Tema 1. Introducción a los conceptos básicos de señales y sistemas.
Parte 1. Señales

Señales y Sistemas

2015-2016

Índice

Introducción y definiciones

Señal:

Es una función que representa matemáticamente una magnitud cuya variación contiene información.

Función:

Asignación de una variable independiente a una variable dependiente.
Por ejemplo, para cada valor de t le asigna un valor $f(t)$.

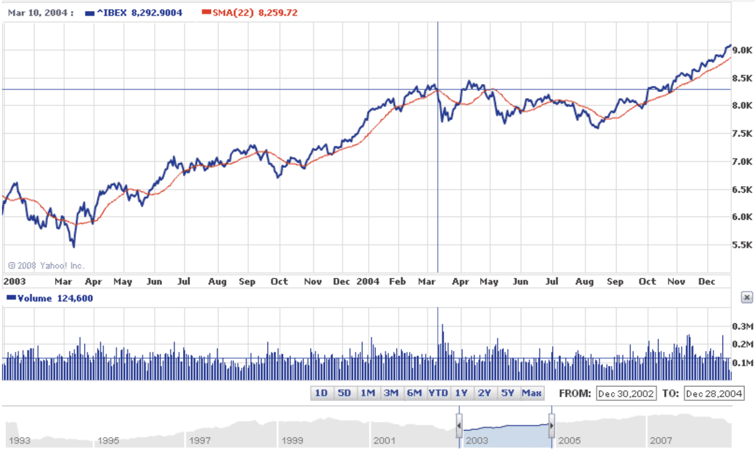
- Dominio: Conjunto de valores que puede tomar la variable independiente, real o entero (típicamente el tiempo).
- Rango: Conjunto de valores que puede tomar función, real o complejos.

Ejemplos

- Voltajes o corrientes en un circuito. $v(t) = 4sen(\omega t)V$
- Imágenes digitales.
- Índices bursátiles.
- Etc.

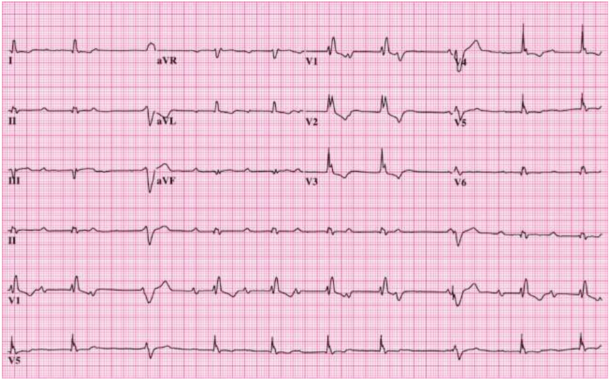
Ejemplos de señales

Señal unidimensional aleatoria. Índice Ibex35.



Ejemplos de señales

Otro ejemplo de señal unidimensional. Electrocardiograma



Ejemplos de señales

Señales bidimensionales. Dos variables independientes

Tipos de señales

Según su naturaleza

- Señales Deterministas. Para todo valor de la variable independiente es posible conocer el valor de la señal. Pueden ser expresadas mediante una relación matemática.

  Ejemplo: $v(t) = 5cos(\omega t + \pi/3)V$

- Señales Aleatorias. El valor que puede tomar la señal para cada valor de la variable independiente es aleatorio. Como mucho podemos estudiar funciones densidad de probabilidad.

  Ejemplo: Ibex35

Según el número de variables independientes

- Señales unidimensionales. Son funciones de una sola variable independiente (generalmente el tiempo).
- Señales multidimensionales. Son funciones con más de una variable independiente.

Según el dominio

- Señales de variable continua. La variable independiente es real.
- Señales de variable discreta. La variable independiente es entera.

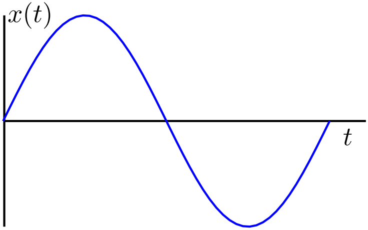
Según el rango

- Señales reales. La función toma valores reales.
- Señales complejas. La función toma valores complejos.

¿Como es el dominio y rango de una señal digital?

Representación de una sola variable

Señal de tiempo continuo



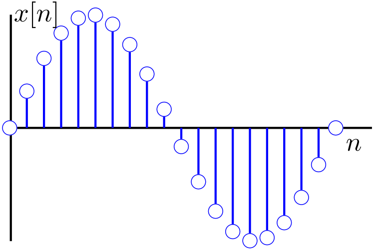
$\boxed{x(t)}$

$t \in \mathbb{R}$

Con dimensiones

¿¿plot(t,x)

Señal de tiempo discreto



$\boxed{x[n]}$ ← Secuencia

$n \in \mathbb{Z}$

Adimensional

¿¿stem(n,x)

Representación de señales complejas

Recordatorio:

Un número $a \in \mathbb{C}$, se puede representar de dos formas:

- Rectangular: $a = \text{Re}\{a\} + j\text{Im}\{a\}$,
- Polar: $a = |a|e^{j\phi_a}$ donde $j = \sqrt{-1}$

Si una señal es compleja, $x(t) \in \mathbb{C}$:

Su representación implica dos funciones:

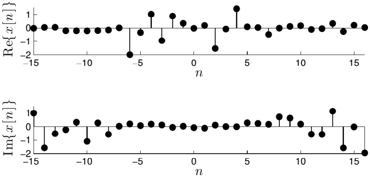
- Rectangular: $x(t) = \text{Re}\{x(t)\} + j\text{Im}\{x(t)\}$
- Polar: $x(t) = |x(t)|e^{j\phi_x(t)}$

