Tema 2. Sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI).

Señales y Sistemas

2015-2016

Índice

Índice

Sistemas LTI. Introducción

Sistemas LTI

Sistemas lineales e invariantes en el tiempo: "Linear and Time-Invariant".

- Podemos desarrollar una relación E/S muy especial (convolución)
- Conociendo el comportamiento frente a un impulso conocemos todo.

Utilidad

Son muy útiles para modelar procesos, analizarlos, predecirlos...

Índice

Respuesta al impulso

Definición de $h[n]$:

Si la entrada de un sistema LTI es un impulso, $\delta[n]$, la salida se denomina respuesta al impulso y se denota $h[n]$.

$$x[n] = \delta[n] \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow y[n] = h[n]$$

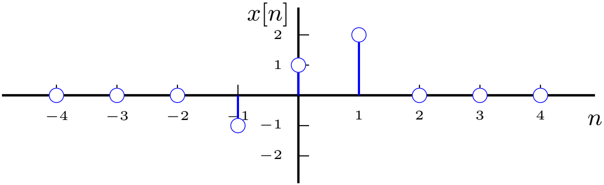
Utilidad:

Permite calcular la salida de un LTI frente a cualquier entrada...

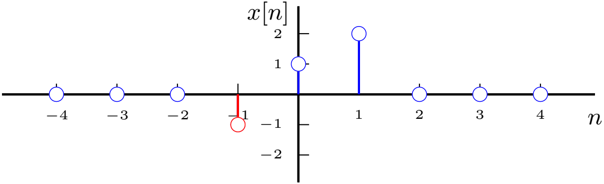
Representación de una señal arbitraria

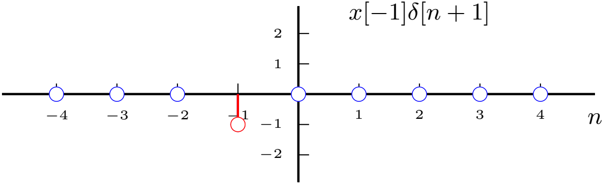
Sea una señal cualquiera, se puede expresar:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

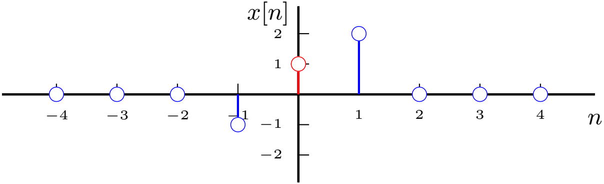


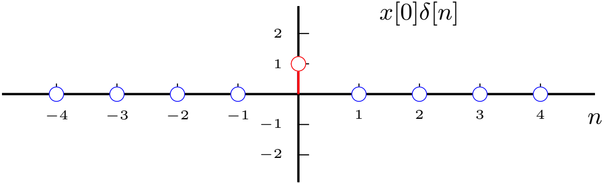
Representación de una señal arbitraria



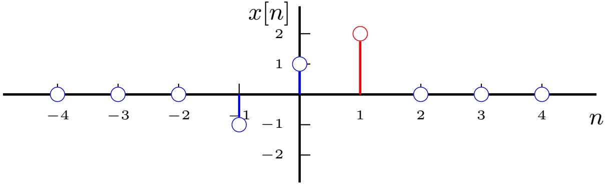


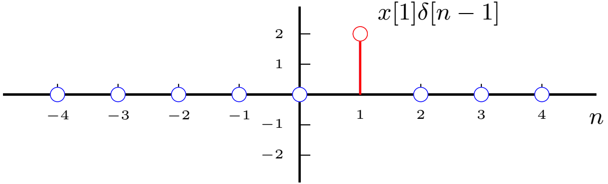
Representación de una señal arbitraria





Representación de una señal arbitraria





$$x[n] = x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1]$$

En general:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Respuesta a una entrada arbitraria. Suma de convolución

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\}$$

Linealidad:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k] \xrightarrow{Sistema} y[n] = \mathbf{T}\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \delta[n-k] \right\} =$$

$$\overset{Lineal}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot \mathbf{T}\{\delta[n-k]\}$$

