Capítulo 2

Técnicas básicas de recuento

2.1. Aplicaciones y cardinal de un conjunto

2.1.1. Aplicaciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas

Antes de definir de manera precisa el concepto de aplicación, estudiemos un ejemplo ilustrativo. En tiempos que parecen ya muy lejanos (cuando la "mili" era obligatoria), todos los mozos de una quinta tenían que pasar por un proceso que incluía, entre otras cosas, la medida de su talla. Este proceso, asociar a cada mozo un número (su talla en centímetros) es un ejemplo típico de aplicación. Dado un conjunto, en este caso los mozos del reemplazo, a cada uno de ellos se le asocia un **único** elemento de otro conjunto (en este caso, un número natural).

Definición 2.1 *Dados conjuntos, A y B, una aplicación f de A en B (escrito $f : A \to B$) asigna a cada elemento $a \in A$ un único elemento $b \in B$. Al conjunto A se le dice* **dominio** *y a B* **rango***. Dos funciones son iguales si poseen el mismo dominio y toman igual valor para elementos iguales del dominio. Si $S \subset A$, podemos definir una aplicación de S en B, llamada restricción de f a S y denotada por $f|_S$, que a cada elemento de S le asigna el mismo valor que f.*

Ejemplo 2.2

- La aplicación que a cada ciudadano español le asigna un número (el DNI).
- La aplicación talla estudiada anteriormente.
- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dado por $f(n) = 2n$. Esta última es una forma típica de expresar una aplicación: decir cuál es la imagen de un elemento genérico del dominio.

Definición 2.3 (Composición de aplicaciones) *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos aplicaciones. La composición de las aplicaciones f y g, denotada por $g \circ f$, es una aplicación de A en C dada por*

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Dada una aplicación $f : A \to B$ se denomina conjunto imagen al subconjunto de B definido por:

$$\{b \in B : b = f(a) \ \text{ para algún } \ a \in A\},$$

y a menudo se denota por Imf. Por otro lado, si $T \subset B$ la imagen inversa de T por f es el conjunto

$$\{a \in A : f(a) \in T\}$$

que, habitualmente se denota por $f^{-1}(T)$. Si T está compuesto por un único elemento, $T = \{b\}$, se suelen omitir las llaves y se escribe $f^{-1}(b)$.

Proposición 2.4 *Sea $f : A \to B$ una aplicación. Se puede ver que:*

- *para $S \subset A$, $S \subset f^{-1}(f(S))$;*
- *para $T \subset B$, $f(f^{-1}(T)) \subset T$.*

Asimismo, si $\{T_i : i \in I\}$ es una familia de subconjuntos de B, se verifica

- $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} T_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(T_i)$
- $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} T_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(T_i)$

Nota: El recíproco a las dos primeras afirmaciones del resultado anterior no es, en general, cierto. Por ejemplo, sean J el conjunto de jugadores de la liga inglesa en la temporada actual y f la aplicación que a cada jugador le asocia su altura. Si S es el conjunto formado únicamente por Benayoun ($S = \{\text{Benayoun}\}$), puesto que su altura es de 178 cm, $f^{-1}(f(S))$ es el conjunto de todos los jugadores que miden 178 cm. Entre ellos estará el propio Benayoun, pero también muchos otros. ¿Por qué no se da la igualdad? Simplemente, porque hay más jugadores, aparte de Benayoun, que miden 178 cm.

Consideramos ahora la aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n) = 2 * n$ y sea T el conjunto de números naturales múltiplos de 3, es decir, $T = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$. En este caso, $f^{-1}(T) = T$ y $f(f^{-1}(T))$ es el conjunto de naturales múltiplos de 6. En este caso, la igualdad no es cierta porque, naturalmente, no todos los múltiplos de 3 son pares.

En la proposición anterior, la igualdad en las dos primeras afirmaciones se satisface siempre sólo para algunos tipos particulares de aplicaciones. Estudiemos, ahora, estas aplicaciones.

Definición 2.5 (Aplicaciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas) *Sea $f : A \to B$ una aplicación.*

- *f se dice* **inyectiva** *si*

$$\text{para todo } \ a, a' \in A \ \text{ con } \ f(a) = f(a') \Longrightarrow a = a'.$$

- *f se dice* **sobreyectiva** *si*

$$\text{para todo } \ b \in B, \ \ b = f(a) \ \text{ para algún } \ a \in A.$$

- *f se dice* **biyectiva** *si es inyectiva y sobreyectiva.*

Ejercicio 2.6 *Sea $f : A \to B$ una aplicación. Probar que:*

- *si f es inyectiva y $S \subset A$, $S = f^{-1}(f(S))$ y que*
- *si f es sobreyectiva y $T \subset B$, $f(f^{-1}(T)) = T$*

De las definiciones anteriores se deduce que para todo conjunto A la llamada aplicación identidad, I_A, definida por $I_A(a) = a$, es biyectiva.

