Departamento de Automática

Universidad de Alcalá

Ingeniería de Control I
Tema 9
Análisis en frecuencia: lugar de las raíces

9. Análisis en frecuencia: lugar de las raíces

- Introducción:
  - Criterios de argumento y magnitud
- Reglas de construcción
- Ejemplo

Bibliografía

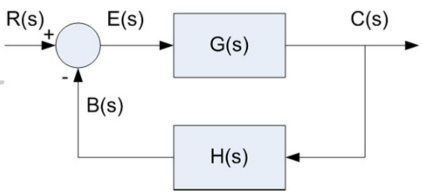
- Señales y Sistemas. OCW-UC3M.
- Apuntes Automática Básica. J. M. Bañón, UAH.
- Ingeniería de Control Moderna. K. Ogata.
- Automática. OCW-UPV.
- Sistemas realimentados de control. J.J. D'azzo.
- Feedback Control Systems. J.V. de Vegte.
- Stability and Control of Aircraft Systems. R. Langton.

Objetivos

- Significado del lugar de las raíces
- Procedimiento de obtención

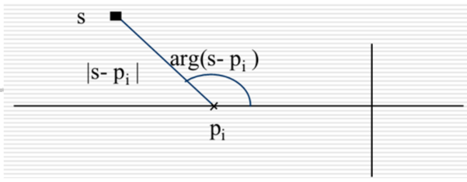
Introducción

- Se ha visto cómo la estabilidad y el comportamiento en rp y en rt están directamente relacionados con la posición de los polos de la FT en lazo cerrado del sistema (M(s)).
- La localización de estos polos en lazo cerrado está muy relacionada con la FT en lazo abierto G(s)H(s).
- El lugar de las raíces nos determina gráficamente la posición en el plano s de los polos de M(s) para todos los valores posibles de un determinado parámetro.



- $M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$
- Si consideramos una forma normalizada de GH:
- $G(s)H(s) = k\frac{\prod(s-z_i)}{\prod(s-p_j)}$
- El factor *k* se denomina sensibilidad estática del bucle o ganancia en lazo abierto (proporcional a la ganancia estática) (T7.12)
- Por tanto los polos de M(s) serán las raíces de la ecuación característica:
  - $1 + G(s)H(s) = 1 + k\frac{\prod_m(s-z_i)}{\prod_n(s-p_j)} = 0$

- Por tanto: $k\frac{\prod(s-z_i)}{\prod(s-p_j)} = -1$

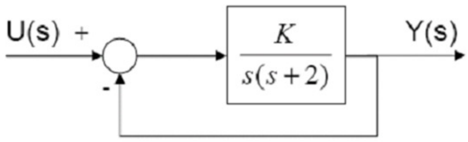


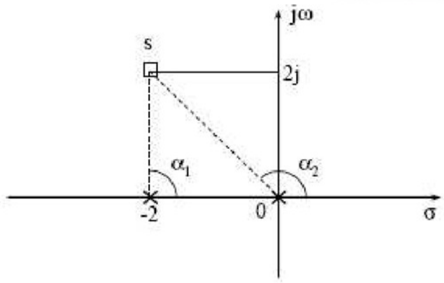
- Entonces los lugares del plano s que cumplen dicha condición se pueden obtener a partir de dos condiciones:
  - Condición angular o criterio del argumento:
    - $\sum \arg(s-z_i) - \sum \arg(s-p_j) = (2q+1)\pi$
    - También sirve al revés.
    - La diferencia de los arg. es un número impar de veces π
    - Determina si un punto s pertenece o no al LR
  - Condición modular o criterio del módulo:
    - $k\frac{\prod(s-z_i)}{\prod(s-p_j)} = -1 \Longrightarrow |k|\frac{\prod|s-z_i|}{\prod|s-p_i|} = 1$
    - Esta condición determina el valor de k para un punto del LR

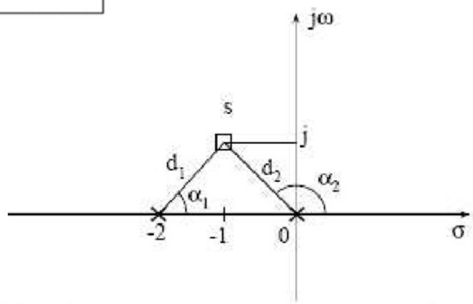
- Por tanto, LR es el lugar geométrico de los polos de un sistema en lazo cerrado cuando el valor de la ganancia en lazo abierto (k) varía desde 0 a +∞, es decir para una situación canónica de realimentación negativa
- Si se considera la variación de 0 a -∞, el recorrido de los polos de lazo cerrado, se llama lugar inverso de las raíces (realimentación positiva).
- Si se considera otro parámetro distinto de k el que varía de 0 a ∞ (o de 0 a -∞), el recorrido de los polos se llama contorno de las raíces o lugar de las raíces generalizado (o generalizado inverso).

