Departamento de Automática

Universidad de Alcalá

Ingeniería de Control I
Tema 8
Análisis temporal de sistemas de 1er y 2º orden

8. Análisis temporal de sistemas de primer y segundo orden.

- Respuesta transitoria en sistemas de 1er orden
- Respuesta a escalón y rampa
- Respuesta en sistemas de 2º orden
- Sistemas subamortiguados
- Sistemas de orden n
- Estabilidad

Bibliografía

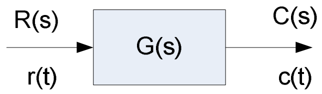
- Señales y Sistemas. OCW-UC3M
- Apuntes Automática Básica. J. M. Bañón, UAH.
- Ingeniería de Control Moderna. K. Ogata.
- Automática. OCW-UPV
- Sistemas realimentados de control. J.J. D'azzo
- Feedback control systems. J.V. de Vegte.

Objetivos

- Identificar el tipo de respuesta transitoria de un sistema a partir de los valores de los coeficientes o polos de su ecuación característica.

Sistemas de primer orden

- ED con una sola derivada:
  - $T\frac{dc(t)}{dt} + c(t) = Kr(t)$



- Aplicando TL
  - $TsC(s) + C(s) = KR(s)$
  - $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{1+Ts}$
- K es la ganancia del sistema en lazo cerrado y T la cte. de tiempo
- Polo en $s = -\frac{1}{T}$

Respuesta ante escalón

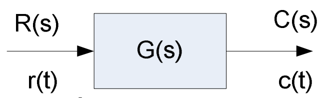
- $C(s) = \frac{K}{1+Ts}\frac{R_0}{s} = \frac{KR_0/_T}{s(s+^1/_T)}$
- $c(t) = L^{-1}\left[\frac{KR_0/_T}{s(s+^1/_T)}\right] = L^{-1}\left[\frac{a}{s} + \frac{b}{s+1/T}\right]$
- Calculando residuos, $a = R_0K, b = -R_0K.$
- $c(t) = R_0K\,u(t) - R_0Ke^{-\frac{t}{T}}\,u(t) = R_0K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)u(t)$
- T es el t que tarda la señal en alcanzar el 63% del valor final (tema 1.18)

Respuesta ante otras funciones

- Por tratarse de sistemas LTI si se introduce la derivada o la integral de una señal de la que conocemos la salida, la nueva salida será la derivada o la integral de la anterior.
- Ej: $r_1(t) = R_1 t u(t) = \int_0^t R_1 u(\tau) d\tau$
  - $c_1(t) = \int_0^t c(\tau) d\tau = \int_0^t R_1 K \left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}}\right) d\tau = R_1 K \mathrm{t} + R_1 K T e^{-\frac{t}{T}} - R_1 K T$

Sistema de 2º orden

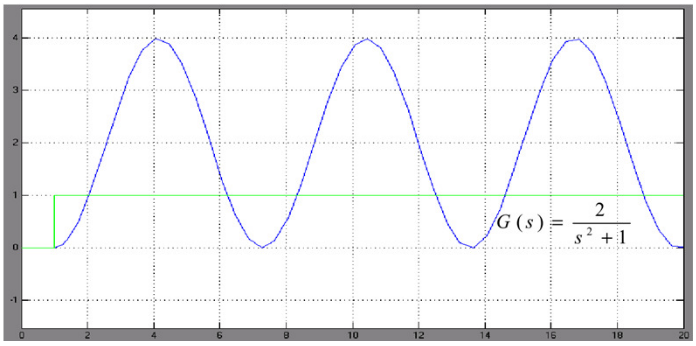
- Tiene una FT en lazo cerrado con dos polos, la ecuación característica es de grado 2.
  - $G(s) = \frac{k_1 {\omega_n}^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + {\omega_n}^2}$



  - K_1 ganancia del sistema en lazo cerrado
  - $\omega_n$es la pulsación natural no amortiguada del sistema (rad/sg)
  - ξ es el coeficiente de amortiguamiento
  - $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ es la puls. natural amortiguada
- La respuesta depende de la situación de los polos:
  - $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$
- 4 casos dependiendo de ξ (xi)