Hasta este momento, hemos definido una operación entre funciones (la composición) y de entre todas las funciones hemos distinguido algunas especiales (las inyectivas, sobreyectivas y biyectivas). ¿Cómo se comporta la composición frente a estas aplicaciones especiales? La respuesta a esta pregunta se encuentra en los siguientes resultados.

Proposición 2.7 *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ aplicaciones. Entonces,*

- *f y g inyectivas $\Longrightarrow g \circ f$ es inyectiva;*
- *f y g sobreyectivas $\Longrightarrow g \circ f$ es sobreyectiva*
- *$g \circ f$ inyectiva $\Longrightarrow f$ es inyectiva;*
- *$g \circ f$ sobreyectiva $\Longrightarrow g$ es sobreyectiva.*

Teorema 2.8 *Sea $f : A \to B$ una aplicación y $A \neq \emptyset$.*

i) *f es inyectiva si, y sólo si, existe una aplicación $g : B \to A$ tal que $g \circ f = I_A$.*

ii) *f es sobreyectiva si, y sólo si, existe una aplicación $h : B \to A$ tal que $f \circ h = I_B$.*

Demostración.– 1.- Supongamos, primero que existe g tal que $g \circ f = I_A$. Como I_A es inyectiva, por lo anterior, la existencia de g garantiza la inyectividad de A.

Supongamos, ahora que f es inyectiva. Entonces, para cada $b \in f(A)$, existe un único a tal que $f(a) = b$. Sea ahora a_0 un elemento cualquiera de A. La aplicación

$$g(x) = \begin{cases} a, & \text{si } b \in f(A) \text{ y } f(a) = b \\ a_0, & \text{si } b \notin f(A) \end{cases}$$

verifica $g \circ f = I_A$.

2.- Si existe h tal que $f \circ h = I_B$, puesto que I_B es sobreyectiva, la Proposición anterior me garantiza que f es sobreyectiva.

Supongamos ahora que f es sobreyectiva. Eso quiere decir que para cualquier $b \in B$, $f^{-1}(b) \subset A$ no es vacío. En consecuencia podemos elegir $a_b \in f^{-1}(b)$. La aplicación $h(b) = a_b$ verifica la tesis del enunciado ∎

Nota. En la prueba del Teorema anterior hemos dado por hecho que en cualquier conjunto no vacío podemos escoger siempre un elemento. Aunque no entraremos en ello, los axiomas típicos de la teoría de conjuntos no nos garantizan que podamos hacerlo. En consecuencia, se suele asumir que esto siempre es posible constituyéndose entonces como un axioma más. Existen distintas versiones de este axioma que se conoce como **Axioma de elección**.

La aplicación g del Teorema anterior se suele llamar inversa a izquierda de f y la h inversa a derecha de f. Si una aplicación $f : A \to B$ posee una inversa a izquierda g y una inversa a derecha h, se tiene:

$$g = g \circ I_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = I_A \circ h = h$$

y la aplicación $g = h$ se dice inversa a derecha e izquierda de f. Asimismo, este argumento prueba que si existe inversa a derecha e izquierda de f ésta es única. Ahora, juntando los dos apartados del Teorema y las consideraciones previas, se tiene que si $f : A \to B$ es una aplicación, entonces

$$f \text{ es biyectiva} \iff f \text{ posee inversa a izquierda y derecha.}$$

La única aplicación que es inversa a derecha e izquierda de f se denota por f^{-1} y se llama inversa de f.

2.1.2. Cardinal de un conjunto

Supongamos que tomamos el tren en el apeadero del Campus para trasladarnos a la estación de Atocha. ¿Cómo contamos el número de paradas entre una y otra estación? La primera vez que se para el tren es en Alcalá y a esa parada le asignamos el número natural 1. La siguiente parada es La Garena a la que le asignamos el número 2. De esta manera continuamos hasta llegar a la estación de Atocha que será la undécima y a la que, lógicamente, le asignaremos el número 11. La próxima vez que queramos hacer este recorrido no necesitaremos fijarnos en las paradas; simplemente, tendremos que ir contando hasta once y en ese momento habremos de descender del tren. En términos matemáticos, ¿qué es lo que hemos hecho? Sencillamente, establecer una biyección entre el conjunto de paradas y el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

El supuesto anterior es un ejemplo del hecho siguiente: contar es construir una aplicación biyectiva. Dicho de otra manera, afirmar que un conjunto tiene n elementos es tanto como decir que existe una biyección entre dicho conjunto y $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dando otra vuelta de tuerca, contar es, necesariamente, introducir un orden en un conjunto finito.

A través de los argumentos anteriores, podemos asegurar que dos conjuntos finitos tienen el mismo número de elementos si, y sólo si, existe una biyección entre ambos. Al número de elementos de un conjunto finito A se le llama cardinal de A y se escribe $|A|$ o $\#A$. Si hablamos de conjuntos finitos y de su cardinal, es fácil establecer algunas propiedades básicas.

