Tema 5. Dinámica del sólido rígido.

Problemas resueltos.

Problema 1.- Una esfera de masa m y radio R sube rodando por un plano inclinado 30^o. Cuando está al pie del mismo el centro de masas de la esfera tiene una velocidad de $4,9$ m/s.

a) ¿Hasta qué altura sube la esfera en el plano?

b) ¿Cuánto tiempo tarda en regresar al pie del plano?

Solución:

a) En el sistema se conserva la energía total. Por lo tanto, tomando como origen de energía potencial el plano inferior, tenemos:

$$\frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = mgh$$

$$\frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mR^2\right)\frac{V^2}{R^2} = mgh$$

Por lo tanto $h = \frac{7V^2}{10g} = 1,72$ m

b) El movimiento de subida es uniformemente acelerado y sabemos su velocidad inicial y final, luego podemos escribir, para la velocidad y el espacio recorrido:

$$V_f = 0 = V_0 - at_s \Longrightarrow a = \frac{V_0}{t_s}$$

$$S = \frac{h}{\operatorname{sen}\alpha} = V_0 t_s - \frac{1}{2}at_s^2 = \frac{1}{2}V_0 t_s \Longrightarrow t_s = \frac{2h}{V_0 \operatorname{sen}\alpha} = 1,4 \text{ s}$$

de forma que el tiempo que tarda en regresar al punto inicial será $t = 2t_s = 2,8$ s.

Problema 2.- El momento cinético de un volante macizo, cuyo momento de inercia es $0,125$ kg · m^2, disminuye desde 3 hasta 2 kg · m^2/s en un periodo de $1,5$ s.

a) ¿Cuál es el torque promedio que actúa sobre el volante durante este tiempo?

b) Suponiendo una aceleración angular uniforme, ¿cuántas revoluciones habrá girado el volante?

c) ¿Cuánto trabajo se habrá efectuado?

Solución:

a) Como el torque (o momento de las fuerzas exteriores) es igual a la variación del momento angular (o cinético),

$$M = \frac{L_1 - L_2}{t} = \frac{2}{3}Kgm^2s^{-2}$$

b) Como el torque es constante, la aceleración angular es constante, el movimiento es circular uniformemente acelerado. Por tanto, si conocemos la aceleración angular y la velocidad angular inicial, podríamos calcular el ángulo girado por el volante

La aceleración angular se calcula a partir de $M = I\alpha$, donde M es el torque total o momento total de las fuerzas exteriores. Directamente se obtiene $\alpha = M/I = \frac{16}{3}$ s^{-2}.

Por otra parte, $L_0 = I\omega_0$, donde L_0 y ω_0 son, respectivamente, el momento angular y la velocidad angular iniciales. Por lo tanto, $\omega_0 = \frac{L_0}{I} = 24\ \mathrm{s}^{-1}$.

Usando las fórmulas del movimiento circular uniformemente acelerado, obtenemos: $\theta = \omega_0 t - \frac{1}{2}\alpha t^2 = 30$ radianes, y, por tanto, el número de revoluciones será $30/(2\pi)$.

c) El trabajo efectuado será igual a la variación de la energía cinética del sistema.

$$W = E_{c1} - E_{c2} = \frac{1}{2}I\omega_0^2 - \frac{1}{2}I\omega_f^2$$

Necesitamos saber el valor de la velocidad angular final ω_f, que se puede calcular de la misma manera que hemos calculado la inicial anteriormente (¿puede pensar el estudiante otra forma de calcular ω_f?), con lo que $\omega_f = L_f/I = 16\ \mathrm{s}^{-1}$.

Por lo tanto, $W = 20$ julios.

Problema 3.- Una partícula de masa m, fijada al extremo de una cuerda, se mueve sin rozamiento en un círculo de radio R sobre una mesa horizontal. Hacemos pasar el otro extremo de la cuerda por un agujero en la mesa hecho en el centro del círculo anterior.

a) Si tiramos de la cuerda de forma que se reduzca el radio de la órbita circular a un valor r, ¿cómo cambia la velocidad angular si es ω_0 cuando el radio es r_0?

b) ¿Cuál es el trabajo efectuado para reducir lentamente el radio de r_0 a $r_0/2$?

Solución:

a) Aquí no aplicamos ningún par externo, conservándose el momento angular. En este caso $L = mR^2\omega$ al ser el movimiento circular.