Ej: criterio del argumento (gráfico)

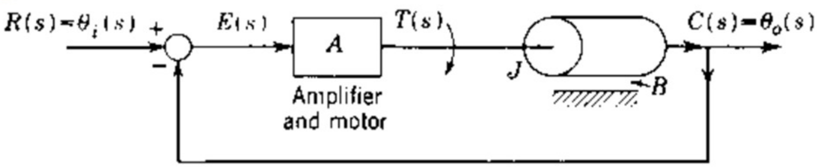
- Con el criterio del módulo se determinaría el valor de k
- Reparar: $(s - r_i)$ es un vector que va de r_i a s





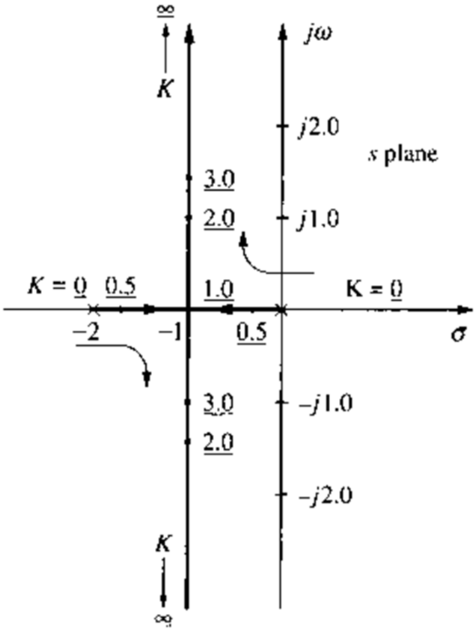


LR: ejemplo



- $G(s) = \frac{\theta_0(s)}{E(s)} = \frac{A/J}{s(s+B/J)} = \frac{K}{s(s+a)}$. Dato a=2;
- $M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s+2)+K} = \frac{K}{s^2+2s+K} = \frac{\omega_n{}^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n{}^2}$
- $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1} = -1 \pm \sqrt{1-K}$
- A medida que K varía, raíces cambian

- $s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-K}$

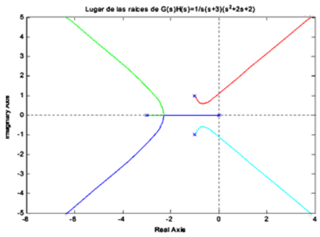


Ej: Applets

- http://www.facstaff.bucknell.edu/mastascu/econtrolhtml/Problems/RLocus/Interactive/RLocusCalculators.htm
- http://users.ece.gatech.edu/bonnie/book/OnlineDemos/InteractiveRootLocus/applet.html

Reglas del trazado del LR: 1 Número de ramas

- El número de ramas es el número de polos de M(s), (FT en lazo cerrado) que coincide con el número de polos de G(s)H(s) (FT en lazo abierto), suponiendo sistemas causales que hace que el número de ceros de GH sea menor que el número de polos, si no max(#p,#z).
- Cada polo evoluciona en una trayectoria o rama al variar k de 0 a +∞.

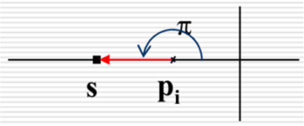


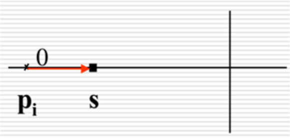
R2: Puntos de comienzo y final

- A partir de la expresión $1 + k\frac{\prod(s-z_i)}{\prod(s-p_j)} = 0 \Rightarrow$
- k=0, quedan solo los polos para ser raíces de M(s)
  - $\Rightarrow \prod(s-p_j) + k\prod(s-z_i) = 0$
- k =∞, quedan solo los ceros para ser raíces de M(s)
  - $\Rightarrow \frac{1}{k}\prod(s-p_j) + \prod(s-z_i) = 0$
- Es decir las trayectorias comienzan en polos y finalizan en ceros
- Si hay más polos que ceros, la diferencia son trayectorias que acaban en el ∞