Proposición 2.9 *Sean,A y B conjuntos finitos.*

1.- Si $A \subset B$ y $A \neq B$, $|A| < |B|$. Por lo tanto, no existe ninguna biyección entre A y B, es decir, si A es finito, ningún subconjunto propio es equipotente a A.

2.- Si A y B son disjuntos, $|A \bigcup B| = |A| + |B|$.

3.- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

4.- Si $f : A \to B$ es inyectiva, $|A| \leq |B|$

5.- Si $f : A \to B$ es sobreyectiva, $|A| \geq |B|$

2.2. Principios básicos de recuento

2.2.1. Principios de la suma y del producto

De las propiedades concernientes al cardinal de conjuntos finitos vistas en la Proposición 2.9, la segunda y la tercera reciben, en muchos textos, el nombre de Principio de la suma y Principio del producto, respectivamente.

Principio del producto

La propiedad $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ (referida a cardinales finitos), como hemos dicho, se conoce como Principio del producto. Esto es así porque la podemos parafrasear como sigue:

Si un proceso se puede dividir en una sucesión de dos tareas y si hay n_1 maneras de realizar la primera tarea y n_2 formas de llevar a cabo la segunda, entonces hay $n_1 \cdot n_2$ formas de llevar a cabo el proceso final.

Observación 2.10 *La propiedad referida al producto cartesiano de dos conjuntos es fácilmente extensible si consideramos el producto cartesiano de n conjuntos. En ese caso, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos, se tiene que*

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|.$$

Veamos algunos de ejemplos de aplicación del Principio del producto.

Ejemplo 2.11 *¿Cuántas aplicaciones de un conjunto de m elementos en un conjunto de n elementos existen?*

Una función se corresponde con una elección de una imagen para cada uno de los elementos del dominio. Como tenemos n posibles imágenes para cada uno de los elementos del dominio, el número total de aplicaciones es n^m.

Ejemplo 2.12 *¿Cuántas aplicaciones inyectivas de un conjunto de m elementos en un conjunto de n elementos existen?*

Notemos, en primer lugar, que para que existan aplicaciones inyectivas, se debe tener $m \leq n$. Supongamos que los elementos del dominio son $\{a_1, \ldots, a_m\}$. Existen n formas distintas de escoger una imagen para a_1. Una vez elegida la imagen de a_1, el número de posibles imágenes para a_2 es $n-1$. Siguiendo este razonamiento, se llega a que el número de aplicaciones inyectivas de un conjunto de m elementos en uno de n es $n(n-1)\cdots(n-m+1)$, es decir, $\dfrac{n!}{(n-m)!}$. Obsérvese que si $n = m$, inyectiva es lo mismo que biyectiva, de donde se deduce que el número de aplicaciones biyectivas de un conjunto en de n en otro con el mismo cardinal es $n!$.

Ejemplo 2.13 *Utilizar el principio del producto para mostrar que el número de subconjuntos distintos de un conjunto finito S es igual a $2^{|S|}$.*

Pongamos que $|S| = n$ y que listamos de una manera arbitraria los elementos del conjunto S como $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Entonces, existe una biyección entre los subconjuntos de S y las cadenas binarias de longitud n: un subconjunto de S se corresponde con la cadena que tiene 1 en el lugar i si a_i pertenece al subconjunto y 0 en caso contrario. (Así, el conjunto vacío se corresponde con la cadena con todos sus elementos cero). Aplicando el principio del producto, se deduce que el número de cadenas de ceros y unos de longitud n es 2^n. Luego el número de subconjuntos de S es 2^n.

Principio de la suma

Si la tercera propiedad de la Proposición 2.9 se conoce como Principio del producto, la segunda se conoce como Principio de la suma. Al igual que con el principio del producto, la segunda propiedad de la Proposición 2.9 puede extenderse a más de dos conjuntos. Así si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos disjuntos dos a dos, se tiene

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|.$$

Veamos un ejemplo en el que combinaremos los principios de la suma y del producto.

Ejemplo 2.14 *Cada usuario de un servidor posee una contraseña de seis a ocho caracteres de longitud, donde cada carácter debe ser una letra minúscula o un dígito. Cada contraseña, además ha de contener al menos un dígito. ¿Cuántos posibles contraseñas hay?*

Sea C el conjunto de todas las posible contraseñas. Aplicando el principio de la suma se tendrá

$$|C| = |C_6| + |C_7| + |C_8|,$$

donde C_i representa el conjunto de las contraseñas de longitud i (para $i = 6, 7, 8$). Ahora calculamos $|C_6|$, $|C_7|$ y $|C_8|$. Para obtener $|C_6|$ calculamos el conjunto de contraseñas con seis caracteres y le restamos aquellas sin ningún dígito. Haciendo esto, se tiene

$$|C_6| = 37^6 - 27^6 = 2{,}178{,}305{,}920$$

Del mismo modo podemos calcular $|C_7| = 37^7 - 27^7 = 84{,}471{,}523{,}930$ y $|C_8| = 37^8 - 27^8 = 3{,}230{,}049{,}917{,}440$ El número total de contraseñas es $|C| = |C_6| + |C_7| + |C_8| = 3{,}316{,}699{,}747{,}290$.