Respuesta a una entrada arbitraria. Suma de convolución

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\}$$

Linealidad:

$$x\,[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\,[k]\cdot\delta\,[n-k] \xrightarrow{Sistema} y\,[n] = \mathbf{T}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x\,[k]\cdot\delta\,[n-k]\right\} =$$

$$\stackrel{Lineal}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\,[k]\cdot\mathbf{T}\left\{\delta\,[n-k]\right\}$$

Invarianza temporal:

$$\begin{matrix}\delta[n] \\ \delta[n-k]\end{matrix} \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow \begin{matrix} h[n] = \mathbf{T}\{\delta[n]\} \\ h[n-k] = \mathbf{T}\{\delta[n-k]\}\end{matrix}$$

$$y\,[n] \stackrel{Invariante}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\,[k]\cdot h\,[n-k]$$

Respuesta a una entrada arbitraria. Suma de convolución

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\}$$

Linealidad:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot\delta[n-k] \xrightarrow{Sistema} y[n] = \mathbf{T}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot\delta[n-k]\right\} =$$

$$\overset{Lineal}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot\mathbf{T}\{\delta[n-k]\}$$

Invarianza temporal:

$$\begin{matrix}\delta[n] \\ \delta[n-k]\end{matrix} \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow \begin{matrix} h[n] = \mathbf{T}\{\delta[n]\} \\ h[n-k] = \mathbf{T}\{\delta[n-k]\}\end{matrix}$$

$$y[n] \overset{Invariante}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot h[n-k]$$

Relación entrada/salida

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\cdot h[n-k] \equiv x[n]*h[n]$$

Conclusiones

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

Conclusiones:

- $h[n]$ permite calcular la salida de un sistema LTI frente a cualquier entrada como la convolución entre $x[n]$ y $h[n]$.
- $h[n]$ caracteriza completamente a los sistemas LTI.

Ejemplo de convolución

Convolución en tiempo discreto (link)

Propiedades de la convolución

- Conmutativa

$$y\left[n\right] = x\left[n\right] * h\left[n\right] = h\left[n\right] * x\left[n\right]$$

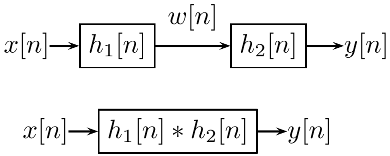
$$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n] = x[n] * h[n] \Leftrightarrow \qquad h[n] \rightarrow \boxed{x[n]} \rightarrow y[n] = h[n] * x[n]$$

- Asociativa
- Distributiva respecto de la suma

Propiedades de la convolución

- Conmutativa
- Asociativa

$$y[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

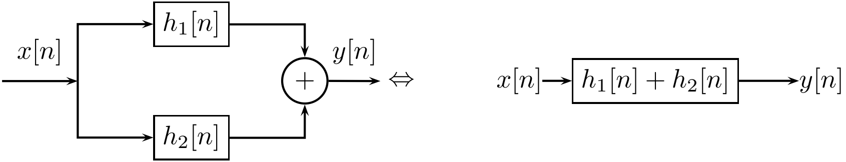


- Distributiva respecto de la suma

Propiedades de la convolución

- Conmutativa
- Asociativa
- Distributiva respecto de la suma

$$y[n] = x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$



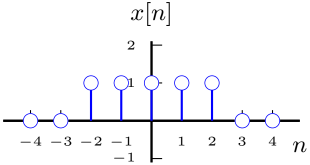
Propiedades de la convolución

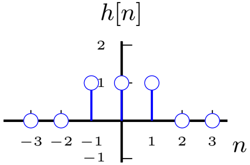
- Convolución con una delta

$$y[n] = x[n] * \delta[n-n_0] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\,\delta[n-n_0-m] = x[n-n_0]$$

Suma de convolución. Ejemplo

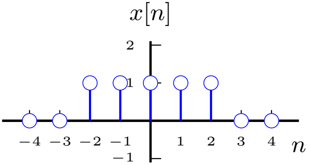
Realizar la suma de convolución de las señales:

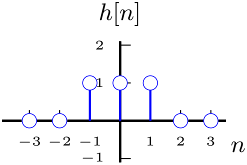




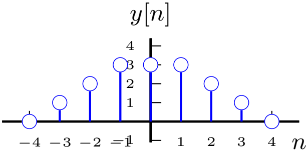
Suma de convolución. Ejemplo

Realizar la suma de convolución de las señales:





Solución:



Suma de convolución. Ejercicios

Ejercicio

Obtener la secuencia de salida $y[n]$ en los siguientes casos:

1. $x[n] = u[n]\,; h[n] = u[n]$
2. $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u[n]\,; h[n] = 2^n \cdot u[n]$

Aplicación: detección de la posición

Obtener la convolución entre $x[n] = u[n+1] - u[n-2]$ y $h[n] = u[n-3] - u[n-6]$.