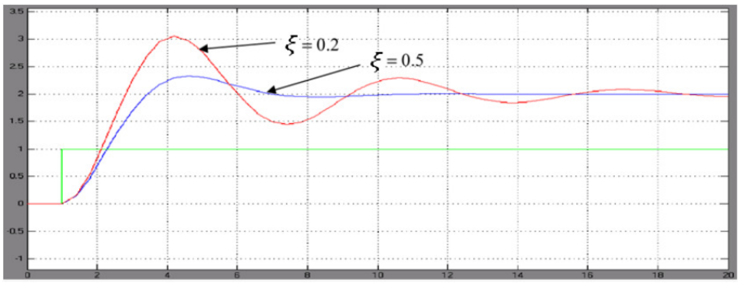
Respuesta ante escalón

- $\xi = 0; s_{1,2} = \pm j\omega_n$
- Polos en eje imaginario, sistema **oscilante**
- $C(s) = \frac{K_1 {\omega_n}^2}{s^2 + {\omega_n}^2} \frac{1}{s} \Rightarrow c(t) = K_1(1 - cos\omega_n t)$



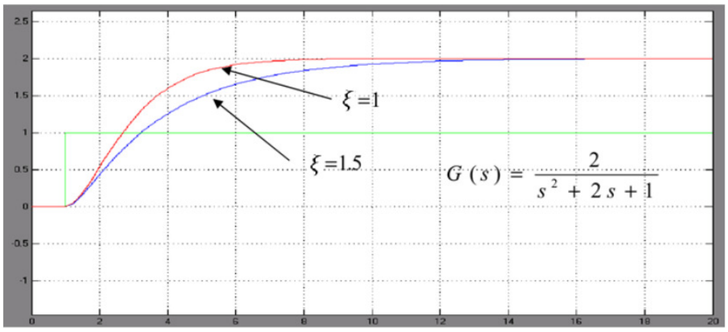
Respuesta ante escalón (2)

- $0 < \xi < 1; s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$
- Polos complejos conjugados con parte real negativa y el sistema es **subamortiguado** $C(s) = \frac{k_1 {\omega_n}^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + {\omega_n}^2} \frac{1}{s}$
  - $c(t) = K_1\left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} sen\left[\left(\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}\right)t + tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right]\right]$



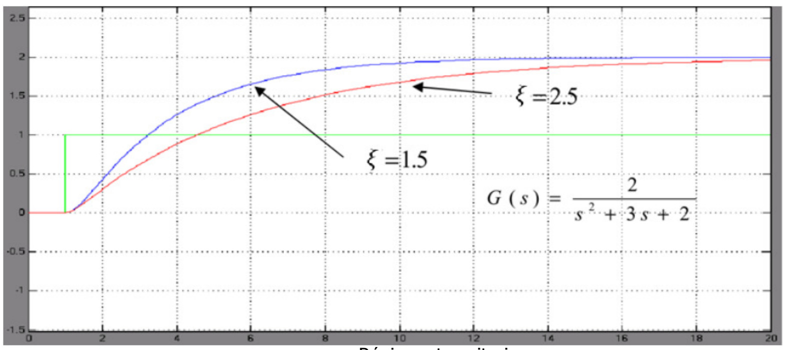
Respuesta ante escalón (3)

- $\xi = 1, s_{1,2} = -\omega_n$
- Polo doble situado en el semieje real negativo, sistema **críticamente amortiguado**
- $C(s) = \frac{k_1 {\omega_n}^2}{(s+\omega_n)^2} \frac{1}{s} \Rightarrow c(t) = K_1[1 - e^{-\omega_n t}(\omega_n t + 1)]$



Respuesta ante escalón (4)

- $\xi > 1, s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$
- Polos reales y negativos, sistema **sobreamortiguado**
- $C(s) = (s) = \frac{k_1 {\omega_n}^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + {\omega_n}^2} \frac{1}{s} \Rightarrow c(t) = K_1\left[1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}\left(\frac{e^{s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{s_2 t}}{s_2}\right)\right]$



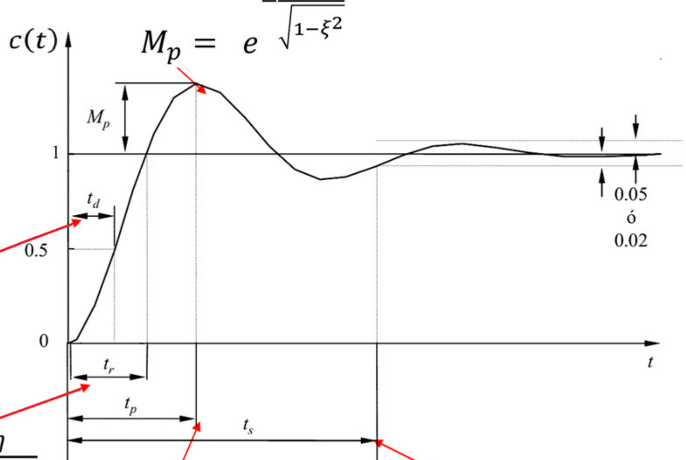
Respuesta a escalón (5)

- $\xi < 0, s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$
- Polos reales y positivos, sistema inestable que tiende a saturarse o destruirse.