2.2.2. Principio del palomar

El principio del palomar[1] establece que si hay más palomas que palomares, entonces hay un palomar que debe contener al menos dos palomas. En otras palabras,

si $k + 1$ o más objetos han de distribuirse en k cajas, al menos una de las cajas recibirá como mínimo dos objetos.

Existen múltiples aplicaciones de este principio, como por ejemplo:

1.- En un grupo de 367 personas dos cumplen años el mismo día.

2.- En un conjunto de 20 personas nacidas en España, al menos dos han nacido en la misma Comunidad Autónoma[2].

[1]Este principio también se conoce como principio de las cajas de Dirichlet.

[2]Consideramos las ciudades autónomas de Ceuta y Melilla como Comunidades.

También hay otras aplicaciones más sutiles del principio.

Ejemplo 2.15 *Mostrar que todo entero positivo n posee un múltiplo que en su desarrollo decimal sólo contiene unos y ceros.*

Consideremos los enteros 1, 11, 111, ..., $11\ldots1$ (donde el último es el entero con $n+1$ unos en su expansión decimal). De entre estos $n+1$, aplicando el principio del palomar, dos deben tener el mismo resto al dividirlos por n. Su diferencia es un múltiplo de n y sólo contiene unos y ceros en su desarrollo decimal.

El principio del palomar puede generalizarse de la siguiente manera:

Si N objetos han de distribuirse en k cajas, al menos una de las cajas recibirá como mínimo $\lceil N/k \rceil$ objetos.

Ejemplo 2.16 *¿Cuántas cartas como mínimo debo elegir de una baraja española para garantizar que elijo tres del mismo palo?*

En este caso, las cajas de las que habla el principio del palomar se identifican con los palos de la baraja. Por lo tanto debemos ver quién es el número natural N más pequeño que verifica $\lceil N/4 \rceil \geq 3$. Este es $2 \cdot 4 + 1 = 9$.

Ejemplo 2.17 *Probar que de entre $n+1$ enteros positivos menores o iguales que $2n$ debe haber uno que divida a otro.*

Escribimos los enteros $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ como una potencia de dos por un número impar, es decir, $a_i = 2^{k_i} q_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n+1$ donde k_i es un entero no negativo. Los enteros $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ son todos impares y menores o iguales que $2n$. Como son $n+1$, aplicando el principio del palomar, al menos dos de entre ellos deben ser iguales. Supongamos que $q_s = q_r$ y escribimos $q = q_r = q_s$. Tenemos, entonces, $a_r = 2^{k_r} q$ y $a_s = 2^{k_s} q$. Si $k_r > k_s$, a_s divide a a_r, mientras que si $k_s > k_r$, a_r divide a a_s.

2.3. Variaciones, permutaciones y combinaciones

2.3.1. Variaciones y permutaciones

Supongamos que se decide organizar una cena para doce comensales distribuidos en dos mesas de seis. Supongamos además que, para evitar problemas, hemos de colocar una tarjeta con el nombre de cada comensal en el asiento que le corresponderá. ¿De cuántas formas posibles podemos ordenar a los comensales? A esta pregunta se puede responder, por lo menos, de dos formas distintas. En la primera de ellas, en la que haremos uso del principio del producto, aparecen de forma natural los conceptos de variación y de permutación, mientras que en la segunda forma sólo haremos uso del concepto de permutación. Veamos, pues, cuáles son estas dos formas de encarar el problema:

1.- Haciendo uso del principio del producto, primero elegimos a seis comensales y distribuimos sus nombres en una de las mesas. Después, colocamos los nombres de los seis restantes en la otra mesa. Multiplicando las formas en las que puedo hacer la primera tarea por las formas en las que se puede llevar a cabo la segunda, calcularemos el número total de formas posibles de colocar a los comensales. La primera tarea consiste en escoger seis de los doce comensales y adjudicarles un número entre 1 y 6, es decir, construir una aplicación inyectiva del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con el conjunto de comensales. Esta primera tarea se puede hacer de $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{12!}{6!}$ formas distintas (véase el Ejemplo 2.12). La segunda tarea, una vez realizada la primera, consiste en colocar los nombres de los seis comensales restantes en la segunda mesa, es decir, establecer una biyección del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con el conjunto de los seis comensales restantes. Esto se puede hacer de 6! formas distintas. Así pues, la distribución de los comensales se puede hacer de 12! formas distintas.

2.- El razonamiento se puede simplificar haciendo notar que se dispone de 12 plazas para 12 comensales por lo que disponer a los comensales de una cierta manera es establecer una biyección del conjunto $\{1, 2, \ldots, 12\}$ con el conjunto de comensales. Naturalmente, esto se puede hacer de 12! formas distintas.