Índice

Respuesta al impulso

Definición de $h(t)$:

Si la entrada de un sistema LTI es un impulso, $\delta(t)$, la salida se denomina respuesta al impulso y se denota $h(t)$.

$$x(t) = \delta(t) \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow y(t) = h(t)$$

Utilidad:

Permite calcular la salida de un LTI frente a cualquier entrada...

Representación de señales continuas en términos de impulsos

Sea una señal cualquiera, $x(t)$,

por la propiedad de la delta se puede expresar::

$$x\left(t\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x\left(\tau\right)\cdot\delta\left(t-\tau\right)\cdot d\tau$$

Respuesta de los sistemas LTI. Integral de convolución

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow y(t) = \mathbf{T}\{x(t)\}$$

Linealidad:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{Sistema} y(t) = \mathbf{T}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau) \cdot d\tau \right\} =$$

Respuesta de los sistemas LTI. Integral de convolución

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow y(t) = \mathbf{T}\{x(t)\}$$

Linealidad:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{Sistema} y(t) = \mathbf{T}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau) \cdot d\tau\right\} =$$

$$\overset{Lineal}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \mathbf{T}\{\delta(t-\tau)\} \cdot d\tau$$

Respuesta de los sistemas LTI. Integral de convolución

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow y(t) = \mathbf{T}\{x(t)\}$$

Linealidad:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{Sistema} y(t) = \mathbf{T}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau) \cdot d\tau\right\} =$$

$$\overset{Lineal}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \mathbf{T}\{\delta(t-\tau)\} \cdot d\tau$$

Invarianza temporal:

$$\begin{matrix} \delta(t) \\ \delta(t-\tau) \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow \begin{matrix} h(t) = \mathbf{T}\{\delta(t)\} \\ h(t-\tau) = \mathbf{T}\{\delta(t-\tau)\} \end{matrix}$$

Respuesta de los sistemas LTI. Integral de convolución

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow y(t) = \mathbf{T}\{x(t)\}$$

Linealidad:

$$x\left(t\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\tau\right) \cdot \delta\left(t-\tau\right) \cdot d\tau \xrightarrow{Sistema} y\left(t\right) = \mathbf{T}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x\left(\tau\right) \cdot \delta\left(t-\tau\right) \cdot d\tau\right\} =$$

$$\overset{Lineal}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\tau\right) \cdot \mathbf{T}\left\{\delta\left(t-\tau\right)\right\} \cdot d\tau$$

Invarianza temporal:

$$\begin{matrix} \delta(t) \\ \delta(t-\tau) \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow \begin{matrix} h(t) = \mathbf{T}\{\delta(t)\} \\ h(t-\tau) = \mathbf{T}\{\delta(t-\tau)\} \end{matrix}$$

$$y(t) \overset{Invariante}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\tau\right) \cdot h\left(t-\tau\right) \cdot d\tau$$

Respuesta de los sistemas LTI. Integral de convolución

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow y(t) = \mathbf{T}\{x(t)\}$$

Linealidad:

$$x\left(t\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\tau\right) \cdot \delta\left(t-\tau\right) \cdot d\tau \xrightarrow{Sistema} y\left(t\right) = \mathbf{T}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x\left(\tau\right) \cdot \delta\left(t-\tau\right) \cdot d\tau\right\} =$$

$$\stackrel{Lineal}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\tau\right) \cdot \mathbf{T}\left\{\delta\left(t-\tau\right)\right\} \cdot d\tau$$

Invarianza temporal:

$$\begin{matrix} \delta(t) \\ \delta(t-\tau) \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow \begin{matrix} h(t) = \mathbf{T}\{\delta(t)\} \\ h(t-\tau) = \mathbf{T}\{\delta(t-\tau)\} \end{matrix}$$

$$y(t) \stackrel{Invariante}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\tau\right) \cdot h\left(t-\tau\right) \cdot d\tau$$