Si reducimos el radio de r_0 a r y la velocidad angular cambia de ω_0 a ω tendremos, por conservación del momento angular, $mr^2\omega = mr_0^2\omega_0$. En consecuencia:

$$\omega = \left[\frac{r_0}{r}\right]^2 \omega_0.$$

b) El trabajo realizado en acortar la cuerda es igual a la integral de la tensión en la cuerda sobre toda la variación de longitud.

$$W = \int_{r_0}^{r_0/2} \vec{T} \cdot \vec{r}.$$

La tensión en la cuerda es simplemente la fuerza centrípeta

$$\vec{T} = mv^2/r = mr\omega^2$$

(dirigida hacia el centro). Integrando y utilizando la ecuación para ω del primer apartado, obtenemos como resultado

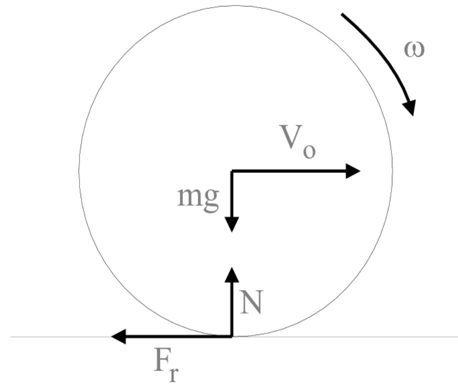
$$W = \frac{3}{2}mr_0^2\omega_0^2.$$

en donde el signo positivo indica que el trabajo se realiza sobre la partícula, tal como era de esperar.

Problema 4.- Una bola de billar es golpeada por el taco en dirección horizontal y a la altura del centro de la bola. Siendo R el radio de la bola, m su masa, V_0 la velocidad inicial y μ el coeficiente de rozamiento entre la bola y la mesa, ¿qué distancia habrá recorrido la bola antes de que deje de resbalar sobre la mesa?

Solución:

El movimiento de traslación de la bola viene regido por la ecuación del movimiento del centro de masa (suma de todas las fuerzas igual a la masa del sistema por la aceleración del centro de masa), mientras que el movimiento de rotación viene regido por la ecuación fundamental de la dinámica de rotación (momento o torque total de las fuerzas exteriores respecto de un eje igual al momento de inercia respecto a ese eje por la aceleración angular).



Antes de pasar a escribir las ecuaciones correspondientes analicemos el movimiento de la bola. Inicialmente el taco le comunica una velocidad v_0 y no tiene velocidad angular alguna. Sin embargo, en cuanto empieza a moverse sobre la mesa, la fuerza de rozamiento en el punto de contacto produce un par que inicia un movimiento de rotación acelerado y, al mismo tiempo, frena el movimiento de traslación. Además, como inicialmente la velocidad de traslación es v_0 y la angular es nula, el movimiento en los primeros instantes es de rodadura y deslizamiento, aunque debido al frenado de la traslación y a la aceleración de la rotación en algún momento se llegará a cumplir la condición de rodadura pura.

Supongamos, por tanto que la fuerza de rozamiento se opone al movimiento de traslación como se indica en la figura (si no fuera así nos debería aparecer finalmente un signo negativo al calcular su valor). En lo que sigue utilizaremos el criterio de signos habitual para las magnitudes lineales y angulares (lineales: positivas hacia la derecha y arriba; angulares: positivas en el sentido contrario a las agujas del reloj).

En este caso la única fuerza exterior es el rozamiento, luego las leyes anteriores se escriben en este caso:

$$ma = -mg\mu$$

$$I\alpha = -mg\mu R$$

Por lo tanto la velocidad de traslación (o deslizamiento) sigue una ley:

$$V = V_0 - g\mu t$$

mientras que la velocidad de rotación sigue la ley:

$$\omega = -\frac{mg\mu R}{I}t$$

lo que nos indica que la bola gira en el sentido de las agujas del reloj. En el momento en que la bola empieza a rodar sin deslizar, se cumple que $\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{R}$, es decir $V = -\omega R$. Sustituyendo los valores en función del tiempo de V y ω, se puede obtener el tiempo para el que se produce la rodadura pura, que resulta ser $t = \frac{2V_0}{7g\mu}$.