En la primera de las tareas del apartado 1 se escogen 6 elementos distintos de un conjunto de 12 elementos y se los ordena. A esto se le suele llamar $6-$variación de 12 elementos. El número total de estas variaciones se escribe $V(12, 6)$. En general, si tenemos n elementos y tomamos m de los mismos ordenados y sin repetir ninguno, se le conoce como $m-$variación de n elementos. El número de estas variaciones se escribe $V(n, m)$. Generalizando el argumento anterior es fácil darse cuenta de que

$$V(n, m) = \frac{n!}{(n-m)!} = n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1).$$

Cuando $n = m$ las variaciones se dicen permutaciones. Una permutación no es más que una reordenación de los elementos de un conjunto. El número total de permutaciones de un conjunto con n elementos se escribe $P(n)$ y se tiene, obviamente, que $P(n) = n!$

Ejemplo 2.18 *¿Cuántos números de* 3 *dígitos distintos se pueden formar con las cifras* 1, 2, 3, 4, 5, 6*?*

La respuesta es $V(6, 3) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

Ejemplo 2.19 *¿De cuántas maneras pueden reordenarse* 8 *bolas numeradas de* 1 *al* 8*? ¿De cuántas maneras si las bolas* 4 *y* 5 *tienen que quedar juntas?*

La respuesta a la primera pregunta es $P(8)$, es decir, $8! = 40320$ maneras. Para responder a la segunda pregunta, observemos que hay dos formas distintas de situar las bolas 4 y 5 juntas; a saber: 45 ó 54. Una vez elegida una de estas posibilidades es como si tuviésemos que reordenar un conjunto de siete bolas. Por lo tanto, la respuesta a la segunda pregunta es $2 \cdot 7! = 10080$.

2.3.2. Combinaciones

Volvamos, por un momento, al ejemplo de la cena. Supongamos ahora que, por problemas de espacio, hemos de suprimir una de las mesas. Por lo tanto, sólo disponemos de seis plazas para doce posibles comensales, por lo que debemos cancelar la invitación de seis personas. En este caso, debemos escoger seis personas de entre 12 sin importar ningún tipo de orden. Dicho de otro modo, debemos elegir un subconjunto de seis comensales del total de doce. ¿De cuántas formas posibles podemos realizar esta tarea? Si escogemos seis personas y realizamos todas las posibles reordenaciones de estas seis personas obtenemos 6! reordenaciones. Si multiplicamos el número de formas de escoger seis personas de entre las doce por 6! obtenemos $V(12,6)$. Por lo tanto, el número total de formas en las que podemos escoger doce personas de un total de seis es igual a:

$$\frac{V(12,6)}{P(6)} = \frac{12!}{6!6!} = 924$$

En general, cuando tomamos un subconjunto de m elementos de un conjunto de n, se dice que construimos una m-combinación del conjunto de n elementos. El número total de $m-$ combinaciones de un conjunto de n elementos se escribe $C(n,m)$ o $\binom{n}{m}$. Por otro lado, no es difícil probar, generalizando la argumentación anterior, que

$$C(n,m) = \binom{n}{m} = \frac{V(n,m)}{P(m)} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Ejemplo 2.20 *¿Cuántas cadenas binarias de longitud* 13 *contienen, exactamente,* 10 *ceros?*

Si una cadena binaria de longitud 13 contiene 10 ceros, las posiciones en las que se encuentran los ceros constituyen una 10-combinación del conjunto $\{1,2,\ldots,13\}$. Así pues, el número de cadenas binarias de longitud 13 que contienen 10 ceros es

$$\binom{13}{10} = 286.$$

Obsérvese que el conjunto de cadenas binarias de longitud 13 que contienen 10 ceros es el mismo que el conjunto de cadenas binarias de longitud 13 que contienen 3 unos, por lo que se deberá tener que

$$\binom{13}{10} = \binom{13}{3}.$$

La identidad al final del ejemplo anterior no es casual. Es muy fácil ver (basta ver la definición de $\binom{n}{m}$) que para cualesquiera n y m con $m \leq n$, se tiene

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

Ejemplo 2.21 *Supongamos que un departamento de una empresa está compuesto por* 10 *mujeres y* 14 *hombres. ¿De cuántas formas posibles se puede formar una comisión de seis miembros si el número de hombres y de mujeres ha de ser el mismo?*

Del enunciado se deduce que hay que escoger 3 hombres de entre 14 posibles y 3 mujeres de entre 10 posibles. Esto se puede hacer de

$$\binom{14}{3} \cdot \binom{10}{3} = 43680$$

formas posibles.

2.3.3. Números binomiales

Hemos visto en la Subsección anterior que el número de las m-combinaciones de un conjunto de n elementos se denota por $\binom{n}{m}$. Estos números se conocen como números binomiales dado que aparecen como coeficientes en la expansión en potencias de expresiones binomiales como $(a+b)^n$. Este hecho se discute en el resultado siguiente.

