} & & + \frac{4EA}{I} \end{bmatrix}$$

La matriz elemental de rigidez es simétrica en cualquier sistema de referencia.

El método de rigidez

Matriz global de rigidez

El objetivo ahora es formar un sistema que iguale las fuerzas externas de cada uno de los nudos (**F**) con la matriz global del sistema (**K**) multiplicada por el vector desplazamiento global del sistema (**D**).

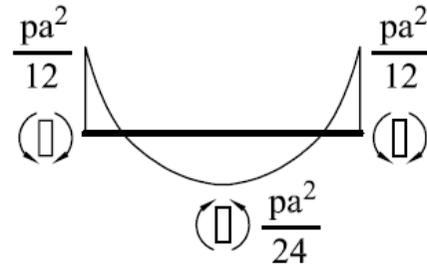
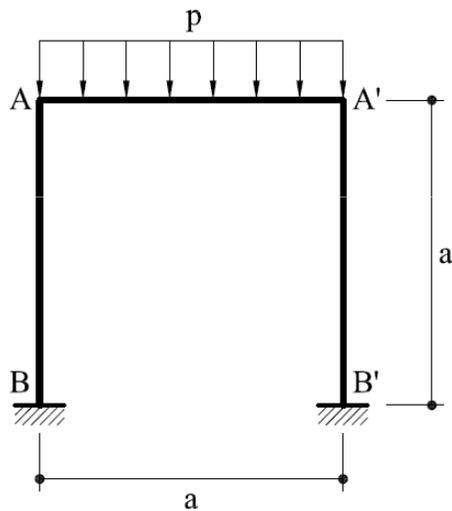
Notar que:

- 1) **K** está formada por matrices de todas las barras. Tener en cuenta cómo están conectadas con los nudos (ensamblaje).
- 2) **D** está ordenado según nudos y está formado por los desplazamientos en X e Y más el giro. También está ensamblado.

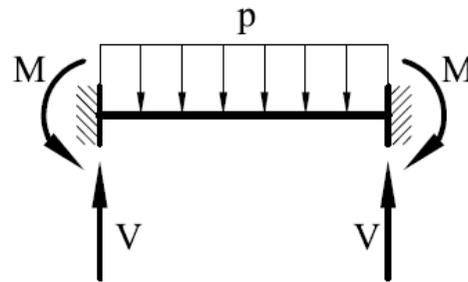
$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{D} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \dots \\ \mathbf{f}_i \\ \dots \\ \mathbf{f}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \dots & \mathbf{K}_{1i} & \dots & \mathbf{K}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{i1} & \dots & \mathbf{K}_{ii} & \dots & \mathbf{K}_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{n1} & \dots & \mathbf{K}_{ni} & \dots & \mathbf{K}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \dots \\ \mathbf{d}_i \\ \dots \\ \mathbf{d}_n \end{bmatrix}$$

El método de rigidez

Ejemplo

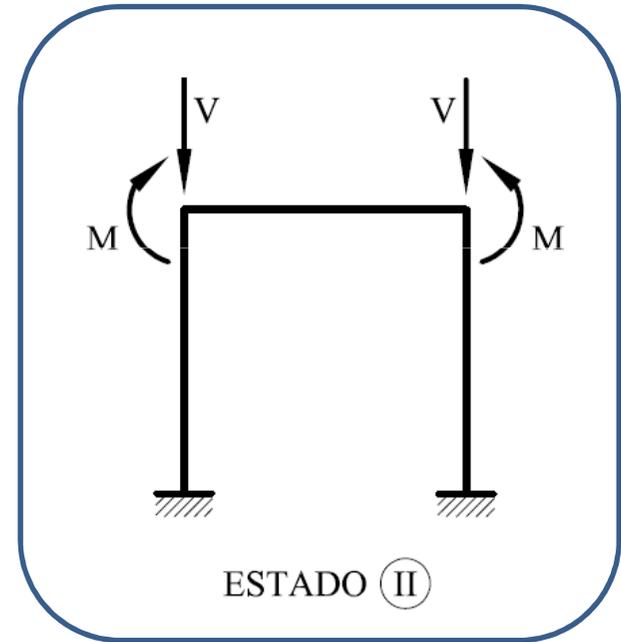


ESTADO (I)



ESTADO (I)