Una vez obtenido este tiempo, se puede obtener la distancia pedida sin más que utilizar las fórmulas del movimiento acelerado:

$$S = V_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{12}{49}\frac{V_0^2}{g\mu}$$

Problema 5.- Dos discos de radios R_1 y R_2, y momentos de inercia I_1 e I_2, respectivamente, pueden girar en un mismo plano, respecto de ejes perpendiculares al plano y que pasan por sus centros respectivos. El disco mayor gira con velocidad

inicial ω_0. Si acercamos el disco pequeño hasta que entren en contacto sus circunferencias exteriores, éste inicia una rotación por rozamiento. Finalmente se establece una rodadura sin deslizamiento y los dos discos se mueven en sentidos contrarios con velocidades angulares constantes.

a) Determinar la velocidad angular final del disco pequeño.

b) ¿Se conserva el momento angular total?

Solución:

a) La variación del momento angular de cada uno de los discos es igual al torque (o momento) ejercido por la fuerza de la fuerza de rozamiento sobre cada uno de los discos. Suponiendo que dicha variación ocurre en un tiempo t podemos escribir:

$$FR_2t = I_2\omega_0 - I_2\omega_2$$

$$FR_1t = I_1\omega_1$$

Dividiendo miembro a miembro las dos igualdades anteriores se obtiene:

$$I_2\omega_0 - I_2\omega_2 = \frac{R_2 I_1 \omega_1}{R_1}$$

Cuando se establece la rodadura sin deslizamiento, se cumple $R_2\omega_2 = R_1\omega_1$, por lo que podemos eliminar ω_2 de la expresión anterior y obtener:

$$\omega_1 = \frac{I_2 R_1 R_2}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2}\omega_0$$

b) El momento angular inicial es $L_i = I_2\omega_0$. El momento angular final se puede calcular, por ejemplo, respecto al eje de rotación del disco de radio R_2. El momento angular del sistema completo será, pues, la suma *vectorial* de los momentos angulares de ambos discos, y dado que el centro de masas del disco de radio R_1 no realiza ningún movimiento respecto al origen que hemos tomado para los momentos, el momento angular final es:

$$L_f = I_2\omega_2 - I_1\omega_1 = I_2\omega_0\left(\frac{I_1R_1R_2 - I_2R_1^2}{I_1R_2^2 + I_2R_1^2}\right)$$

por lo que el momento angular total no se conserva.

Problema 6.- Una cuerda está enrollada sobre un disco uniforme de radio $R =$ $5cm$, y masa $m = 100$ g. El disco se libera desde el reposo con la cuerda vertical sujeta por el extremo superior en un soporte fijo (véase la figura). A medida que desciende el disco, hallar:

a) la tensión de la cuerda;

b) la aceleración del centro de masa del disco;

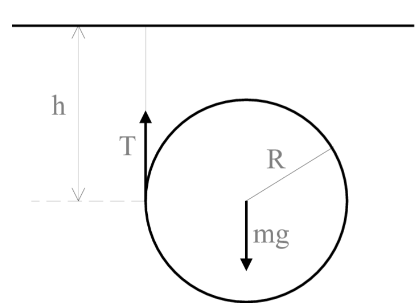
c) la velocidad de dicho centro de masa.

Solución:

a) Las ecuaciones para la dinámica del disco, tomando momentos en el eje del disco, son:

$$ma = T - mg; \quad I\alpha = -TR$$

Como $a = \alpha R$, tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, a y T. Resolviéndolo, y utilizando $I = \frac{1}{2}mR^2$, obtenemos $T = \frac{1}{3}mg$



b) $a = -\frac{2}{3}g$

c) Hay varias formas de resolver este apartado. Expondremos dos de ellas.

– Como el movimiento es uniformemente acelerado $v = \sqrt{2ah} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$.

– Por conservación de la energía:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2.$$

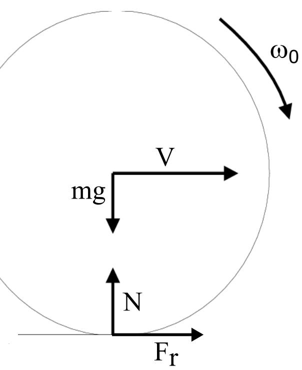
Sustituyendo ahora $I = \frac{1}{2}mR^2$, y $\omega = v/R$, volvemos a obtener $v = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$.