R3: Puntos del eje real

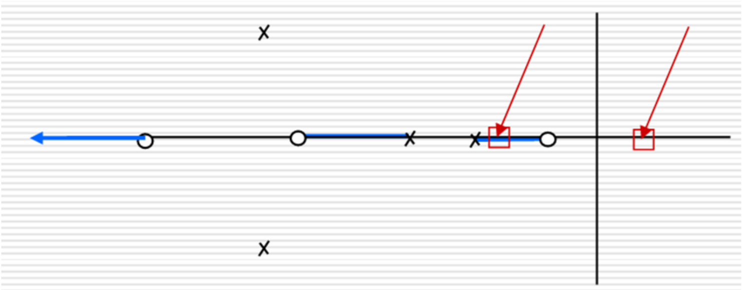
- Aplicando criterio del argumento a los puntos del eje real: $\sum \arg(s - z_i) - \sum \arg(s - p_j) = (2q + 1)\pi$
  - Dado un punto s, la aportación de argumento de cada raíz (polo o cero) real a su derecha es π
  - Dado un punto s, la aportación de argumento de cada raíz real a su izquierda es 0
  - La aportación de raíces complejas conjugadas es α-α = 0





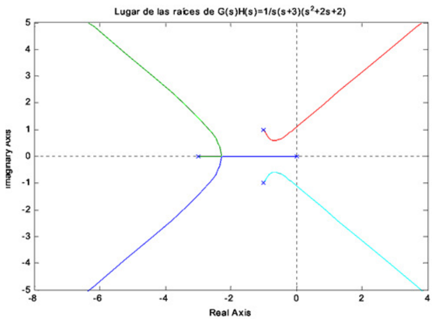
R3

- Por tanto un punto del eje real pertenece al LR si tiene un número impar de raíces reales (polos o ceros) a la derecha.



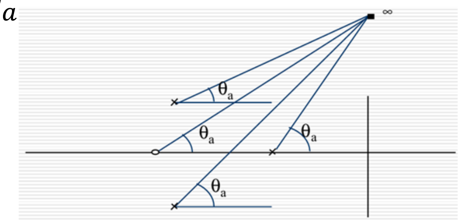
R4: Simetría respecto eje real

- El LR es simétrico respecto del eje real
- Las raíces son siempre reales o en pares de complejos conjugados (en sistemas con coeficientes reales)



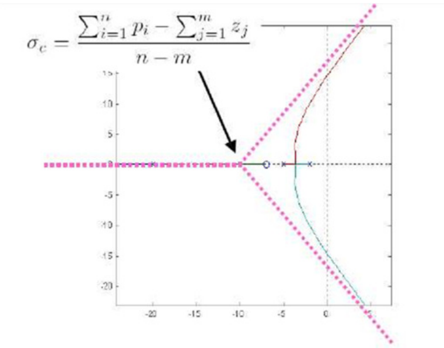
R5: Asíntotas

- La diferencia de nº de polos a nº de ceros de G(s)H(s) (n-m) son el nº de ramas que tienden al ∞ al crecer k.
- El crecimiento se hace asintóticamente a una recta cuyo ángulo con la parte + del eje real debe cumplir la condición del argumento ($s \rightarrow \infty$):
  - $\sum_n \arg(s - p_j) - \sum_m \arg(s - z_i) = (2a + 1)\pi =$
    $= (n - m)\theta_a$
  - $\theta_a = \frac{(2a+1)}{n-m}\pi$
  - $a = 0, \ldots, n - m - 1$



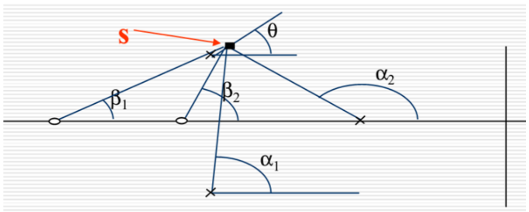
R6: Centroide

- El punto del eje real donde se unen las n-m asíntotas se llama centroide
- Se calcula: (7.-8D'azzo 5ªed.)
  - $\sigma_0 = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m}$