Teorema 2.22 (Teorema del binomio) *Sean x e y variables y sea n un entero no negativo. Entonces*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Demostración.– Veamos qué ocurre al multiplicar n factores

$$(x+y)(x+y)\cdots(x+y)$$

Los términos del producto se obtienen seleccionando x o y en cada factor. El número de términos de $x^{n-k}y^k$ se corresponde con el número de maneras de seleccionar k veces y, lo que es igual al número binomial $\binom{n}{k}$. ■

Aparte del interés en sí mismo, el Teorema 2.22 nos permite deducir algunas identidades útiles.

Corolario 2.23 *Si n es un entero no negativo, se tiene:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Corolario 2.24 *Si n es un entero no negativo, se tiene:*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0.$$

El cálculo de los números binomiales depende, en general, del siguiente resultado fundamental:

Teorema 2.25 (Identidad de Pascal) *Si n y k son enteros positivos con $n \geq k$, entonces*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Demostración.– Sean T un conjunto con n elementos y a un elemento de T. Notemos que el número binomial $\binom{n}{k}$ cuenta todos los subconjuntos de T con k elementos. Estos últimos pueden contener o no a a. Los subconjuntos de T con k elementos que contienen a a son exactamente $\binom{n-1}{k-1}$ (hay que escoger $k-1$ elementos de $T \setminus \{a\}$ que tiene $n-1$ elementos), mientras que los que no contienen a a son exactamente $\binom{n-1}{k}$ (hay que elegir k elementos de $T \setminus \{a\}$). Aplicando el principio de adición se llega al resultado.

■

El Teorema 2.25 proporciona un método recursivo para calcular los números binomiales, ya que si conocemos los números $\binom{n-1}{k}$ para $0 \leq k \leq n-1$, podemos calcular todos los $\binom{n}{k}$. Estos cálculos se suelen mostrar en forma de triángulo:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
 & & & & & & & \cdots & & & & & & &
\end{array}$$

Esta forma de arreglar los cálculos de los números binomiales se suele conocer como triángulo de Pascal en recuerdo de Blaise Pascal aunque era conocida con anterioridad a él. Los números de la fila $n+1$ son los números binomiales $\binom{n}{k}$ para $k = 0, 1, \ldots, n$. Ya que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ para cualquier n, los bordes del triángulo están enteramente constituidos por unos. El Teorema 2.25 nos dice que cada número es la suma de los dos números que tiene inmediatamente por encima.

2.3.4. Variaciones y combinaciones generalizadas

En 2.3.1 y 2.3.2 hemos tratado variaciones y combinaciones[3]. En ambos casos, se trataba de escoger elementos de un conjunto (importando o no el orden) pero sin repetir elementos, es decir, cada elemento del conjunto en cuestión sólo podía ser elegido una sola vez. En muchos problemas de recuento, sin embargo, algunos elementos suelen ser usados de forma repetida. Este es el caso, por ejemplo, si construimos palabras en un alfabeto finito[4]. Por otro lado, algunos problemas de recuento hacen intervenir elementos que resultan indistinguibles: por ejemplo, si queremos contar todas las formas en las que la palabra española $CATAMARAN$ puede ser reordenada no podemos pensar en permutaciones ya que dicha palabra contiene cuatro aes.

Variaciones con repetición

Tomar elementos en un conjunto importando el orden pero pudiendo repetir elementos puede asimilarse, en términos matemáticos a definir aplicaciones. Tomar m elementos de un conjunto A de n elementos importando el orden en el que se toman y pudiendo repetir, es lo mismo que establecer una aplicación del conjunto $\{1, 2, \ldots, m\}$ en A. Este problema lo tratamos en el Ejemplo 2.11. El número de m-variaciones con repetición de un conjunto de n elementos es n^m. Por ejemplo, utilizando el alfabeto español podemos construir $27^5 = 14{,}348{,}907$ palabras de 5 letras.

Combinaciones con repetición

Las combinaciones con repetición se corresponden con la selección de un cierto número de objetos de un conjunto pudiendo repetirlos pero sin importar el orden. Cuando los conjuntos tienen cardinal pequeño y el número de objetos elegidos es también pequeño, es fácil generar todas las posibilidades. Por ejemplo, consideremos que elegimos 4 elementos sin importar el orden del conjunto $\{a, b, c\}$. En este caso, hay quince posibilidades:

$$\begin{array}{lllll} aaaa & aaab & aaac & aabb & aabc \\ aacc & abbb & abbc & abcc & accc \\ bbbb & bbbc & bbcc & bccc & cccc \end{array}$$

Veremos que es posible dar una fórmula general para el número de m-combinaciones con repetición de un conjunto con n elementos en función de los número binomiales. En la demostración interviene la representación de las posibles combinaciones como palabras del alfabeto $\{0, 1\}$; por ejemplo la combinación $abcc$ (es decir, escoger una

[3]No hablamos de permutaciones puesto que estas son caso particular de las variaciones. En esta Subsección debe entenderse, por lo tanto, que cuando hablamos de variaciones incluimos a las permutaciones entre las mismas.

