Tema 9. Oscilaciones.

Problemas resueltos.

Problema 1.- Un bloque de 4 Kg de masa vibra con movimiento armónico simple con una amplitud $x_0 = 9cm$ y un periodo $T = 3s$.
Encontrar:
a) la frecuencia f
b) su velocidad máxima y su velocidad cuando el desplazamiento es $x = 6cm$
c) la máxima fuerza de restauración que actúa sobre él y la fuerza de restauración cuando $x = 5cm$
d) su energía cinética máxima
e) su energía potencial máxima
f) la energía total del bloque vibrante en cualquier posición.

Solución:

a) La frecuencia del movimiento es $f = 1/T = 1/3$ Hz, por lo su frecuencia angular viene dada por $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{3}$ rad s^{-1}.

b) La velocidad es la derivada temporal de la posición, $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$. Por lo tanto $v(t) = -\omega x_0 \operatorname{sen}(\omega t)$, y $v_{max} = \omega x_0 = 6\pi cms^{-1}$.

Cuando el desplazamiento es 6 cm, su fase viene dada por la expresión $6 = 9\cos(\alpha)$. La velocidad se obtiene entonces de $v_6 = -\omega x_0 \operatorname{sen}(\alpha)$, luego $v_6 = 6\pi\sqrt{1 - cos^2(\alpha)} = 2\pi\sqrt{5}$ cm s^{-1}.

c) La expresión de la fuerza es $F = ma = -m\omega^2 x_0 cos(\omega t)$, por lo que su valor máximo resulta ser $F_{max} = m\omega^2 x_0 = 0,16\pi^2$ N.

Por otra parte, el valor de la fuerza en $x = 5$ es $F_5 = m\omega^2 0,05 = \frac{0,8}{9}\pi^2$ N.

d) $E_{c,max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = 72\pi^2 10^{-4}$ J.

e) Tomando como origen de potenciales el punto en que $x = 0$, la energía potencial máxima es igual a la energía cinética máxima.

f) La energía total del bloque es igual a la energía potencial máxima o cinética máxima, ya que los puntos de energía potencial máxima son aquellos donde la cinética toma valores cero, y viceversa.

Problema 2.- Una bala de 10 g choca con un bloque de 990 g que está unido a un resorte. Por efecto del choque, el resorte se comprime 10 cm. Sabemos que para comprimir el resorte 1 cm se necesitan 10^5 dinas. Se supone que antes del choque el resorte tiene su longitud natural, y que la bala queda incrustada en el bloque.
Se pide:
a) energía potencial máxima almacenada en el resorte después del choque.
b) velocidad del bloque justamente después del choque con la bala
c) velocidad inicial de la bala.

Solución:

a) Del enunciado se obtiene directamente la constante del resorte, que es $K = F/x = 10^5$ dinas cm^{-1}. Entonces tenemos:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = 5 \times 10^6 \text{erg}$$

b) Por conservación de la energía, la energía cinética después del choque será igual a la energía potencial después de la compresión, luego:

$$\frac{1}{2}(M + m)v^2 = E_p$$

y, por tanto, $v = 10^2$ cm s^{-1}.

c) En el choque se conserva la cantidad de movimiento, luego $mv = (M+m)V$, despejando v se obtiene $v = 10^4$ cm s^{-1}.

Problema 3.- Se tiene una masa m unida a un resorte de constante k y con un amortiguamiento debido a una fuerza disipativa proporcional a la velocidad de la masa, con la constante de proporcionalidad igual a $k/2$.
a) Si la amplitud inicial es A ?'cuánto tiempo transcurre hasta que la amplitud vale $A/2$?
b) ?'Cuánto tiempo transcurre hasta que se ha disipado la mitad de la energía total inicial?