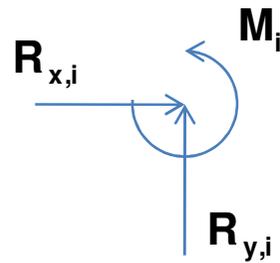
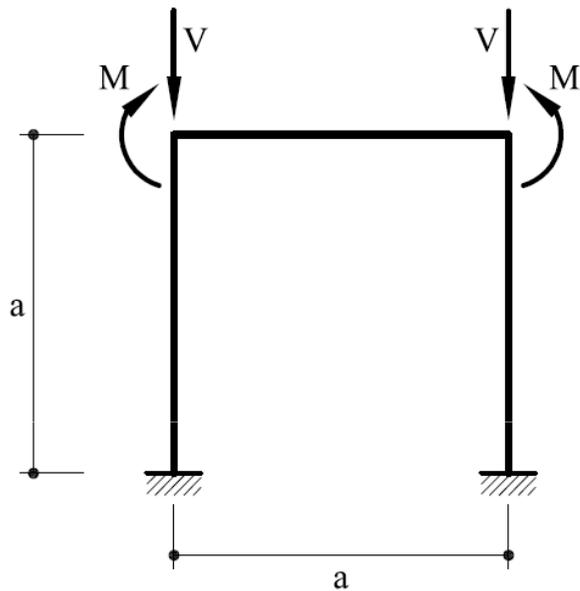
$$M = \frac{pa^2}{12}; V = \frac{pa}{2}$$



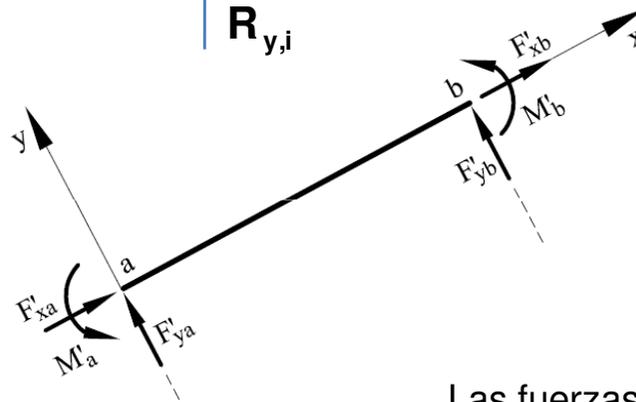
ESTADO (II)

El método de rigidez

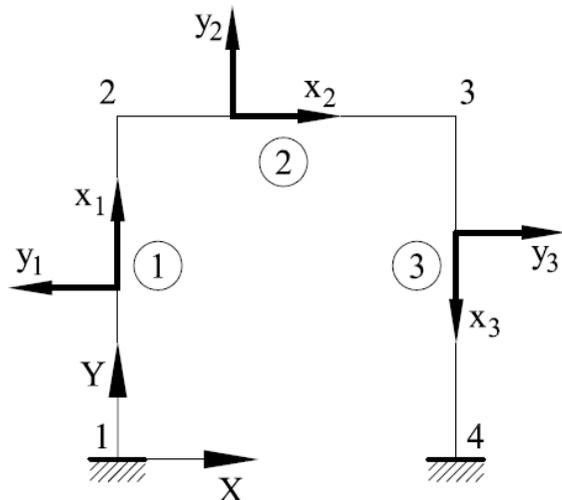
Ejemplo



Cada nudo hay que tener en cuenta las fuerzas exteriores. El sentido positivo es el que se indica.



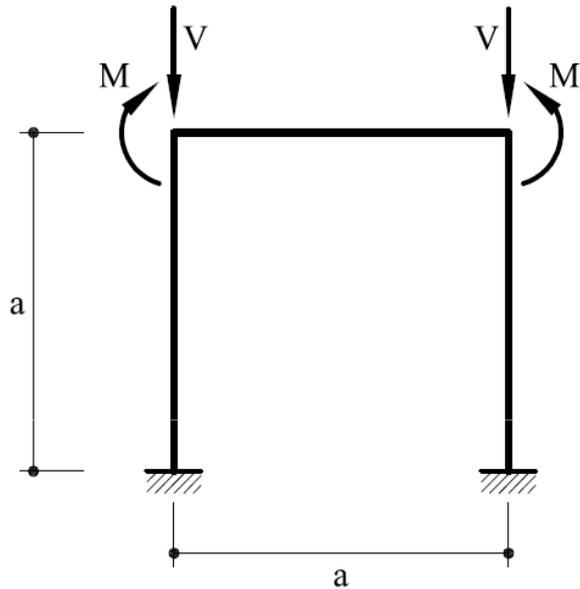
Considerar cada barra en el sistema particular y hacer después la transformación.