Igual para el tiempo discreto

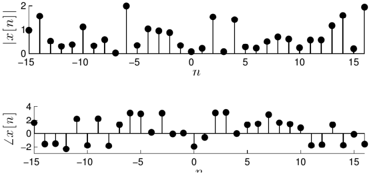
Ejemplo

Ejemplo:

- Rectangular: $x[n] = \text{Re}\{x[n]\} + j\text{Im}\{x[n]\}$



- Polar: $x[n] = |x[n]|e^{j\phi_x[n]}$

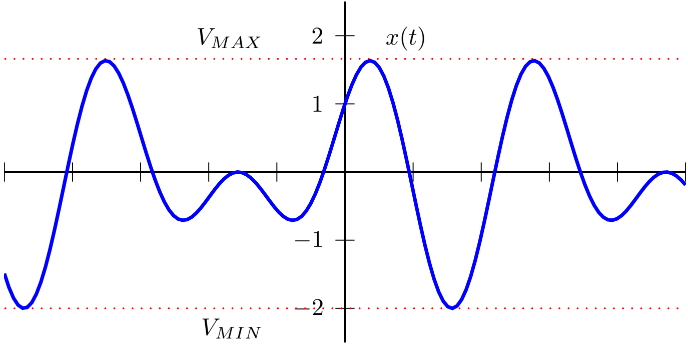


Caracterización de las señales

Las señales se pueden caracterizar (medir, reconocer, analizar) mediante distintas propiedades. Algunas de ellas son:

- Valores máximos y de pico a pico. Medidas de amplitud.
- Periodicidad.
- Simetría.
- Potencia y energía.

Valores máximos y de pico a pico



El valor de pico a pico se define como:

$$V_{pp} = |x(t)_{max} - x(t)_{min}|$$

Señales periódicas

Señal periodica en tiempo continuo

$$x(t) = x(t + kT_0),\ \forall t,\ T_0 \in \mathbb{R}^+,\ k \in \mathbb{Z}$$

donde $T = kT_0$ es el periodo de la señal y T_0 es el periodo fundamental.

Dimensiones:

- Periodo T [s]
- Frecuencia $f = 1/T$ [s^{-1}, Hz]
- Frecuencia angular $\omega = 2\pi/T = 2 \cdot pi \cdot f$ [rad/s]

Señal periodica en tiempo discreto

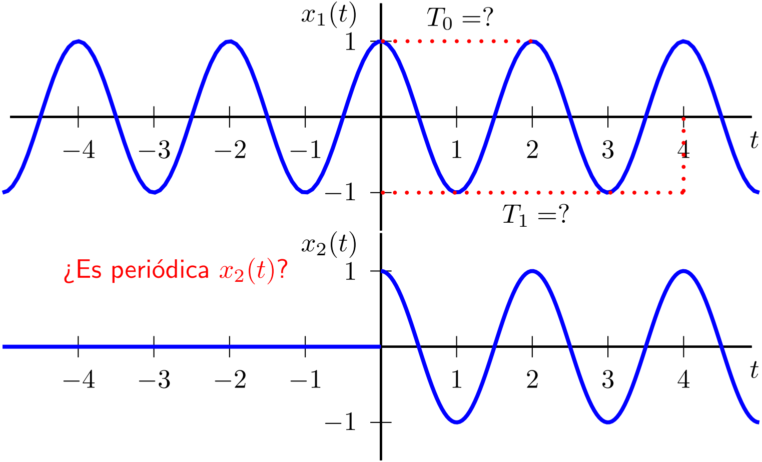
Una señal en tiempo discreto es periódica si:

$$x[n] = x[n + kN_0],\ \forall n\ N_0 \in \mathbb{Z}^+,\ k \in \mathbb{Z}$$

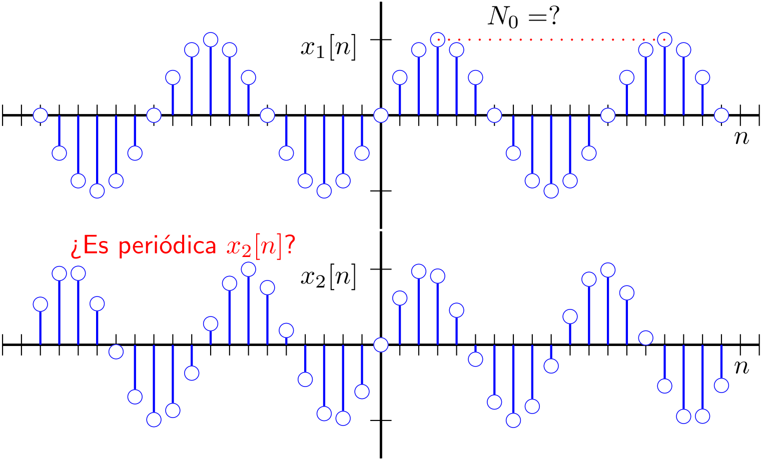
donde $N = kN_0$ es el periodo de la señal y N_0 es el periodo fundamental (debe ser un entero)

Pensar en una señal constante

Ejemplos



Periodicidad en tiempo discreto. Ejemplo



Simetría

Dos tipos de simetría: Par e impar.