Solución:

a) Como $b = \frac{k}{2}$, la amortiguación de la amplitud se verifica a un ritmo $Ae^{-kt/4m}$, luego para que la amplitud se reduzca a la mitad, tendremos:

$$\frac{1}{2} = e^{-kt/4m}$$

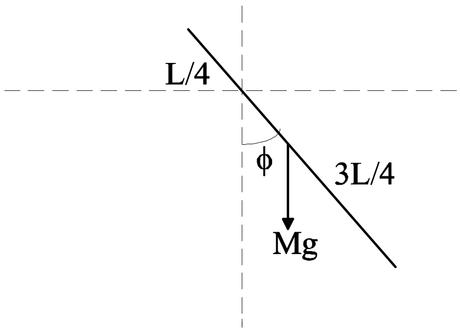
o bién $t = \frac{4m}{k} ln2$.

b) La amortiguación de la energía se verifica a un ritmo $Ae^{-kt/2m}$, luego para que la energía se reduzca a la mitad, tendremos:

$$\frac{1}{2} = e^{-kt/2m}$$

o bién $t = \frac{2m}{k} ln2$.

Problema 4.- Considere una barra delgada con masa $M = 4$ kg y longitud $l = 1,2$ m, que oscila sin rozamiento en un plano vertical alrededor de un eje horizontal que pasa por un punto de la barra situado a $l/4$ de uno de los extremos de la misma.
Se pide:
a) Obtener una ecuación para la aceleración angular de la barra como función del ángulo de desplazamiento respecto de la vertical,
b) el periodo del movimiento para pequeñas oscilaciones respecto a la vertical.



Solución:

a) Al plantear la ecuación para la dinámica de la rotación de la barra hay que considerar que la única fuerza que produce momento respecto al eje de giro es el peso de la barra que está aplicado en el centro de masas de la misma. Por tanto, para una posición genérica de la barra en la que esta forma un ángulo ϕ con la vertical tenemos:

$$\tau = I_c \alpha = -Mg\frac{l}{4}\operatorname{sen}\phi$$

donde I_c es el momento de inercia de la barra respecto al eje de giro, y α la aceleración angular. I_c se calcula aplicando el teorema de Steiner y resulta

$$I_c = \frac{1}{12}Ml^2 + M\frac{l^2}{16} = \frac{7}{48}Ml^2$$

Por consiguiente, la ecuación para la aceleración angular es

$$\alpha = -\frac{12}{7}\frac{g}{l}\operatorname{sen}\phi$$

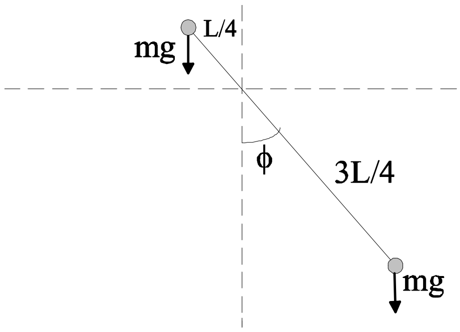
b) La ecuación anterior coincide con la de un péndulo. Haciendo la aproximación de pequeñas oscilaciones ($\operatorname{sen}\phi \simeq \phi$) e identificando el factor que multiplica a ϕ con el cuadrado de la frecuencia angular ω tenemos

$$\omega^2 = \frac{12}{7}\frac{g}{l}$$

con lo que

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{7l}{3g}} = 1,68\,\mathrm{s}$$

Problema 5.- Se tienen dos masas puntuales iguales m colocadas en los extremos de una varilla sin masa de longitud l. La varilla puede girar sin rozamiento en un plano vertical sobre un pivote colocado a una distancia $l/4$ de uno de sus extremos.
Se pide:
a) calcular el momento de inercia del sistema respecto al punto de suspensión,
b) la ecuación del movimiento,
c) el periodo de oscilación, para pequeñas oscilaciones,
d) el periodo de oscilación en el caso de que las masas, en lugar de ser puntuales, fueran pequeñas esferas de radio r.