Problema 7.- Un disco macizo de masa m y radio R, situado en un plano vertical, gira con velocidad angular ω_o respecto de un eje horizontal que pasa por su centro, en el sentido de las agujas del reloj. Seguidamente el disco se pone en contacto con un suelo horizontal rugoso (con coeficiente de rozamiento μ) y se suelta. Se pide:

a) El tiempo que tarda el disco en alcanzar el movimiento de rodadura pura,

b) la distancia recorrida por el disco hasta llegar a ese movimiento de rodadura pura.

Solución:



a) El movimiento del disco es, inicialmente, de rodadura con velocidad de traslación nula. En este este caso, el rozamiento produce un frenado del movimiento de rotación (la velocidad angular y la aceleración angular tienen signos opuestos) y una aceleración del movimiento de traslación.

Al plantear las ecuaciones de la dinámica del disco hay que considerar que las únicas fuerzas que se ejercen sobre el disco al estar en contacto con el suelo son su peso, la reacción normal del suelo y la fuerza de rozamiento que, por lo antes comentado, debe tener sentido dirigido en la dirección positiva del eje OX. Sin embargo, el peso y la reacción normal del suelo son iguales y de sentido contrario y, además, al calcular los momentos de dichas fuerzas respecto al centro del disco no dan ninguna contribución al momento total. Por lo tanto, eligiendo el eje OX como eje horizontal, las ecuaciones para la traslación y rotación del disco son, respectivamente:

$$ma_x = F_R = \mu mg$$

$$I\alpha = F_R R = \mu mgR$$

donde hemos escrito las ecuaciones para los módulos de las magnitudes (recordemos que los vectores $\vec{\omega}$ y $\vec{\alpha}$ tienen direcciones opuestas, ya que, en este caso, la aceleración algular hace disminuir la velocidad angular).

Sabiendo que $I = \frac{1}{2}mR^2$, podemos obtener los valores de los módulos de la aceleración del centro de masa del disco y de la aceleración angular del disco, que resultan ser $a_x = \mu g$, y $\alpha = \frac{2\mu g}{R}$. La condición de rodadura pura se cumple cuando $V = \omega R$, por lo que basta hacer uso de las ecuaciones de la cinemática e imponer la condición de rodadura pura. De esta forma obtenemos:

$$V = a_x t = \mu g t = \omega R$$

$$\omega = \omega_o - \frac{2\mu g}{R}t$$

y de estas ecuaciones tenemos

$$t = \frac{\omega_o R}{3\mu g}$$

b) La distancia recorrida se obtiene también de las ecuaciones de la cinemática:

$$x = \frac{1}{2}a_x t^2 = \frac{\mu g}{2}t^2 = \frac{\omega_o^2 R^2}{18\mu g}$$

Problema 8.- Un disco plano uniforme de masa M y radio R, y situado en un plano vertical, gira en torno a un eje horizontal perpendicular al disco y que pasa por su centro de masas con velocidad angular ω_0.

a) ¿Cuál es su energía cinética? ¿Cuánto vale su momento cinético?

b) Del borde del disco se desprende un pequeño trozo de masa m, en un instante tal que el trozo se eleva verticalmente desde el punto en que se rompió. ¿Cuánto sube el trozo antes de empezar a caer?

c) ¿Cuál es la velocidad angular del disco una vez que ha perdido el trozo? ¿Cuál es la energía cinética final del disco?

Solución:

a)

$$E_c = \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{4}MR^2\omega_0^2$$

$$L_i = I\omega_0 = \frac{1}{2}MR^2\omega_0$$

b) El trozo que se desprende del borde del disco tiene una velocidad en el momento de desprenderse $V_0 = R\omega_0$. El punto más alto de su trayectoria será aquél en que su velocidad se anule, $v = R\omega_0 - gt = 0$, Esto se verifica para $t = R\omega_0/g$. Sabiendo el tiempo que tarda en subir podemos calcular el espacio recorrido:

$$s = V_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{R^2\omega_0^2}{2g}$$

c) Como no hay fuerzas exteriores el momento angular se conserva y el momento angular final será el mismo que al principio. Teniendo en cuenta que el momento de inercia de la masa m que está a una distancia R es mR^2, podemos calcular la velocidad angular final usando:

$$I\omega_0 = I_f\omega_f \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}MR^2\omega_0 = \left(\frac{1}{2}MR^2 - mR^2\right)\omega_f \quad \Rightarrow \quad \omega_f = \frac{M}{M-2m}\omega_0$$

La energía cinética final es, pues:

$$E_{cf} = \frac{1}{2}I_f\omega_f^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{M^2R^2}{M-2m}\right)\omega_0^2$$

Problema 9.- En el sistema de la figura, la masa m desciende por efecto de la gravedad tirando de la cuerda que está enrollada en torno al disco de radio r. El disco, a su vez, está unido rígidamente al disco de masa M y radio R. Suponiendo que el momento de inercia del disco de radio r es despreciable comparado con el de radio R, se pide:

a) Calcular la aceleración de m.

b) Calcular la tensión de la cuerda.