Respuesta de los sistemas LTI. Integral de convolución

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow y(t) = \mathbf{T}\{x(t)\}$$

Linealidad:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau) \cdot d\tau \xrightarrow{Sistema} y(t) = \mathbf{T}\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau) \cdot d\tau \right\} =$$

$$\overset{Lineal}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \mathbf{T}\{\delta(t-\tau)\} \cdot d\tau$$

Invarianza temporal:

$$\begin{matrix} \delta(t) \\ \delta(t-\tau) \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow \begin{matrix} h(t) = \mathbf{T}\{\delta(t)\} \\ h(t-\tau) = \mathbf{T}\{\delta(t-\tau)\} \end{matrix}$$

$$y(t) \overset{Invariante}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau$$

Relación entrada/salida

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau = x(t) * h(t)$$

Conclusiones

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$

Conclusiones:

- $h(t)$ permite calcular la salida de un sistema LTI frente a cualquier entrada como la convolución entre $x(t)$ y $h(t)$.
- $h(t)$ caracteriza completamente a los sistemas LTI.

Ejemplo de convolución

Convolución en tiempo continuo (link)

Propiedades de la convolución

- Conmutativa

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

- Asociativa
- Distributiva respecto de la suma
- Convolución con una delta

Propiedades de la convolución

- Conmutativa
- Asociativa

$$y(t) = x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$$

- Distributiva respecto de la suma
- Convolución con una delta

Propiedades de la convolución

- Conmutativa
- Asociativa
- Distributiva respecto de la suma

$$y(t) = x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

- Convolución con una delta

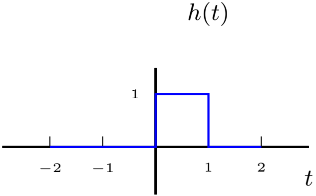
Propiedades de la convolución

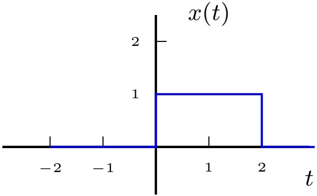
- Conmutativa
- Asociativa
- Distributiva respecto de la suma
- Convolución con una delta

$$y(t) = x(t) * \delta(t-\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\alpha-\tau)\,d\tau = x(t-\alpha)$$

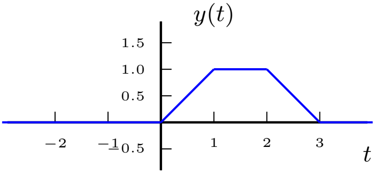
Integral de convolución. Ejemplo

Realizar convolución de las señales:





Solución:



Integral de convolución. Ejercicios

Ejercicio

Obtener la señal de salida $y(t)$ en los siguientes casos:

1. $x\left(t\right) = u\left(t\right); h\left(t\right) = u\left(t\right)$
2. $x\left(t\right) = e^{-t} \cdot u\left(t\right); h\left(t\right) = u\left(t\right) - u\left(t-1\right)$

Índice

Memoria en los sistemas LTI

Entrada/Salida

La señal de salida solo depende de la entrada en el instante actual

Respuesta al impuslso (LTI)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n-k], \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau$$

Un sistema LTI no tendrá memoria si se cumple:

$$h[n-k] = 0, \quad k \neq n \quad \Rightarrow \quad h[n-k] = K\delta[n-k] \quad \Rightarrow \quad \boxed{h[n] = K\delta[n]}$$

$$h(t-\tau) = 0, \quad t \neq \tau \quad \Rightarrow \quad h(t-\tau) = K \cdot \delta(t-\tau) \quad \Rightarrow \quad \boxed{h(t) = K\delta(t)}$$

Causalidad en los sistemas LTI

Entrada/Salida

Un sistema es causal si depende de la entrada en instantes anteriores o el actual.

Respuesta al impulso (LTI)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]; \qquad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

Un sistema LTI será causal si se cumple:

$$\boxed{h[k] = 0, \quad k < 0; \qquad h(\tau) = 0, \quad \tau < 0}$$

En estas condiciones:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]; \qquad y(t) = \int_{0}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau$$

Estabilidad en los sistemas LTI

Entrada/Salida

Un sistema que genera una señal acotada si la entrada está acotada.