R7: Ángulos de salida y llegada de las ramas

- Se trata de buscar con qué ángulo sale de **cada** polo y llega a **cada** 0 la trayectoria del LR.
- Para ello se supone un punto auxiliar s_0 infinitamente próximo al polo (o cero) y se aplica el criterio del argumento:
  - $\sum \arg(s_0 - p_j) - \sum \arg(s_0 - z_i) = \sum_{j \neq 0} \alpha_j + \theta - \sum \beta_i = (2q+1)\pi$
  - $\theta = (2q+1)\pi - \sum \alpha_j + \sum \beta_i$



R7

- Por ejemplo, para calcular el ángulo de arranque desde p_0:

$$\sum \arg(s_0 - p_j) - \sum \arg(s_0 - z_i) =$$

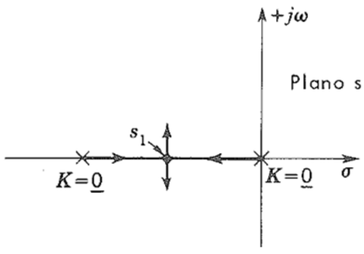
$$= \sum_{j\neq 0} \arg(s_0 - p_j) + \arg(s_0 - p_0) - \sum \arg(s_0 - z_i) \approx$$

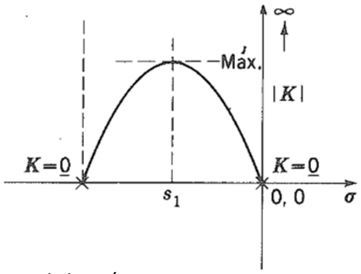
$$\approx \sum_{j\neq 0} \arg(p_0 - p_j) + \theta - \sum \arg(p_0 - z_i) =$$

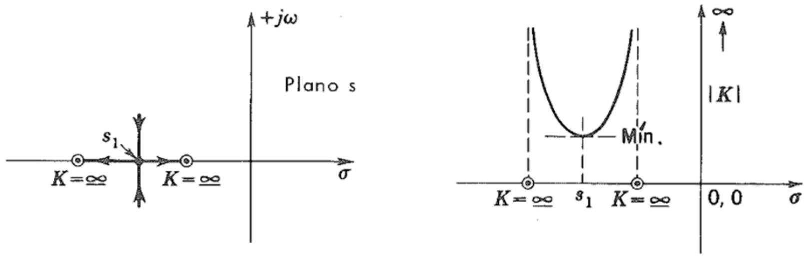
$$= \sum \alpha_j + \theta - \sum \beta_i = (2q+1)\pi$$

R8: Puntos de dispersión y confluencia

- Coinciden con máximos (dispersión) y mínimos (confluencia) locales de k sobre el eje real:
  - $\frac{dk}{ds} = 0$
- Además, por pertenecer al LR, las soluciones deben cumplir los criterios de argumento y módulo.







- En estos puntos siempre salen tantas ramas como entran.

R9: Intersección con el eje imaginario

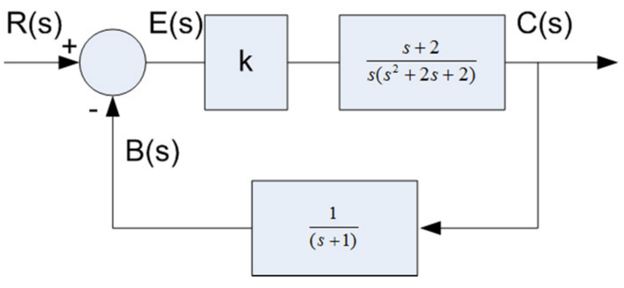
- A partir de la ecuación característica (de FT en lazo cerrado) se aplica el método de Routh
  - Cuando los polos de un sistema de segundo orden cortan al eje imaginario, el sistema es marginalmente estable
  - Aplicando Routh en función de k, el sistema es marginalmente estable para el valor de k que nos da una fila de ceros en la tabla
  - La situación de los polos correspondientes a ese valor de k se calculará con la ecuación auxiliar de la tabla.