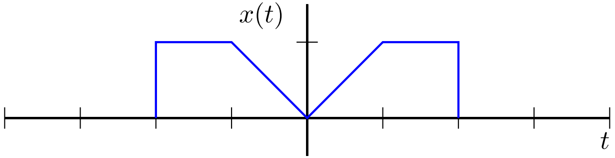
Simetría Par

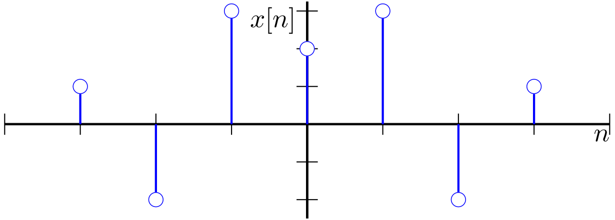
$$x(t) = x(-t)$$
$$x[n] = x[-n]$$

Simetría Impar

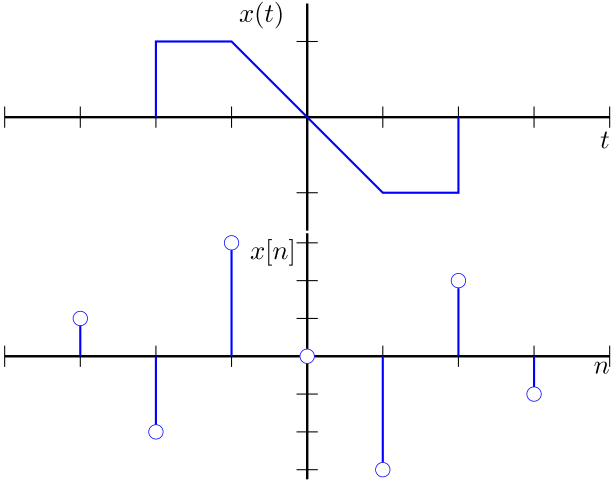
$$x(t) = -x(-t)$$
$$x[n] = -x[-n]$$

Ejemplos. Simetría par





Ejemplos. Simetría impar



Partes par e impar de una señal

Cualquier señal se puede descomponer en una parte par y otra impar.

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

Siendo :

$$x_p(t) = \frac{1}{2}\left(x(t) + x(-t)\right)$$
$$x_i(t) = \frac{1}{2}\left(x(t) - x(-t)\right)$$

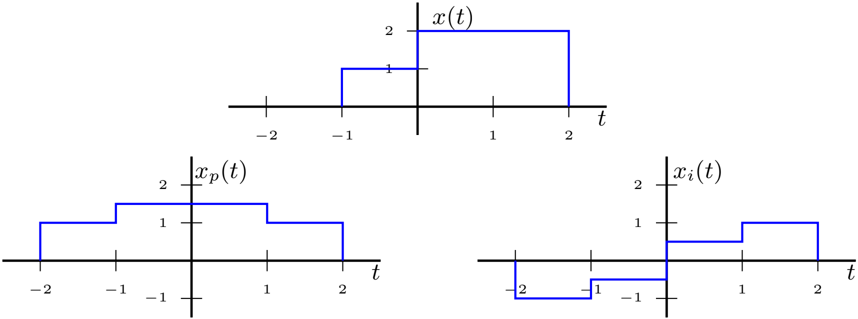
$$x[n] = x_p[n] + x_i[n]$$

Siendo :

$$x_p[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x[-n]\right)$$
$$x_i[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] - x[-n]\right)$$

Demostrarlo!!!!

Ejemplo. Partes par e impar de una señal



Energía

Tiempo continuo

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

Tiempo discreto

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Potencia media

Tiempo continuo

$$P_m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 \, dt$$

Tiempo discreto

$$P_m = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Señales definidas en potencia y en energía

Señales definidas en energía: $E_x < \infty$

Energía finita y potencia media nula.
Ejemplo: señales limitadas en el tiempo

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_1 \leq t \leq t_2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Señales definidas en potencia: $P_m < \infty$.

Energía infinita y Potencia media finita.
Ejemplo: $x(t) = 3\text{sen}(5t)$

Señales no definidas ni en potencia ni en energía.

Energía y potencia media infinitas.
Ejemplo: $x(t) = t$

Desplazamiento

Definición

El desplazamiento se produce cuando a la variable independiente se le suma una constante. La transformación sería:

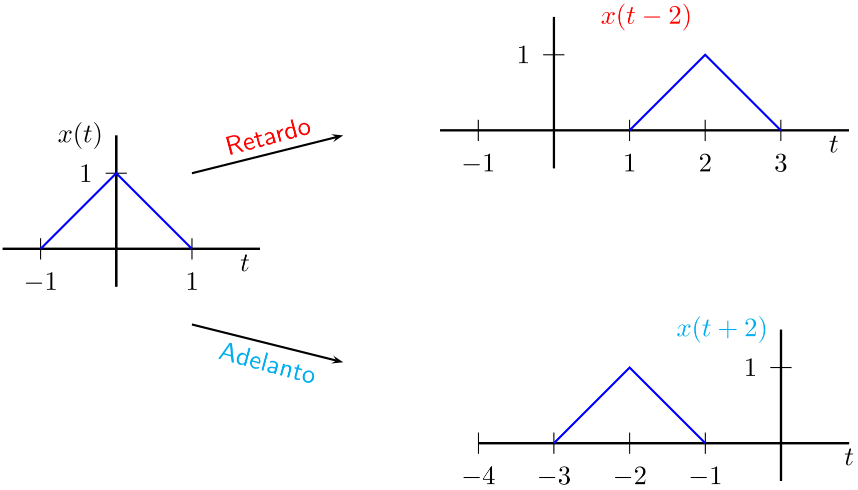
$$x(t + t_0) \text{ donde } t_0 \in \mathbb{R}$$
$$x[n + n_0] \text{ donde } n_0 \in \mathbb{Z}$$

Resultado

El resultado sería un retardo o un adelanto de la señal:

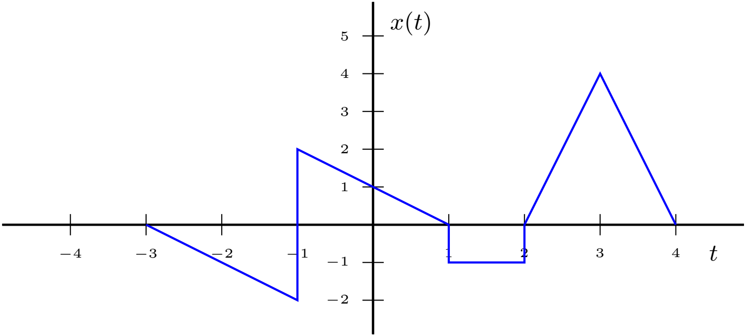
- Un desplazamiento del mismo signo que la variable independiente implica un adelanto.
- Un desplazamiento de distinto signo que la variable independiente implica un retardo.

Efecto del desplazamiento



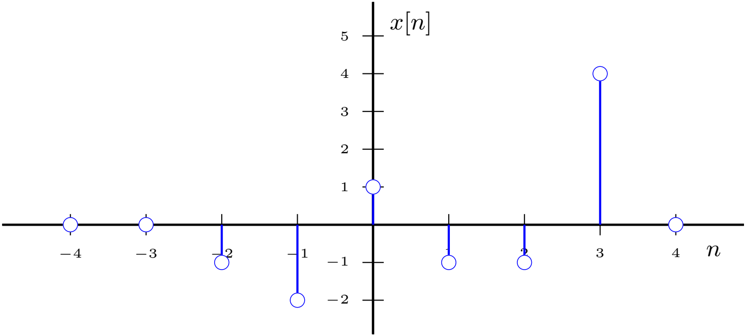
Ejercicio

Representar las señales $x(t-3)$ y $x(t+2)$



Ejercicio

Representar las señales $x[n-2]$ y $2x[n+2]$



Reflexión

Definición

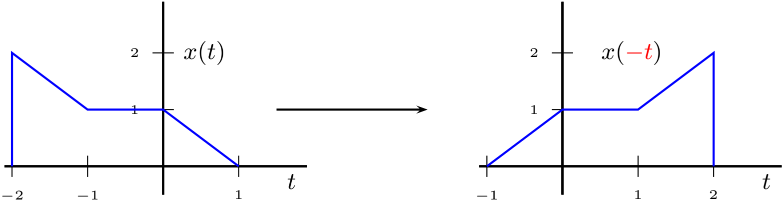
La reflexión se produce cuando se cambia el signo de la variable independiente.

$$x(-t)$$
$$x[-n]$$

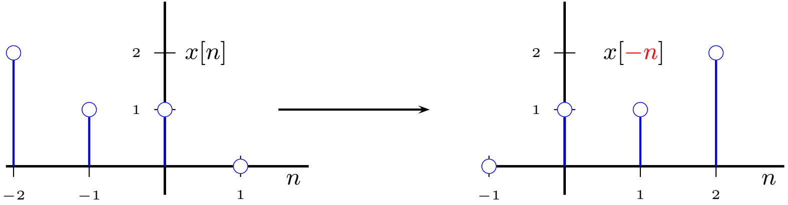
Resultado

El resultado sería una reflexión respecto al origen.

Efecto de la reflexión en tiempo continuo



Efecto de la reflexión en tiempo discreto



Cambio de escala

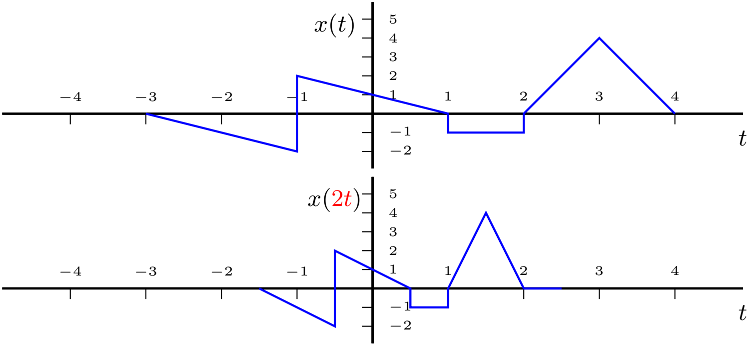
Cambio de escala

Se produce cuando la variable independiente se multiplica o divide por una constante. Se producen distintos efectos en tiempo continuo y discreto.

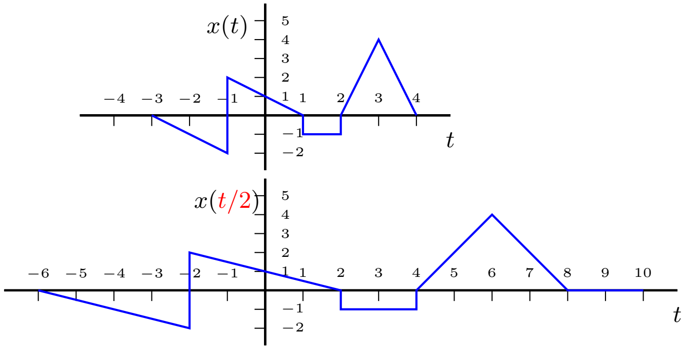
Tiempo continuo, $x(at)$

- Si $|a| > 1$ se produce es una compresión en el tiempo.
- Si $|a| < 1$ se produce una expansión en el tiempo.
- Si a es negativa se producirá además una reflexión.

