# Tema 1. Introducción a los conceptos básicos de señales y sistemas.
# Parte 2. Sistemas

Señales y Sistemas

2015-2016

# Índice

# Introducción y definiciones

## Definición de sistema

Cualquier proceso que realiza una transformación de la entrada para producir la salida. El sistema suele ser un modelo matemático de un proceso físico.

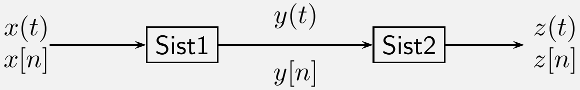
$$\begin{array}{c} x(t) \\ x[n] \end{array} \longrightarrow \boxed{\text{Sistema}} \longrightarrow \begin{array}{l} y(t) = \mathbf{T}\{x(t)\} \\ y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\} \end{array}$$

## Nota:

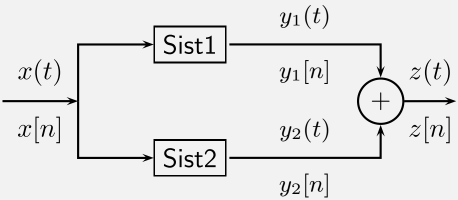
La transformación del sistema puede venir dada por una relación matemática entre la entrada y la salida, o bien asignando a cada entrada una salida particular.

# Interconexión de sistemas

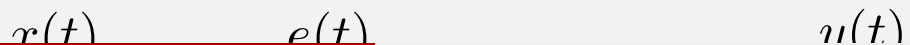
- Serie o cascada




- Paralelo




- Realimentación



# Linealidad

Un sistema es lineal si cumple las propiedades de superposición y multiplicación por una constante.

## Tiempo continuo

$$x_1(t) \rightarrow \boxed{\text{Sistema}} \rightarrow y_1(t) = \mathbf{T}\{x_1(t)\}$$
$$x_2(t) \rightarrow \boxed{\text{Sistema}} \rightarrow y_2(t) = \mathbf{T}\{x_2(t)\}$$

$$x(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \rightarrow \boxed{\text{Sistema}} \rightarrow y(t) = \mathbf{T}\{x(t)\} = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

## Tiempo discreto

$$x_1[n] \rightarrow \boxed{\text{Sistema}} \rightarrow y_1[n] = \mathbf{T}\{x_1[n]\}$$
$$x_2[n] \rightarrow \boxed{\text{Sistema}} \rightarrow y_2[n] = \mathbf{T}\{x_2[n]\}$$

$$x[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] \rightarrow \boxed{\text{Sistema}} \rightarrow y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\} = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n], \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

## Condiciones necesarias pero no suficientes

- El sistema debe realizar una transformación lineal de la señal.
- Si la entrada es nula la salida debe ser nula.

# Ejercicios

¿Son lineales estos sistemas?

1. $y(t) = x^2(t)$
2. $y[n] = x[n - n_0]$
3. $y(t) = 4 + 3x(t)$

# Invarianza en el tiempo

## Definición

Un sistema es invariante en el tiempo si un desplazamiento temporal de la señal de entrada produce el mismo desplazamiento en la señal de salida:

- Tiempo continuo:

$$x(t) \rightarrow \boxed{\text{Sistema}} \rightarrow y(t) = \mathbf{T}\{x(t)\}$$
$$x(t-t_0) \rightarrow \boxed{\text{Sistema}} \rightarrow y_{t_0}(t) = \mathbf{T}\{x(t-t_0)$$

  Es invariante si: $y_{t_0}(t) = y(t-t_0)$

- Tiempo discreto:

$$x[n] \rightarrow \boxed{\text{Sistema}} \rightarrow y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\}$$
$$x[n-n_0] \rightarrow \boxed{\text{Sistema}} \rightarrow y_{n_0}[n] = \mathbf{T}\{x[n-n_0]\}$$

  Es invariante si: $y_{n_0}[n] = y[n-n_0]$

# Ejercicios

¿Son invariantes estos sistemas?

1. $y(t) = \sin(x(t))$
2. $y[n] = x[Mn] \ \forall M \in \mathbb{Z}^{+}$
3. $y[n] = nx[n]$

# Memoria

**Definición:**

Un sistema no tiene memoria si la salida para cualquier instante sólo depende de la entrada en ese mismo instante.

**Ejemplos**

- Sin memoria
  - Resistencia: $y(t) = R \cdot x(t)$
  - $y[n] = x^2[n]$
- Con memoria
  - Condensador: $y(t) = \dfrac{1}{C} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$
  - $y(t) = x(t-2)$
  - $y[n] = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

# Causalidad

## Definición

Se dice que un sistema es causal cuando la salida en un instante de tiempo sólo depende de los valores de la entrada en ese mismo instante y/o instantes anteriores, pero no en instantes futuros.

## Ejemplos

- Causales
  - $y(t) = 3x(t) - 2x(t-2)$
  - $y[n] = x[n] - x[n-1]$
- No causales
  - $y(t) = 3x(t) - 2x(t+2)$
  - $y[n] = x[n+2]$

Interesante relación con la memoria

# Ejercicios

¿Son causales estos sistemas?

1. $y(t) = x(t) \cdot \cos(t+1)$
2. $y[n] = x[-n]$

# Estabilidad (BIBO)

## Definición

Un sistema es estable si para cualquier entrada acotada en amplitud, la salida correspondiente está también acotada.

$$|x(t)| < K \Rightarrow |y(t)| < M;\;\; K, M \in \mathbb{R}^+;\;\; K \neq \infty, M \neq \infty$$

$$|x[n]| < K \Rightarrow |y[n]| < M;\;\; K, M \in \mathbb{R}^+;\;\; K \neq \infty, M \neq \infty$$

## Nota

En sistemas físicos la estabilidad es consecuencia de la presencia de mecanismos que disipan energía, por ejemplo, las resistencias en los circuitos eléctricos.

# Ejercicios

¿Son estables estos sistemas?

1. $y(t) = x^2(t)$
2. $y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{M} x[n-k]$
3. $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]$
4. $y[n] = nx[n]$

# Invertibilidad

## Definición

Un sistema es invertible si a partir de la salida podemos recuperar la entrada que la ha producido. El sistema inverso en cascada con el original producirá una salida igual a la entrada del sistema original.

$$\begin{matrix} x(t) \\ x[n] \end{matrix} \longrightarrow \boxed{\text{Sistema } (\mathbf{T})} \xrightarrow[y[n]]{y(t)} \boxed{\text{Sistema inv. } (\mathbf{T}^{-1})} \longrightarrow \begin{matrix} x(t) \\ x[n] \end{matrix}$$

## Condición necesaria:

Distintas entradas deben producir distintas salidas.

# Ejercicios

¿Son invertibles estos sistemas? (Obtener inverso)

1. $y(t) = 2x(t)$
2. $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$
3. $y(t) = x^2(t)$

## Nota

Para comprobar si un sistema en invertible se puede:

- Poner un contraejemplo que muestre que dos entradas distintas producen la misma salida. En ese caso sería no invertible.
- Intentar despejar la señal de entrada en función de la señal de salida. Si lo conseguimos sería invertible y se tendría directamente el sistema inverso.