R10: valor de k en un punto del LR

- Aplicando el criterio del módulo
  - $k = \frac{\prod |s-p_i|}{\prod |s-z_i|}$
- R11: Suma de las raíces
  - Si la ecuación característica es
    - $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + a_1 s + a_0 = 0$
    - $\sum raíces = -\, a_{n-1}$

Ej:

- LR del siguiente sistema:



- $M(s) = \frac{k(s+1)(s+2)}{s(s+1)(s^2+2s+2)+k(s+2)}$
- $GH(s) = \frac{k(s+2)}{s(s+1)(s^2+2s+2)}$
- R1,2: nº ramas, comienzo y final
  - Origen en polos, fin en un 0, 3 asíntotas
- R3: LR sobre eje real
  - Intervalos $(-\infty, 2] \cup [-1{,}0]$
- R4: Simetría respecto eje real

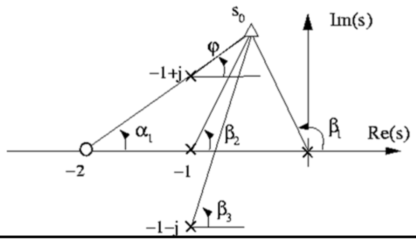
- R5: Asíntotas
  - Diferencia polos ceros=3
  - $\theta_a = \frac{(2a+1)}{n-m}\pi \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{3};\ \theta_1 = \pi;\ \theta_2 = \frac{5\pi}{3}$
- R6: Centroide
  - $\sigma_0 = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m} = \frac{(0+(-1)+(-1+j)+(-1-j))-(-2)}{3} = \frac{-1}{3}$

R7: Ángulos de salida y llegada

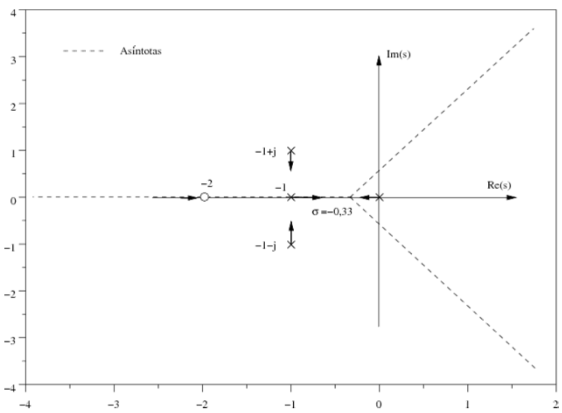
- Salida polo s=0, considerando su posición([-1,0]∈ LR), $\theta_0 = \pi$
- Salida polo s=-1, por la misma razón $\theta_1 = 0$
- Llegada cero en s=-2, por la misma razón $\theta_2 = \pi$
- Salida polo s=-1+j, calculamos

$$(2q+1)\pi = \arg(s_0+2) - \sum_{j=1}^{4} \arg(s_0+p_j) =$$

$$= \alpha_1 - (\beta_1+\beta_2+\beta_3+\theta_3) \approx \frac{\pi}{4} - (\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \theta_3)$$



- Por tanto $\theta_3 = -\frac{\pi}{2}$
- Salida, polo s=-1-j, por simetría $\theta_4 = \frac{\pi}{2}$