[4]Aquí palabra ha de entenderse como una cadena de elementos del alfabeto.

a, una b y dos ces) se representa por 101011. Los ceros son marcas que separan el tipo de objeto, y los unos nos informan de cuántos objetos de cierto tipo hay siguiendo el esquema

$$\begin{array}{cccccc} a & & b & & c & c \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1. \end{array}$$

Dado que hay dos marcas que pueden colocarse en cualquiera de las posiciones, el total de las combinaciones en este caso particular, es $\binom{6}{2} = 15$. De forma general, se tiene:

Teorema 2.26 *El número de m-combinaciones con repetición de un conjunto con $n$elementos es igual a*

$$\binom{n+m-1}{m}$$

Demostración.– Podemos arreglar las m-combinaciones de tal forma que los elementos escogidos que sean iguales estén juntos. Una vez hecho esto, podemos asignar a cada m-combinación una palabra de longitud $m + (n-1)$ en el alfabeto $\{0,1\}$ (cada palabra debe tener m unos, uno por cada objeto elegido, y $n-1$ marcas para separar los n posibilidades de elementos a escoger). De esta forma establecemos una biyección entre el número de m-combinaciones con repetición de un conjunto con $n-$elementos y el conjunto de palabras en el alfabeto $\{0,1\}$ de longitud $n+m-1$ que contienen $n-1$ ceros. Como el número de palabras en el alfabeto $\{0,1\}$ de longitud $n+m-1$ que contienen $n-1$ ceros es igual a

$$\binom{n+m-1}{n-1} = \binom{n+m-1}{m}$$

concluimos el resultado. ∎

Veamos un ejemplo de aplicación del Teorema 2.26.

Ejemplo 2.27 *¿Cuántas soluciones tiene la ecuación*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11,$$

donde x_1, x_2 y x_3 son enteros non negativos?

Para contar el número de soluciones basta con observar que una solución se corresponde con una forma de seleccionar 11 elementos de un conjunto de 3, de tal forma que se escogen x_1 elementos de tipo 1, x_2 del tipo 2 y x_3 del tipo 3. En consecuencia, el número de soluciones buscado es igual a

$$\binom{11+3-1}{11} = \binom{13}{11} = 78$$

Permutaciones con objetos indistinguibles

En algunos problemas de recuento algunos elementos resultan indistinguibles. En este caso, hay que tener cuidado para evitar contar cosas más de una vez. Veamos un ejemplo previo a partir del cual generalizaremos.

Ejemplo 2.28 *¿De cuántas formas distintas podemos reordenar las letras de la palabra PATATA?*

Dado que algunas letras de la palabra se repiten, la respuesta no puede ser el número de permutaciones de 6 letras. Para determinar el número que buscamos, observemos que podemos situar las tres aes que tiene la palabra PATATA de $\binom{7}{3}$ formas distintas. Una vez situadas las aes, podemos situar las dos tes. Esto puede hacerse de $\binom{3}{2}$ formas distintas. Colocadas las aes y las tes tenemos $\binom{1}{1}$ formas distintas de colocar la letra p. Así pues el número total de reordenaciones de la palabra PATATA es:

$$\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = \frac{6!}{3!3!}\frac{3!}{2!1!}\frac{1!}{1!0!} = \frac{6!}{3!2!1!} = 60$$

El mismo argumento utilizado en el ejemplo puede generalizarse y se obtiene:

Teorema 2.29 *El número de permutaciones de n objetos, donde hay n_1 objetos indistinguibles de tipo 1, n_2 objetos indistinguibles de tipo 2, ..., n_k objetos indistinguibles de tipo k, es*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

2.4. Principio de inclusión y exclusión

Una de las propiedades recogidas en la Proposición 2.9 afirma que el cardinal de la unión de dos conjuntos finitos es la suma de los cardinales si los conjuntos son disjuntos. Si A y B son conjuntos y su intersección es no vacía, tampoco es difícil calcular el cardinal de $A \cup B$: el resultado de sumar $|A|$ y $|B|$ es que los elementos de $A \cap B$ se cuentan dos veces. Por lo tanto,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Este resultado es un caso sencillo de lo que suele llamarse principio de inclusión y exclusión, también conocido como principio de la criba. En su generalidad, recogemos el principio en el siguiente Teorema.

Teorema 2.30 *Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos, entonces*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \cdots + (-1)^{n-1}\alpha_n,$$

donde α_i es la suma de los cardinales de todas las intersecciones de i de los conjuntos $(1 \leq i \leq n)$.