Respuesta al impulso (LTI)

$$|x[n]| \leq B \Rightarrow |y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right|$$

$$\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]x[n-k]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|\,|x[n-k]| \leq B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$$

Un sistema LTI será estable si se cumple:

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h\,[k]| < \infty; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |h\,(t)| \cdot dt < \infty}$$

Ejemplos

- $h[n] = u[n]$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u[k]| = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \text{Sistema Inestable}$$

Ejemplos

- $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) \cdot d\tau$

  En primer lugar obtenemos $h(t)$:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) \cdot d\tau = u(t)$$

  Aplicamos la propiedad:

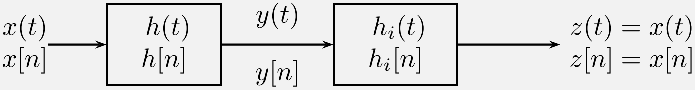
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| \cdot dt = \int_{0}^{\infty} 1 \cdot dt \to \infty \quad \Rightarrow \quad \text{Sistema Inestable}$$

Invertibilidad de sistemas LTI

Entrada/Salida

Si existe un sistema capaz de recuperar $x[n]$ a partir de $y[n]$

Respuesta al impuslso



Un sistema LTI será invertible si se cumple:

$$z(t) = (x(t) * h(t)) * h_i(t) = x(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{h(t) * h_i(t) = \delta(t)}$$

$$z[n] = (x[n] * h[n]) * h_i[n] = x[n] \quad \Rightarrow \quad \boxed{h[n] * h_i[n] = \delta[n]}$$

Ejemplo

Sea el sistema:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

La respuesta al impulso será:

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = u[n]$$

Ejemplo

Sea el sistema:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

La respuesta al impulso será:

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = u[n]$$

Obtención del sistema inverso:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] = x[n] + y[n-1]$$

Sistema Inverso:

$$z[n] = y[n] - y[n-1]$$

La respuesta al impulso será:

$$h_i[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

Ejemplo

Sea el sistema:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

La respuesta al impulso será:

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = u[n]$$

Obtención del sistema inverso:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] = x[n] + \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] = x[n] + y[n-1]$$

Sistema Inverso:

$$z[n] = y[n] - y[n-1]$$

La respuesta al impulso será:

$$h_i[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

Los dos sistemas actuando en serie:

$$h[n] * h_i[n] = u[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) = u[n] - u[n-1] = \delta[n]$$

Índice

Sistemas descritos por ecuaciones en diferencias

Relación entrada/salida

La entrada y la salida están relacionadas a través de una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes de orden N:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot x[n-k]$$

Sistemas descritos por ecuaciones en diferencias

Solución:

La salida se obtiene despejando $y[n]$ de forma recursiva:

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k \cdot x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot y[n-k]\right\}$$

Para la obtención de $y[n]$ se necesitan un conjunto de condiciones auxiliares, $y[-N]$, $y[-N+1]$, $\cdots$, $y[-1]$.

Condición de reposo inicial

Si las condiciones auxiliares son nulas, el sistema se dice que parte del reposo inicial y pasa automáticamente a ser LTI causal

Sistemas IIR

Se denomina IIR porque su respuesta al impulso tiene longitud infinita (Infinite Impulse Response)

Sistemas FIR

En el caso particular de que $N = 0$:

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k \cdot x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot y[n-k]\right\} = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} \cdot x[n-k]$$

La salida no depende de las condiciones auxiliares sino sólo de la entrada, siempre es LTI.

Respuesta al impulso:

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{b_n}{a_0} & \forall \quad 0 \leq n \leq M \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

FIR

Se les llama sistemas FIR porque su respuesta al impulso es de longitud finita $(M+1)$, (Finite Impulse Response).

Cálculo a partir de las condiciones auxiliares

Ejemplo

Dada la ecuación en diferencias:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$$

1. Obtener el valor de $y[n]$ para cualquier valor de n. Se sabe que $y[-1] = a$ y que $x[n] = 3\delta[n]$.
2. Supongamos que el sistema parte del reposo inicial, por lo tanto es LTI causal. Obtener la respuesta al impulso.

Solución

1. $$y[n] = a\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n]$$
2. $$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n]$$