Las fuerzas exteriores del nudo se igualan a las fuerzas de cada barra que confluyen en el nudo. El signo de las fuerzas y momentos exteriores, que son fuerzas como V y M en los nudos 2 y 3 o las reacciones de empotramiento en los nudos 1 y 4, se corresponden con el sistema global de referencia.

El método de rigidez

Ejemplo



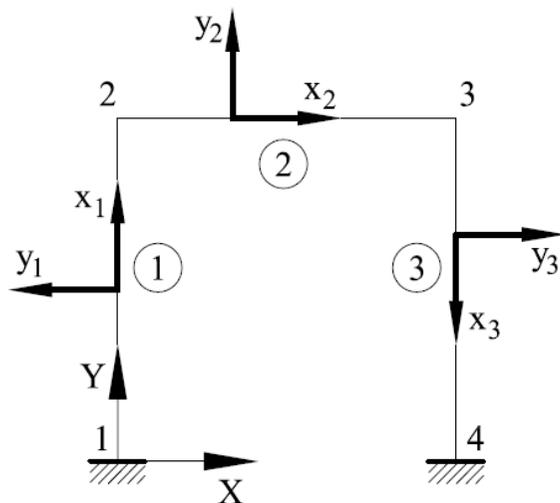
$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{aa})_{12} & (\mathbf{K}_{ab})_{12} & 0 & 0 \\ (\mathbf{K}_{ba})_{12} & (\mathbf{K}_{bb})_{12} + (\mathbf{K}_{aa})_{23} & (\mathbf{K}_{ab})_{23} & 0 \\ 0 & (\mathbf{K}_{ba})_{23} & (\mathbf{K}_{bb})_{23} + (\mathbf{K}_{aa})_{34} & (\mathbf{K}_{ab})_{34} \\ 0 & 0 & (\mathbf{K}_{ba})_{34} & (\mathbf{K}_{bb})_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{d}_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_1 = (\mathbf{K}_{aa})_{12} \mathbf{d}_1 + (\mathbf{K}_{ab})_{12} \mathbf{d}_2$$

$$\mathbf{f}_2 = (\mathbf{K}_{ba})_{12} \mathbf{d}_1 + \{(\mathbf{K}_{bb})_{12} + (\mathbf{K}_{aa})_{23}\} \mathbf{d}_2 + (\mathbf{K}_{ab})_{23} \mathbf{d}_3$$

$$\mathbf{f}_3 = (\mathbf{K}_{ba})_{23} \mathbf{d}_2 + \{(\mathbf{K}_{bb})_{23} + (\mathbf{K}_{aa})_{34}\} \mathbf{d}_3 + (\mathbf{K}_{ab})_{34} \mathbf{d}_4$$

$$\mathbf{f}_4 = (\mathbf{K}_{ba})_{34} \mathbf{d}_3 + (\mathbf{K}_{bb})_{34} \mathbf{d}_4$$



A un nudo pueden llegar varias barras. En función de si la barra empieza o termina en un nudo, se emplea como subíndice "a" (origen) o "b" (extremo).

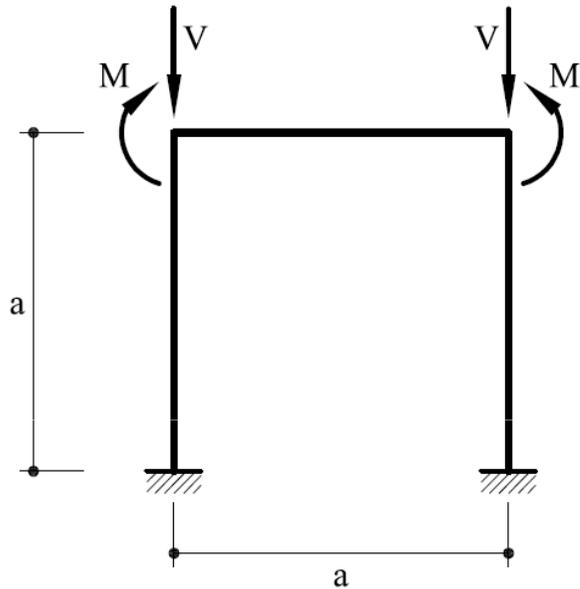
Por ejemplo, en el nudo 2 se tienen la barra 12 (cuyo nudo 2 es el extremo) y la 23 (cuyo nudo 2 es el origen).