Parámetros de respuesta subamortiguada

(gráfico con escalón unitario y k_1=1)

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$



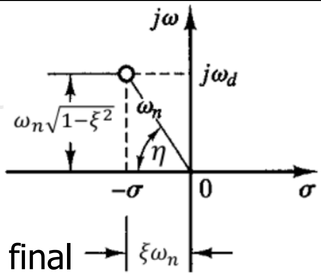
$$t_d = \frac{1+0.7\xi}{\omega_n}$$

$$t_r = \frac{\pi-\eta}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$t_s = \frac{\pi}{\xi\omega_n}$$

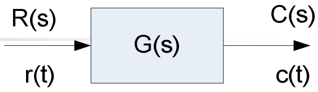
Sistema subamortiguado



- Parámetros de la respuesta:
  - Tiempo de retardo, t_d, el que tarda la salida en alcanzar el 50% del valor final
    - $t_d = \frac{1+0.7\xi}{\omega_n}$
  - Tiempo de crecimiento, t_r , es el que tarda la salida en alcanzar por primera vez el valor final (10-90%, 5-95%)
    - $t_r = \frac{\pi-\eta}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}, con\ \eta = tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$
  - Tiempo de pico, t_p, el que tarda en alcanzar el primer máximo
    - $t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$

- Tiempo de establecimiento, t_s, el requerido para alcanzar y mantenerse en un rango alrededor del valor final (5% o 2%)
  - $t_s = \frac{\pi}{\xi\omega_n}$ $\left[\frac{3}{\xi\omega_n}\ o\ \frac{4}{\xi\omega_n}\right]$
- Máximo sobreimpulso, M_p, cuanto sobrepasa la respuesta transitoria el valor final relativo al valor final en su primer pico (tb. se puede dar en porcentaje)
  - $M_p = \frac{c(t_p)-c(\infty)}{c(\infty)} = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

Sistema de orden n



- FT en lazo cerrado
  - $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(b_0+b_1 s+b_2 s^2+\cdots+b_m s^m)}{(a_0+a_1 s+a_2 s^2+\cdots+a_n s^n)} = k\frac{\prod_{j=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}$
- Si introducimos un escalón y calculamos los residuos y la TIL:
  - $C(s) = \frac{A}{s} + \frac{B_1}{s+p_1} + \frac{B_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{B_n}{s+p_n}$
  - $c(t) = \mathrm{A} + B_1 e^{-p_1 t} + B_2 e^{-p_2 t} + \cdots + B_n e^{-p_n t}$
- Cálculos complicados, se intenta reducir a 2º orden:
  - Cancelando residuos pequeños
  - Cancelando ceros y polos cercanos
  - Cancelando ceros y polos alejados del dominante

Cálculo de residuos de polos reales múltiples

- $F(s) = \frac{Q(s)}{P(S)} = \frac{Q(s)}{(s+s_1)^r (s+s_2)} = \frac{A_{1r}}{(s+s_1)^r} + \frac{A_{1(r-1)}}{(s+s_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{A_{11}}{(s+s_1)} + \frac{A_2}{(s+s_2)}$
- A_2 y A_{1r} se pueden calcular por la fórmula genérica
  - $(s+s_1)^r F(s) = A_{1r} + A_{1(r-1)}(s+s_1) + A_{1(r-2)}(s+s_1)^2 + \cdots + A_{11}(s+s_1)^{r-1} + \frac{A_2 (s+s_1)^r}{(s+s_2)}$
- Pero $A_{1(r-1)}$ (y sucesivos coeficientes) derivando dicha expresión una (y sucesivas veces) con respecto a s antes de sustituir por $s = -s_1$
  - $A_{1(r-1)} = \frac{d}{ds}\left[(s+s_1)^r \frac{Q(s)}{P(s)}\right]_{s=-s_1}$
  - $A_{11} = \frac{d^{r-1}}{ds}\left[(s+s_1)^r \frac{Q(s)}{P(s)}\right]_{s=-s_1}$