Demostración.– Probaremos que cada elemento x de la unión contribuye exactamente en una unidad al término de la derecha de la igualdad. Supongamos que x pertenece a k de los conjuntos dados. Entonces x contribuye con k a la suma $\alpha_1 = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$. En la suma α_2, x contribuye con 1 a $|A_i \cap A_j|$ si tanto A_i como A_j están entre los k conjuntos que contienen a x. Hay, exactamente, $\binom{k}{2}$ de estos pares, de forma que $\binom{k}{2}$ es la contribución de x a la suma α_2. En general, la contribución de x a α_i es $\binom{k}{i}$ y, por la tanto, la contribución total de x al término derecho de la igualdad es

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k}.$$

Pero en virtud del Corolario 2.24 se tiene que está expresión es igual a $\binom{k}{0}$; es decir, igual a 1.

■

Hay un corolario sencillo del Teorema 2.30 que suele ser útil en la práctica. Supongamos que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son subconjuntos de un conunto X con $|X| = N$. Entonces, el número de elementos de X que no están en ninguno de estos subconjuntos es

$$|X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)| = |X| - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \cdots + (-1)^n \alpha_n$$

Veamos algunos ejemplos de aplicación del principio de inclusión y exclusión.

Ejemplo 2.31 *En un grupo de* 67 *personas,* 47 *hablan francés,* 35 *alemán y* 23 *los dos idiomas. ¿Cuántos no hablan ni francés ni alemán? Si, además,* 20 *hablan catalán, de los cuales* 12 *hablan también francés,* 11 *también alemán y* 5 *hablan los tres idiomas, ¿cuántos no hablan ninguno de los tres idiomas?*

Si llamamos X al conjunto de 67 personas, A al subconjunto de las mismas que hablan francés y B al subconjunto de los que hablan alemán, el número de los que no hablan ni francés ni alemán es:

$$|X| - |A| - |B| + |A \cap B| = 67 - 47 - 35 + 23 = 8.$$

Si ahora llamamos C al subconjunto de los que hablan catalán, el número de los que no hablan ni francés, ni alemán ni catalán es:

$$|X| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C| =$$
$$= 67 - 47 - 35 - 20 + 23 + 12 + 11 - 5 = 6.$$

Ejemplo 2.32 *Una secretaria poco eficiente tiene n cartas y n sobres con las correspondientes direcciones. ¿De cuántas maneras puede lograr que ninguna carta llegue al destinatario correcto? (Este problema se conoce como el problema de los desarreglos.)*

Podemos pensar en que cada sobre y cada carta tienen un entero i entre 1 y n como etiqueta. El hecho de poner las cartas en sobres puede interpretarse, por lo tanto, como una permutación (es decir, como una aplicación biyectiva del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$en sí mismo), π, del conjunto de $\{1, 2, \dots, n\}$: $\pi(i) = j$ significa que la carta i se introduce en el sobre j. Lo que buscamos es el número de **desarreglos**, es decir, el número de permutaciones π que no fijan ningún elemento de $\{1, 2, \dots, n\}$. Por el Teorema 2.30, el número de desarreglos es

$$d_n = n! - \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \cdots + (-1)^{n-1}\alpha_n,$$

donde α_r es el número de permutaciones que fijan r de los elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$. Ahora bien, hay $\binom{n}{r}$ formas de elegir r elementos y el número de las permutaciones que los dejan fijos es, justamente, el número de permutaciones de los $n-r$ elementos restantes, es decir, $(n-r)!$. Por lo tanto,

$$\alpha_r = \binom{n}{r}(n-r)! = \frac{n!}{r!},$$

y, en consecuencia,

$$d_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

Ejemplo 2.33 *¿Cuántos números primos hay menores que 120?*

Como $10 < \sqrt{120} < 11$, todo número no primo entre mayor que 1 y menor o igual que 120, ha de tener un factor que sea 2, 3, 5 ó 7. Por lo tanto, los primos menores o iguales que 120 y mayores que 1 son los cuatro citados y todos aquellos que no sean divisibles por ninguno de ellos. Para aplicar el principio de inlusión y exclusión, llamemos $X = \{2, 3, \dots, 120\}$, A_1 al subconjunto de X formado por los pares, A_2 al subconjunto de X formado por los múltiplos de 3, A_3 al de los múltiplos de 5 y A_4 al de los múltiplos de 7. El número de primos buscado es igual a

$$\begin{gathered}
4 + |X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)| = 123 - |A_1| - |A_2| - |A_3| - |A_4| + \\
+ |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| - \\
- |A_1 \cap A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_4| - |A_1 \cap A_3 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \\
= 123 - \left\lfloor \frac{120}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{120}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{120}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{120}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{120}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{120}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{120}{14} \right\rfloor + \\
+ \left\lfloor \frac{120}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{120}{21} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{120}{35} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{120}{30} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{120}{42} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{120}{70} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{120}{105} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{120}{210} \right\rfloor = \\
= 123 - 60 - 40 - 24 - 17 + 20 + 12 + 8 + 8 + 5 + 3 - 4 - 2 - 1 - 1 + 0 = 30
\end{gathered}$$