El ensamblaje de la matriz se puede hacer por nudos, viendo todas las barras que llegan al nudo, o por barras. En el caso de las barras se puede ver que una barra ij ocupa posiciones en las columnas y filas (i,j) .

En la numeración de los nudos hay que procurar que la diferencia máxima entre dos nudos unidos sea mínima (ahorra memoria al almacenar matrices).

El método de rigidez

Ejemplo



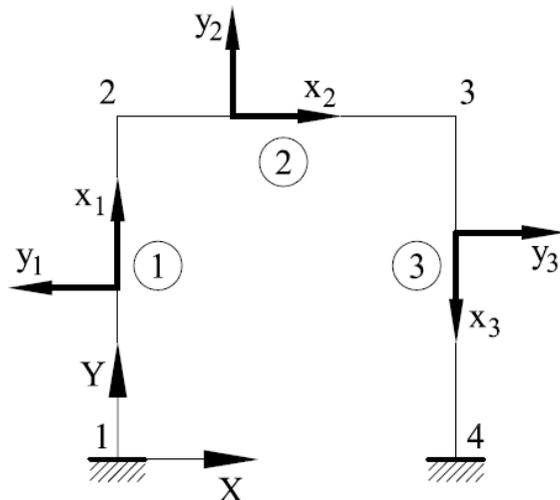
Este es un ejemplo muy sencillo donde todas las barras tienen la misma longitud, sección y rigidez. Se recomienda consultar las transparencias que vienen a continuación, donde se proponen unas líneas de código en MATLAB, junto con el ejemplo 6.10 de la referencia de Miguel Cervera

$$(\mathbf{K}_{aa})_{12} = (\mathbf{K}_{aa})_{23} = (\mathbf{K}_{aa})_{34}$$

$$(\mathbf{K}_{ab})_{12} = (\mathbf{K}_{ab})_{23} = (\mathbf{K}_{ab})_{34}$$

$$(\mathbf{K}_{ba})_{12} = (\mathbf{K}_{ba})_{23} = (\mathbf{K}_{ba})_{34}$$

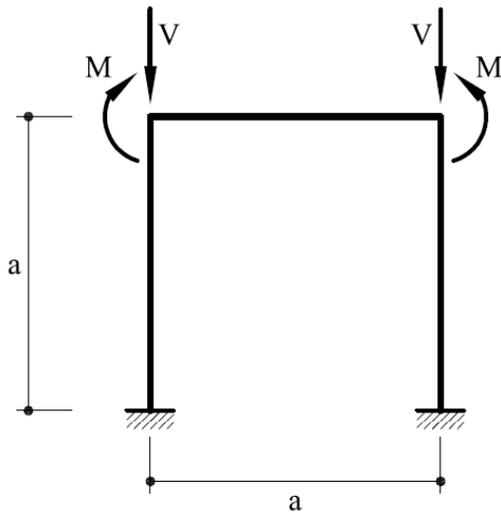
$$(\mathbf{K}_{bb})_{12} = (\mathbf{K}_{bb})_{23} = (\mathbf{K}_{bb})_{34}$$



```
%Ejemplo 1. Método de rigidez (Ejemplo 6.10.1 de la
página 312 del libro)
%Definición de la estructura
%Parámetros
clear all;close all;clc
a=5;
EI=2e8;
EA=1e10;
%Nodos
N1=[0 0];
N2=[0 a];
N3=[a a];
N4=[a 0];
%Barras
alpha12=(180/pi)*atan((N2(2)-N1(2))/(N2(1)-N1(1)));
alpha23=(180/pi)*atan((N3(2)-N2(2))/(N3(1)-N2(1)));
alpha34=(180/pi)*atan((N4(2)-N3(2))/(N4(1)-N3(1)));
```

El método de rigidez

Ejemplo



`%Matrices en la base de cada una de las barras. Se puede`

`%apreciar que todas las matrices son iguales.`

```
K_p_aa=[EA/a 0 0;0 12*EI/a^3 6*EI/a^2;0 6*EI/a^2 4*EI/a];
```

```
K_p_ab=[-EA/a 0 0;0 -12*EI/a^3 +6*EI/a^2;0 -6*EI/a^2 2*EI/a];
```

```
K_p_ba=[-EA/a 0 0;0 -12*EI/a^3 -6*EI/a^2;0 +6*EI/a^2 2*EI/a];
```

```
K_p_bb=[EA/a 0 0;0 12*EI/a^3 -6*EI/a^2;0 -6*EI/a^2 4*EI/a];
```