Cálculo de residuos de polos complejos

- $F(s) = \frac{Q(s)}{P(S)} = \frac{Q(s)}{(s^2+2\xi\omega_n+\omega_n{}^2)(s+s_3)} = \frac{A_1}{(s+s_1)} + \frac{A_2}{(s+s_1{}^*)} + \frac{A_3}{(s+s_3)}$
- Con funciones reales polos complejos aparecen en pares conjugados y por tanto sus residuos también son complejos conjugados.
- Se calculan por residuos o bien restando (ej.T7.10):
  - $\frac{As+B}{(s^2+2\xi\omega_n+\omega_n{}^2)} = \frac{Q(s)}{P(s)} - \frac{A_3}{(s+s_3)} = \frac{Q(s)}{P(s)} - \frac{A_3(s^2+2\xi\omega_n+\omega_n{}^2)}{(s+s_3)(s^2+2\xi\omega_n+\omega_n{}^2)}$
- Si son complejos múltiples, igual norma que con reales múltiples.

Estabilidad

- Salida de un sistema ante entrada impulso:
  - Estable: salida tiende a 0
  - Marginalmente estable: salida oscilante
  - Inestable: salida tiende a infinito
- Parte real de los polos (raíces de ec. característica)
  - Todas negativas (pol. de Hurtwitz): estable
  - Alguna cero: marginalmente estable
  - Alguna positiva: inestable
- Para no tener que calcular las raíces: Routh

Criterio de estabilidad de Routh

- Partiendo de la ec. característica de la FT en lazo cerrado:
  - $P(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0$
  - Condición necesaria: todos a_i mismo signo y todos !=0
  - Condición suficiente: tabla de Routh

$$
\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
s^2 & u_1 & u_2 & 0 & \cdots & \\
s^1 & v_1 & 0 & 0 & \cdots & \\
s^0 & w_1 & 0 & 0 & \cdots &
\end{array}
$$

$$
b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}
\qquad
b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}
\qquad
b_3 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{a_{n-1}}
$$

$$
c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}
\qquad
c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}
$$

- Condición suficiente: si todos los coeficientes de la primera columna son del mismo signo el sistema es estable.
- Ej: dos cambios de signo, dos raíces en plano positivo

$$M(s)=\frac{1}{s^5+s^4+10s^3+72s^2+152s+240}$$

s^5	1	10	152
s^4	1	72	240
s^3	-62	-88	0
s^2	70.6	240	
s^1	122.6		
s^0	240		

$$b_1=-\frac{72-10}{1}=-62,\quad b_2=-\frac{240-152}{1}=-88$$

$$c_1=-\frac{-88+62\cdot 72}{-62}=70{,}6,\quad c_2=-\frac{0+62\cdot 240}{-62}=240$$

$$d_1=-\frac{-62\cdot 240+70{,}6\cdot 88}{70{,}6}=122{,}8$$

$$e_1=-\frac{0-122{,}6\cdot 240}{122{,}6}=240$$

23

Casos especiales

- En la primera columna aparece un 0, se para cálculo por indeterminación. Se sustituye por un $\epsilon \to 0$ y se continúan los cálculos.
- Toda una fila se hace 0: fila superior derivarla (respecto de s) y sustituir en la fila que se hace todo 0s

$$M(s)=\frac{1}{s^4+2s^3+4s^2+8s+5}$$

s^4	1	4	5
s^3	2	8	0
s^2	$0\to\varepsilon$	5	0
s^1	$\dfrac{8\varepsilon-10}{\varepsilon}$	0	0
s^0	5		

$$\frac{8\varepsilon-10}{\varepsilon}<0$$

Sistema inestable

$$M(s)=\frac{1}{s^4+2s^3+11s^2+18s+18}$$

s^4	1	11	18
s^3	2	18	0
s^2	2	18	0
s^1	$0\to 4$	0	0
s^0	18		

$$A(s)=2s^2+18 \;\to\; \frac{dA(s)}{ds}=4s+0$$

$$2s^2+18=0 \;\to\; s=\pm 3j$$

Estabilidad en función de parámetros

$$M(s) = \frac{k}{s^3 + 8s^2 + 17s + 10 + k}$$

s^3	1	17
s^2	8	$10 + K$
s^1	$\frac{63}{4} - 1/8\,K$	0
s^0	$10 + K$	0

$$\left.\begin{array}{l} \frac{63}{4} - \frac{k}{8} > 0 \\ 10 + k > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -10 < k < 126$$