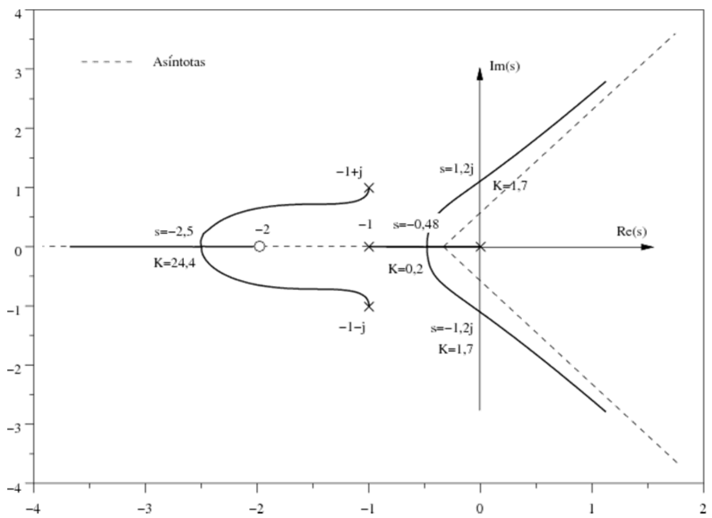
Lugar de las raíces

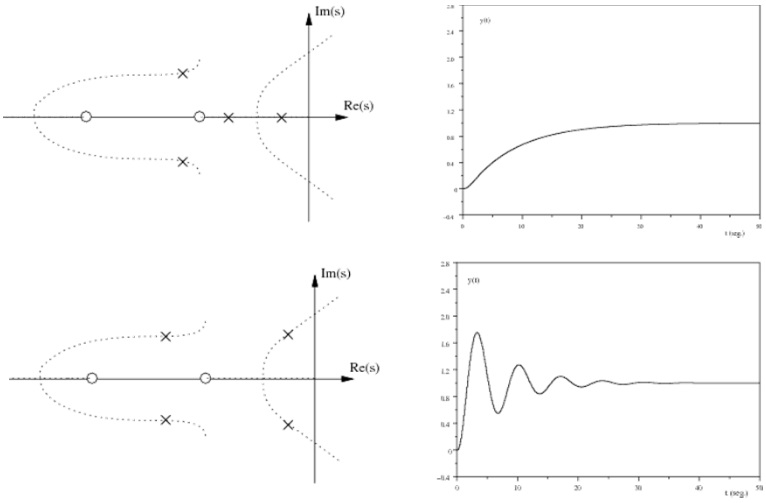
- R8: Puntos de dispersión y confluencia
  - Por observación:
    - polos de 0 y -1 confluirán y se dispersarán hacia asíntotas
    - polos de complejos confluirán y uno hacia asíntota y el otro hacia el cero.
  - $\frac{d}{ds}\left(\frac{s+2}{s(s+1)(s^2+2s+2)}\right) = 0 \Rightarrow 3s^4 + 14s^3 + 22s^2 + 16s + 4 = 0$
  - Solución $s = -2.5, s = -0.48, s = -0.84 \pm 0.63j$
  - Comprobar si pertenecen al LR: los dos primeros están en el intervalo real, entonces pertenecen (solo habrá dos puntos, 4 ramas)

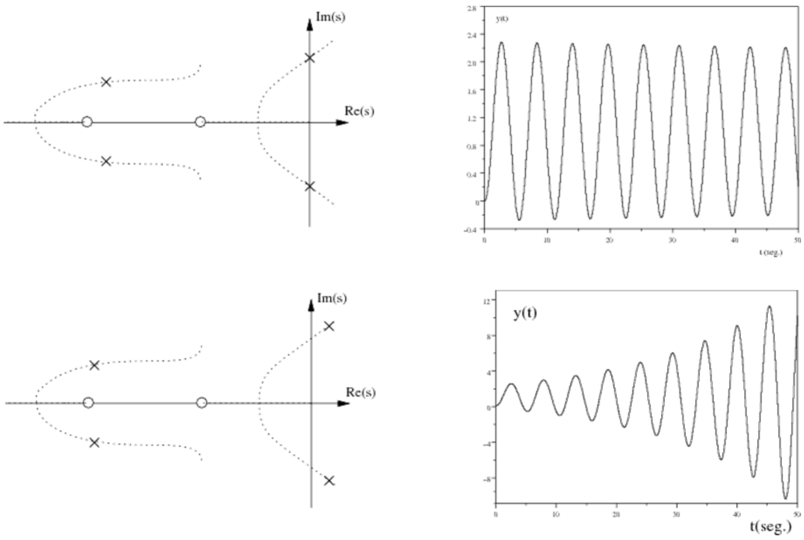
- Calcular el k para el que se da cada punto de dispersión (sustituyendo en G(s)H(s)):
  - s=-0.48, k=0.2
  - s=-2.5, k=24.4
- R9: Intersección eje imaginario:
  - Ec. característica: $s^4 + 3s^3 + 4s^2 + (2 + k)s + 2k = 0$
  - Aplicando Routh-Hurwitz

s^4	1	4	$2K$
s^3	3	$2+K$	0
s^2	$\frac{10-K}{3}$	$2K$	0
s^1	$\frac{20-10K-K^2}{10-K}$	0	
s^0	$2K$	0	

- Estabilidad en el rango 0<k<1.7 (obtenido a partir de la fila s^1, más restrictiva)
- Con dicho valor límite se sustituye en fila de arriba:
  - $\frac{10-k}{3}s^2 + 2k = 0 \Rightarrow s = \pm 1.1j$
- Caso k>0, (el límite para la fila s_0) valor límite se sustituye en la fila de arriba:
  - $\frac{20-10k-k^2}{10-k}s = 0 \Rightarrow s = 0$
- Por tanto 3 puntos de corte con el eje imaginario, uno de arranque de una rama (k=0) y dos críticamente estables para k=1.7




Im(s)
Re(s)
y(t)
t (seg.)
Im(s)
Re(s)
y(t)
t (seg.)


Im(s)
Re(s)
y(t)
t (seg.)
Im(s)
Re(s)
y(t)
t(seg.)