Compresión



Expansión



Cambio de escala en tiempo discreto. Diezmado e interpolación

La operación de multiplicar la variable independiente por una constante entera (de módulo mayor que 1) se llama diezmado porque produce pérdida de datos de la señal.

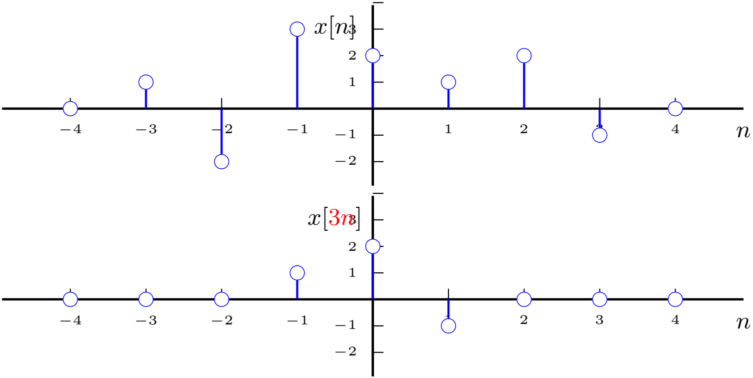
Diezmado de orden M

Se define como:

$$y[n] = x[Mn]$$

El resultado sería una señal que conservaría sólo una de cada M muestras.

Resultado del diezmado



Interpolación

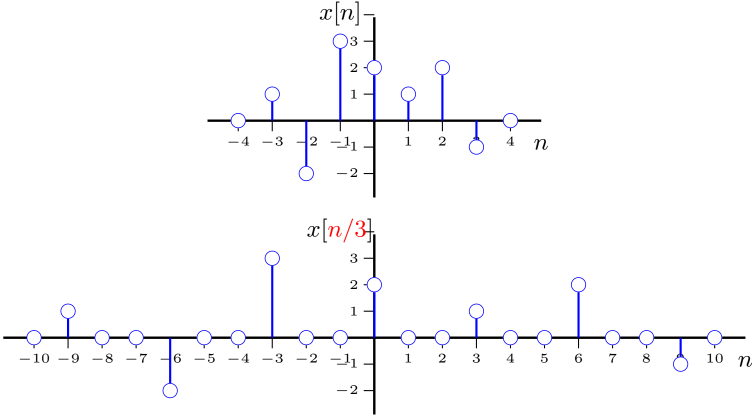
La operación de dividir la variable independiente por una constante entera (de módulo mayor que 1) se llama interpolación. Supone la aparición de datos nuevos en la señal.

Interpolación de orden L

Se define como:

$$y[n] = \begin{cases} x[n/L], & \text{si } n = \dot{L} \\ 0, & n \neq \dot{L} \end{cases}$$

Resultado de la interpolación



Combinación de transformaciones

Las transformaciones de la variable independiente pueden aparecer combinadas en una sola expresión. En ese caso es importante seguir un orden a la hora de realizar las transformaciones. Uno posible (pero no único) sería:

1. Desplazamiento.
2. Reflexión.
3. Cambio de escala.

Es importante comprobar la señal resultante dando varios valores a la variable independiente.

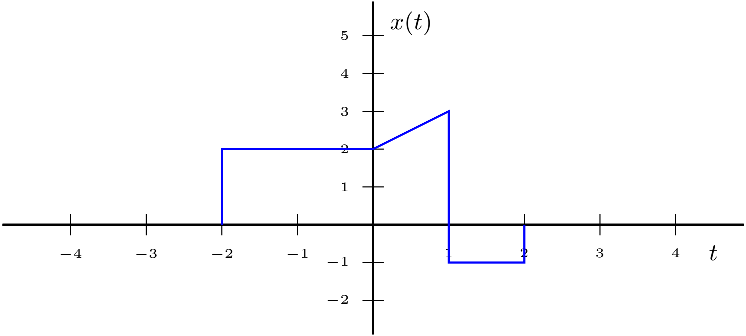
Ejemplos:

- $x\left(1-\frac{t}{2}\right)$
- $x\left[3n+2\right]$

Ejercicio

Ejercicio

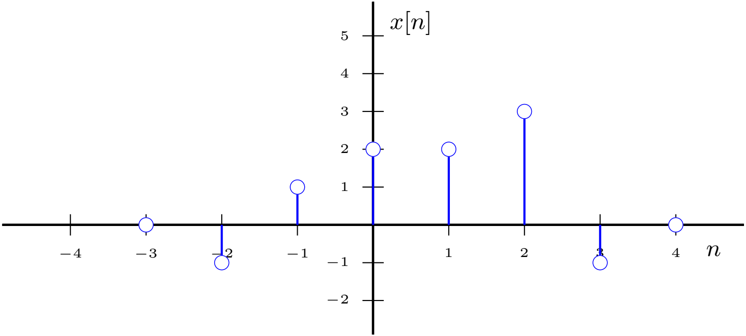
Representar la señal $x\left(1 - \dfrac{t}{2}\right)$



Ejercicio

Ejercicio

Representar la señal $x[3n+2]$

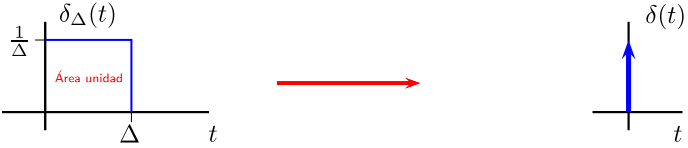


Impulso unidad delta de Dirac. $\delta(t)$

Se trata de una función generalizada (distribución) que se caracteriza por:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

Se puede obtener como aproximación de otras funciones. Por ejemplo:



$$\boxed{\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)}$$

Propiedades de la delta de Dirac

Integración

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t)\, dt = \begin{cases} 1 & \text{si } t_1 \leq 0 \leq t_2 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Multiplicación

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

En particular: $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$

Mezclando ambas:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau = x(t)$$

Cualquier señal se puede obtener como combinación lineal de deltas desplazadas.