`%Matrices en la base global`

`%Barra 12`

```
K_aa_12=Trans_Mat(K_p_aa, alpha12);
```

```
K_ab_12=Trans_Mat(K_p_ab, alpha12);
```

```
K_ba_12=Trans_Mat(K_p_ba, alpha12);
```

```
K_bb_12=Trans_Mat(K_p_bb, alpha12);
```

`%Barra 23`

```
K_aa_23=Trans_Mat(K_p_aa, alpha23);
```

```
K_ab_23=Trans_Mat(K_p_ab, alpha23);
```

```
K_ba_23=Trans_Mat(K_p_ba, alpha23);
```

```
K_bb_23=Trans_Mat(K_p_bb, alpha23);
```

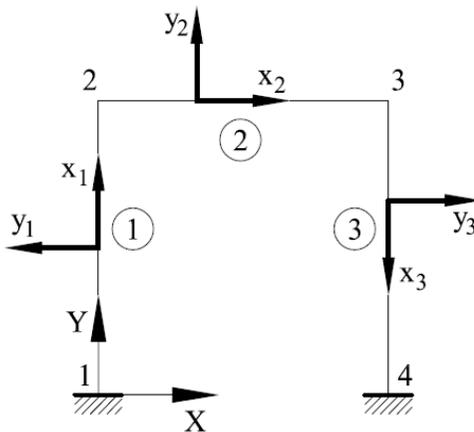
`%Barra 34`

```
K_aa_34=Trans_Mat(K_p_aa, alpha33);
```

```
K_ab_34=Trans_Mat(K_p_ab, alpha33);
```

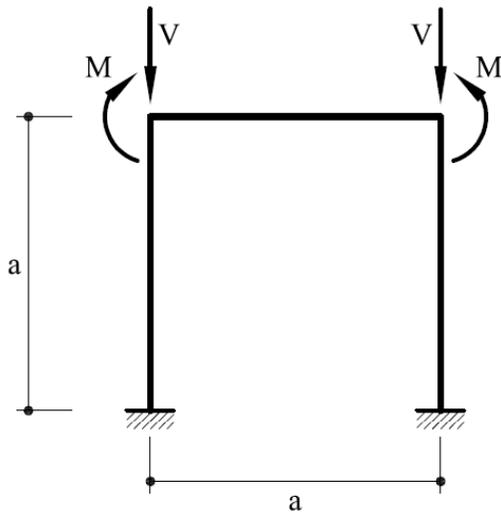
```
K_ba_34=Trans_Mat(K_p_ba, alpha33);
```

```
K_bb_34=Trans_Mat(K_p_bb, alpha33);
```



El método de rigidez

Ejemplo



`%Matriz de rigidez total del sistema`

```
K=[K_aa_12      K_ab_12      zeros(3,3)      zeros(3,3);...
   K_ba_12      K_bb_12+K_aa_23 K_ab_23      zeros(3,3);...
   zeros(3,3)  K_ba_23      K_bb_23+K_aa_34 K_ab_34;...
   zeros(3,3)  zeros(3,3)      K_ba_34      K_bb_34];
```

`%Eliminando los desplazamientos y giros de los nodos 1 y 4
(conocidos) queda una matriz resumida. Esta matriz no
considera tampoco las reacciones en esos puntos`

```
K_pres=K(4:9,4:9);
```

```
F_pres=[0 -50e3 -41.67e3 0 -50e3 41.67e3]'; % Ver signo
```

```
%Cálculo de desplazamientos desconocidos
```

```
D_pres=inv(K_pres)*F_pres %La matriz se puede invertir
```

```
%Vector de desplazamiento completo
```

```
D_1=[0 0 0]'; %Empotramiento (desplazamientos y giros nulos)
```

```
D_4=[0 0 0]';
```

```
D=[D_1; D_pres; D_4];
```

```
%Cálculo de reacciones (ver Ecuación 6.11 del libro)
```

```
%Reacciones en nudo 1 (empotramiento)
```

```
FX_1=K(1,1:end)*D
```

```
FY_1=K(2,1:end)*D
```