Solución:

a) El momento de inercia del sistema será la suma de los momentos de inercia de cada una de las masas:

$$I = m\left(\frac{l}{4}\right)^2 + m\left(\frac{3l}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}ml^2$$

b) Para escribir la ecuación del movimiento basta considerar que el movimiento posible es una rotación entorno al eje y, por lo tanto, la ecuación a considerar es la de la dinámica de rotación, que establece que la suma de los momentos respecto al eje de las fuerzas exteriores es igual al producto del momento de inercia del sistema por la aceleración angular. Por lo tanto:

$$I\frac{d^2\phi}{dt^2} = -mg\ \operatorname{sen}\phi\ \frac{3l}{4}\ +\ mg\ \operatorname{sen}\phi\ \frac{l}{4}\ =\ -\frac{1}{2}mgl\operatorname{sen}\phi$$

que simplificando queda:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{4g}{5l}\operatorname{sen}\phi$$

c) Para pequeñas oscilaciones la ecuación queda:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{4g}{5l}\phi$$

que es la ecuación de un oscilador armónico de frecuencia angular $\omega = \sqrt{\frac{4g}{5l}}$ y, como $T = \frac{2\pi}{\omega}$, tenemos:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{5l}{4g}}$$

d) Si las masas en vez de ser puntuales fuesen esferas de radio r, el cálculo de los momentos de las fuerzas exteriores no cambiaría, pero sí el momento de inercia. Para calcular el momento de inercia de cada esfera tenemos que aplicar el teorema de Steiner:

$$I = \frac{2}{5}mr^2 + m\left(\frac{l}{4}\right)^2 + \frac{2}{5}mr^2 + m\left(\frac{3l}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}ml^2 + \frac{4}{5}mr^2$$

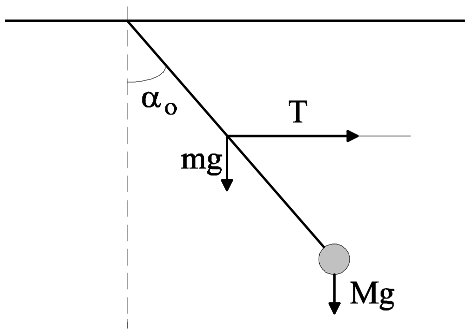
Rehaciendo todos los pasos anteriores con el nuevo momento de inercia llegamos al resultado:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{25l^2 + 32r^2}{20gl}}$$

Problema 6.- Se tiene una barra de masa m y longitud l que tiene en uno de sus extremos una masa puntual M. La barra está suspendida por el otro extremo de un techo horizontal por medio de un soporte que le permite girar sin rozamiento en un plano vertical. La barra forma un ángulo α_o con la vertical debido a la acción de una cuerda unida a la barra en su punto medio y que tira de ella horizontalmente.
Se pide:
a) calcular la tensión de la cuerda en la posición inicial,
b) escribir la ecuación del movimiento del sistema si se corta la cuerda,
c) calcular la frecuencia de oscilación en la aproximación de pequeñas oscilaciones.

Solución:

a) El único movimiento que puede realizar la barra es una rotación en torno al soporte del techo, luego la condición para que no haya movimiento es que la suma de los momentos respecto a ese eje de las fuerzas exteriores sea nulo. Las fuerzas exteriores a considerar son el peso de la barra mg que se considera aplicado en su centro de gravedad que es su punto medio, el peso de la masa puntual Mg situada en el extremo de la barra, y la tensión de la cuerda, de la cual nos dicen que actúa horizontalmente y en el punto medio de la barra. Por lo tanto, la ecuación de balance de momentos es:



$$T\frac{l}{2}\cos\alpha_o = Mgl\,\mathrm{sen}\,\alpha_o + mg\frac{l}{2}\,\mathrm{sen}\,\alpha_o$$

de donde

$$T = (m + 2M)g\tan\alpha_o$$

b) Si se corta la cuerda el momento debido a la tensión desaparece, y el momento resultante será igual al producto del momento de inercia respecto al eje de giro por la aceleración angular. El momento de inercia de la masa M respecto al eje será Ml^2, mientras que para calcular el correspondiente a la barra hay que aplicar el teorema de Steiner:

$$I = Ml^2 + \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \left(M + \frac{m}{3}\right)l^2$$

Por lo tanto, la ecuación final queda:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{M + \frac{m}{2}}{M + \frac{m}{3}}\frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\phi$$

c) Para pequeñas oscilaciones la ecuación se convierte en:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{M + \frac{m}{2}}{M + \frac{m}{3}}\frac{g}{l}\phi$$

Como $f = \omega/(2\pi)$, la expresión final para f es:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{M + \frac{m}{2}}{M + \frac{m}{3}}}\sqrt{\frac{g}{l}}$$