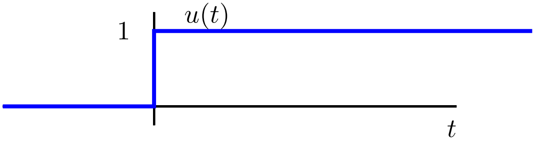
Otras propiedades:

- $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$
- $\delta(-t) = \delta(t)$

Escalón unidad. $u(t)$

El escalón unidad se define como:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$



Está relacionado con la delta de Dirac con las siguientes expresiones:

$$\boxed{u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau} \quad \boxed{\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}}$$

Pulso rectangular

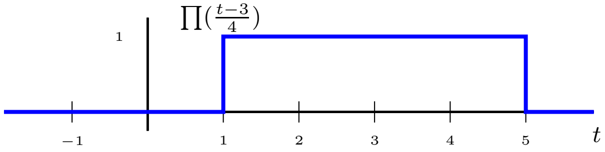
Se define como:

$$\prod(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1/2 \\ 0, & |t| > 1/2 \end{cases}$$

Se puede definir en función del escalón:

$$\prod\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right) = u\left(t - \left(t_0 - \frac{\tau}{2}\right)\right) - u\left(t - \left(t_0 + \frac{\tau}{2}\right)\right)$$

Ejemplo:



Función exponencial

La función exponencial tiene la siguiente forma:

$$x(t) = Ae^{ct};\ \text{con } A, c \in \mathbb{C}$$

Dependiendo de los valores que tomen las constantes A y c se obtienen señales distintas:

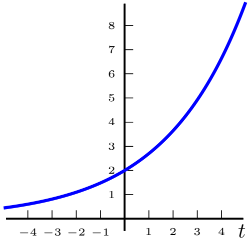
- Si A y c son reales tendremos una **exponencial real**.
- Si A y c son complejas tendremos una **exponencial compleja**.
- Si c es imaginaria pura tendremos una señal **exponencial compleja periódica**.

Exponencial real

$$x(t) = Ae^{ct};\ \text{con } A, c \in \mathbb{R}$$

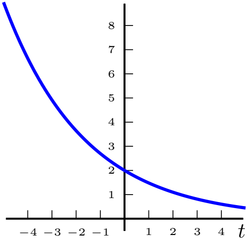
Con $c > 0$ exponencial creciente.

$$x(t) = 2e^{0,3t}$$



Con $c < 0$ exponencial decreciente.

$$x(t) = 2e^{-0,3t}$$

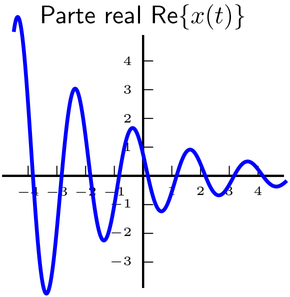


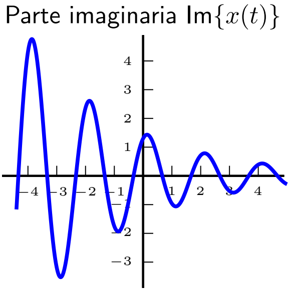
Exponencial compleja

$$x(t) = Ae^{ct};\ \text{con } A, c \in \mathbb{C}$$

$$A = |A|e^{j\theta}, c = \sigma + j\omega_0$$

$$x(t) = |A|e^{\sigma t}(\cos(\omega_0 t + \theta) + j\,\text{sen}(\omega_0 t + \theta))$$





donde:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\,\text{sen}(\omega_0 t)$$

Exponencial compleja periódica

Definición

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

Periodicidad: $x(t) = x(t+T),\ \forall t$

$$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t+T)} = e^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T}$$

Se debe cumplir: $e^{j\omega_0 T} = 1 \Rightarrow \omega_0 T = 2\pi k, \;\; k \in \mathbb{Z}$.
Por lo tanto:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} k, \;\; k \in \mathbb{Z}$$

El periodo fundamental:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \text{ [s]}$$

La frecuencia fundamental:

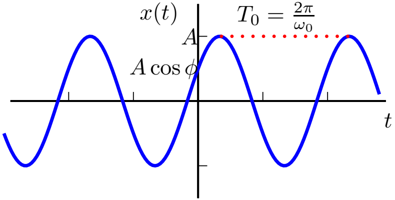
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \text{ [rad/s]}$$

Para $\omega_0 = 0$ tendríamos $x(t) = 1$ y el periodo sería indefinido.

Señal sinusoidal

Una señal relacionada directamente con la exponencial compleja periódica es la señal sinusoidal:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$



mediante la fórmula de Euler:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\mathsf{sen}(\omega_0 t)$$

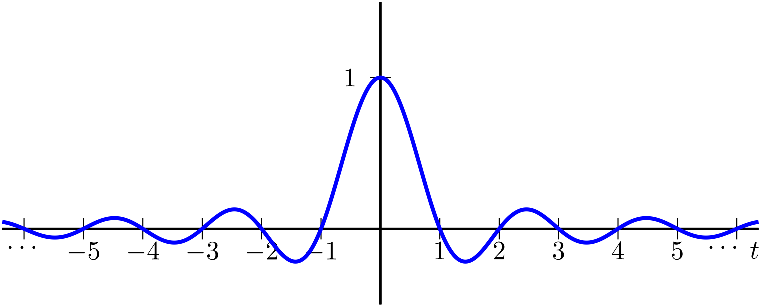
Ejemplo:

- Calcular el periodo de la señal $x(t) = \cos(2\pi t) + \cos(2t)$.
- Calcular el periodo de la señal $x(t) = \cos(2t) + \cos(\frac{3}{2} \cdot t)$

Función sinc

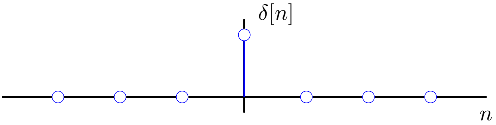
La función **sinc** normalizada se define como:

$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\mathrm{sen}(\pi t)}{\pi t};\ \text{con}\ \mathrm{sinc}(0) = 1$$



Impulso unidad ó delta de Kronecker: $\delta[n]$

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



Propiedades:

1. $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] = 1$$
2. $x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0]$

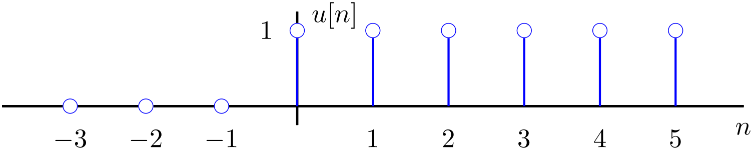
Consecuenicia:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] = x[n]$$

Cualquier señal discreta se puede obtener como combinación lineal de deltas desplazadas

Escalón unidad. $u[n]$

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$



Está relacionado con la delta:

$$\boxed{u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]} \quad \boxed{\delta[n] = u[n] - u[n-1]}$$

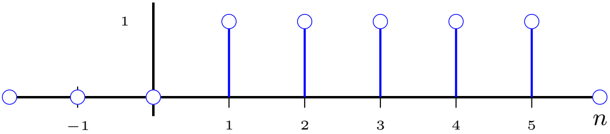
Pulso rectangular

$$p[n] = \begin{cases} 0, & n < N_1 \\ 1, & N_1 \leq n \leq N_2 \\ 0, & n > N_2 \end{cases}$$

Se puede expresar en función del escalón:

$$p[n] = u\left[n - N_1\right] - u\left[n - (N_2 + 1)\right]$$

Ejemplo:



Función exponencial

La función exponencial tiene la siguiente forma:

$$x[n] = C\alpha^n; \text{ con } C, \alpha \in \mathbb{C}$$

Dependiendo de los valores que tomen las constantes C y α se obtienen señales distintas:

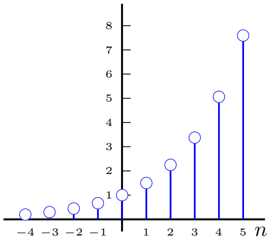
- Si C y α son reales tendremos una **exponencial real**.
- Si C y α son complejas tendremos una **exponencial compleja genérica**.
- Si $|\alpha| = 1$ tendremos una señal **exponencial compleja**.

Exponencial real

$$x(t) = C\alpha^n; \text{ con } C, \alpha \in \mathbb{R}$$

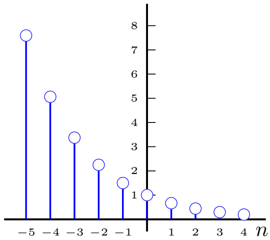
Con $|\alpha| > 1$ y $\alpha > 0$ exponencial creciente.

$$x[n] = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$



Con $|\alpha| < 1$ y $\alpha > 0$ exponencial decreciente.

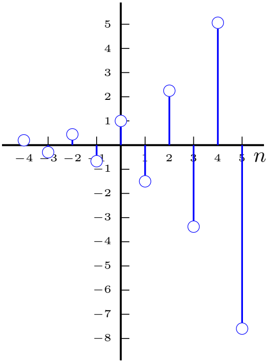
$$x[n] = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$



Exponencial real

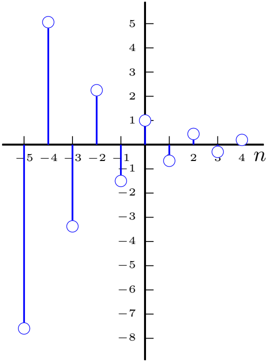
Con $|\alpha| > 1$ y $\alpha < 0$ exponencial creciente alterna.

$$x[n] = \left(-\frac{3}{2}\right)^n$$



Con $|\alpha| < 1$ y $\alpha < 0$ exponencial decreciente alterna.

$$x[n] = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$$



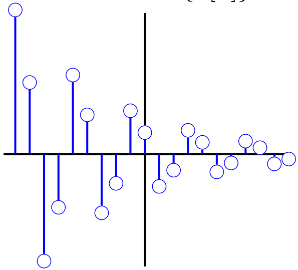
Exponencial compleja genérica

$$x[n] = C\alpha^n;\ \text{con } C, \alpha \in \mathbb{C}$$

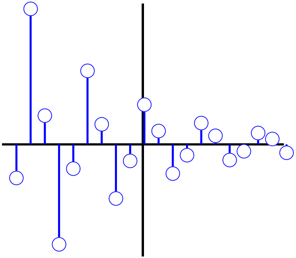
$$C = |C|e^{j\theta}, \alpha = |\alpha|e^{j\Omega_0}$$

$$x[n] = |C||\alpha|^n \left(\cos(\Omega_0 n + \theta) + j\,\text{sen}(\Omega_0 n + \theta)\right)$$

Parte real $\text{Re}\{x[n]\}$



Parte imaginaria $\text{Im}\{x[n]\}$



Exponencial compleja

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n}$$

Periodicidad

- Cálculo del periodo:

$$x\left[n\right] = x\left[n+N\right]$$
$$Ae^{j\Omega_0 n} = Ae^{j\Omega_0 (n+N)}$$
$$\Omega_0 N = 2\pi k \Rightarrow N = \frac{2\pi k}{\Omega_0},\ N, k \in \mathbb{Z}^+$$

  - No todas son periódicas !!!
  - La frecuencia es $\Omega_0 = \frac{2\pi k}{N}$, los múltiplos de $2\pi/N,\ N \in \mathbb{Z}^+$.
- Existen muchas frecuencias que generan la misma señal: Ω_0 y $\Omega_0 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$:

$$Ae^{j\Omega_0 n} = Ae^{j(\Omega_0 + 2\pi k)n}$$

solo necesitamos un intervalo de longitud 2π para obtener todas las frecuencias!!!