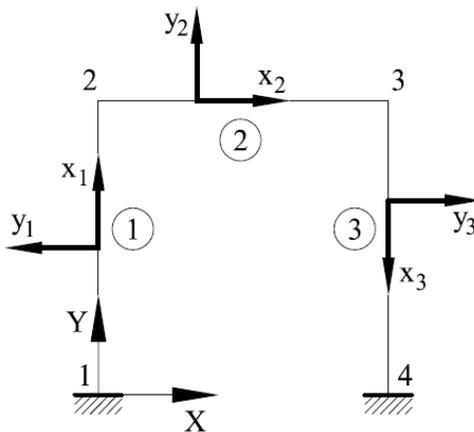
```
M_1 =K(3,1:end)*D
```

```
%Reacciones en nudo 4 (empotramiento)
```

```
FX_4=K(10,1:end)*D
```

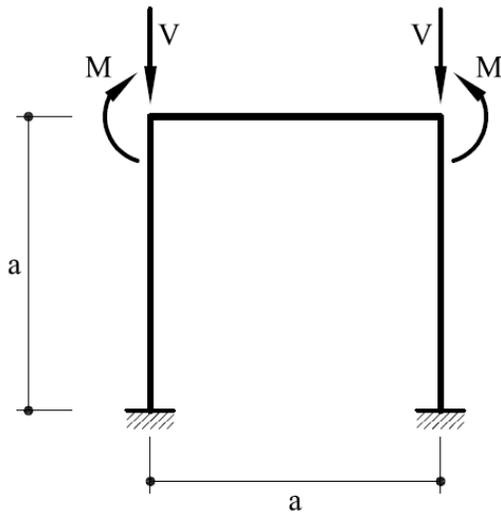
```
FY_4=K(11,1:end)*D
```

```
M_4 =K(12,1:end)*D
```



El método de rigidez

Ejemplo



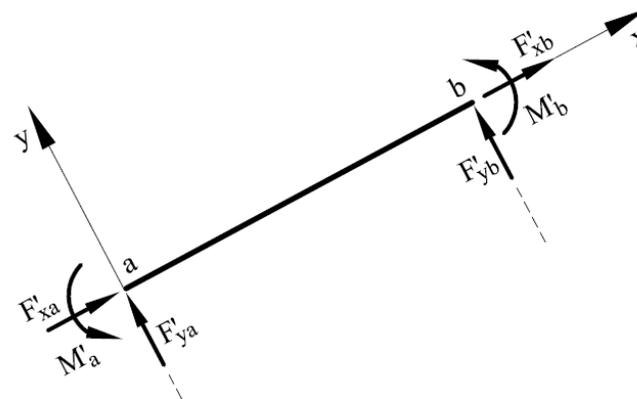
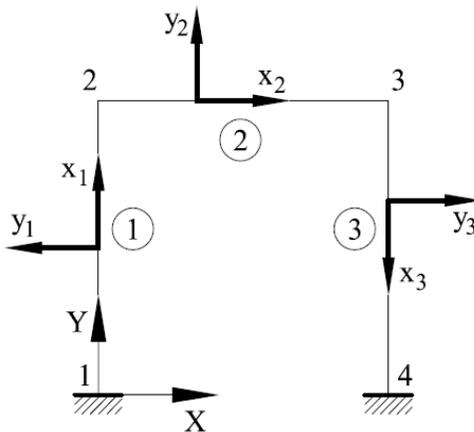
`%Esfuerzos en cada una de las barras. Es interesante ver el
%sentido de los momentos y las fuerzas en las barras y
%relacionarlas con las reacciones y fuerzas externas.`

```
D1_p=Trans_Vec(D(1:3), alpha12);
D2_p=Trans_Vec (D(4:6), alpha12);
f_p_12=[K_p_aa K_p_ab; K_p_ba K_p_bb]*[D1_p; D2_p]
```

```
D2_p=Trans_Vec(D(4:6), alpha23);
D3_p=Trans_Vec (D(7:9), alpha23);
f_p_23=[K_p_aa K_p_ab; K_p_ba K_p_bb]*[D2_p; D3_p]
```

```
D3_p=Trans_Vec(D(7:9), alpha34);
D4_p=Trans_Vec (D(10:12), alpha34);
f_p_34=[K_p_aa K_p_ab; K_p_ba K_p_bb]*[D3_p; D4_p]
```

`%Los esfuerzos en los extremos de las barras nos permite
obtener los esfuerzos en cada punto de la barra`



FIN CLASE TEMA 2

¿DUDAS Y/O SUGERENCIAS?