Número de frecuencias finito

Para un N dado, las únicas frecuencias diferentes son:

$$\Omega_k = \frac{2\pi k}{N},\ k \in [0, N)$$

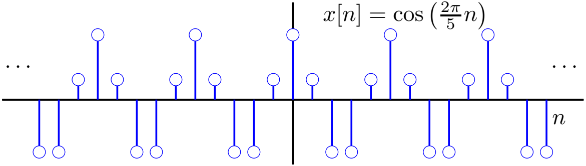
Periodicidad

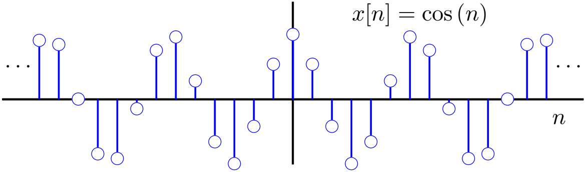
Diferencias entre tiempo continuo y discreto

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\Omega_0 n}$
Señales distintas para distintos valores de ω_0	Señales iguales para valores de Ω_0 separados por múltiplo de 2π
Periódica para cualquier valor de ω_0	Periódica sólo si $$\Omega_0 = k\frac{2\pi}{N}$$

Señal sinusoidal

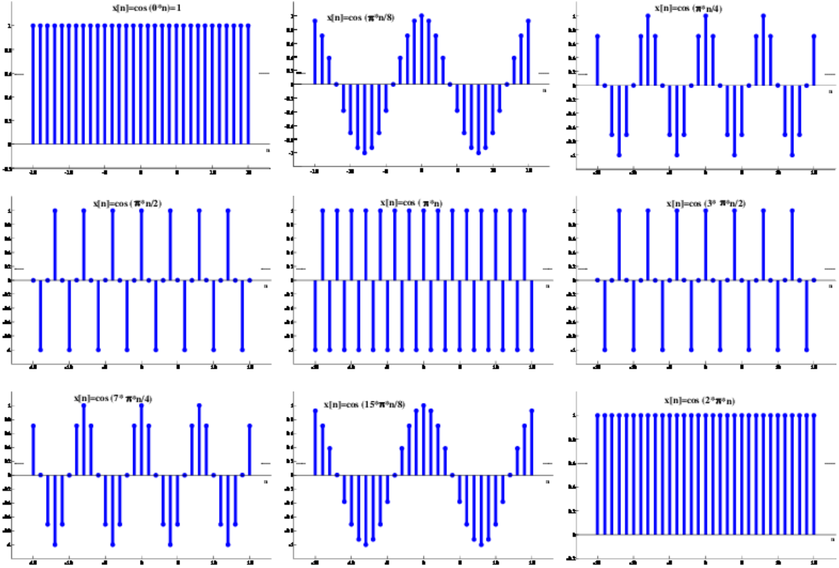
$$x[n] = A\cos(\Omega_o n + \phi)$$

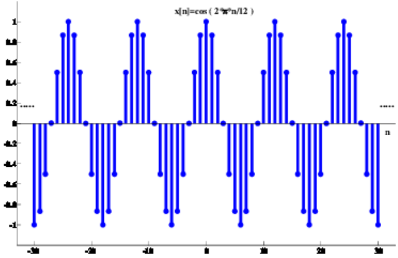


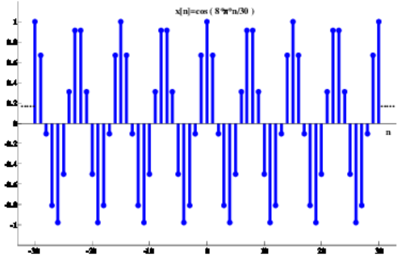


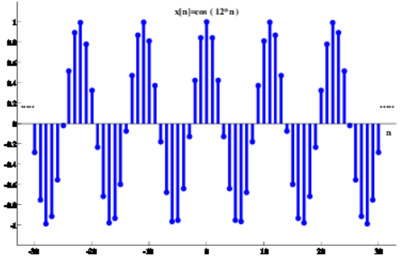
Ejemplo:

- Calcular el periodo de la señal $x[n] = \cos(2\pi n) + \cos(2n)$.
- Calcular el periodo de la señal $x[n] = \cos(\frac{2\pi}{3}n) + \cos(\frac{3\pi}{2}\cdot n)$


x[n]=cos (0*n)=1
x[n]=cos (π*n/8)
x[n]=cos (π*n/4)
x[n]=cos (π*n/2)
x[n]=cos (π*n)
x[n]=cos (3* π*n/2)
x[n]=cos (7* π*n/4)
x[n]=cos (15*π*n/8)
x[n]=cos (2*π*n)


x[n]=cos (2*π*n/12)
n


x[n]=cos (8*π*n/30)
n


x[n]=cos (12*n)
n