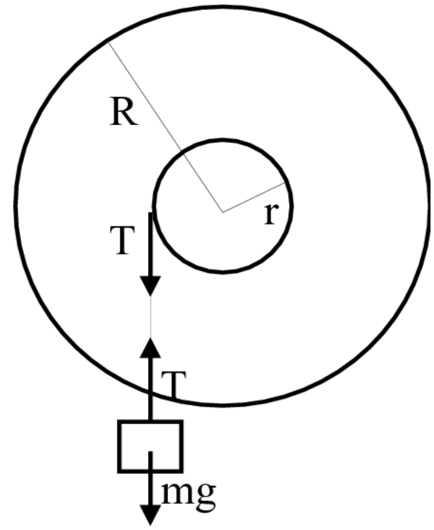
Datos numéricos: r = 0,04 m; R = 0,12 m; M = 4 Kg; m = 2 Kg.

Solución:

a) Para resolver el problema basta aplicar las ecuaciones fundamentales de la dinámica, tanto al movimiento del bloque que desciende como a la rotación del disco:

$$T - mg = ma$$

$$rT = I\alpha.$$



Hay que tener en cuenta, además, que $a = -\alpha r$, y que $I = \frac{1}{2}MR^2$, donde a es la aceleración lineal del centro de masas del bloque, y α es la aceleración angular del disco. Despejando T en la primera ecuación y sustituyendo las expresiones de T, a e I en la segunda ecuación obtenemos

$$a = -\frac{2mr^2}{MR^2 + 2mr^2}\, g.$$

Los valores numéricos nos dan $a = -g/10$.

b) De la primera ecuación del apartado (a) tenemos $T = m(a+g)$, con lo que sustituyendo directamente el valor de a, tenemos

$$T = mg\left(\frac{MR^2}{MR^2 + 2mr^2}\right).$$

Al sustituir los valores numéricos obtenemos $T = 18$ Newtons.

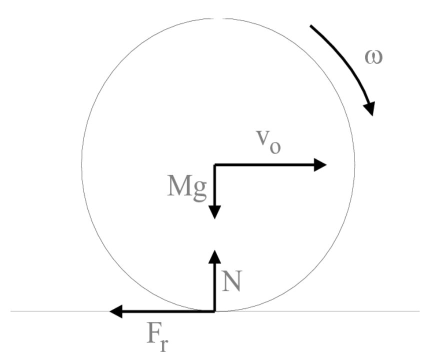
Problema 10.- En una bolera se lanza una bola de masa M y radio R de modo que en el instante que toque el suelo se está moviendo horizontalmente con una velocidad v_0 deslizando sin rodar. La bola se desliza durante un tiempo t_1 a lo largo de una distancia s_1 antes de empezar a rodar sin deslizar. El coeficiente de rozamiento al deslizamiento entre la bola y el suelo es μ_c.

a) Calcular s_1, t_1 y la velocidad v_1 de la bola en el momento que rueda sin deslizar.

b) Calcular los valores de s_1, t_1 y v_1 para $v_o = 8m/s$, y $\mu_c = 0,4$.

Solución:

a) En este caso la bola se mueve inicialmente con velocidad de traslación v_0 y velocidad de rotación nula. El rozamiento frenará la traslación y acelerará la rotación, de modo que estarádirigido en el sentido negativo del eje OX. Mientras la bola se desplaza sobre el suelo, la única fuerza que actúa sobre ella es la fuerza de rozamiento, por lo tanto las ecuaciones para la traslación del centro de masas y la rotación en torno a él son:



$$Ma = -\mu_c Mg; \quad I\alpha = -\mu_c MgR.$$

Sustituyendo en estas ecuaciones $I = \frac{2}{5}MR^2$, se obtienen los valores de las aceleraciones lineal y angular,

$$a = -\mu_c g \qquad \alpha = -\frac{5\mu_c g}{2R},$$

por lo que resultan ser constantes.

Por lo tanto, el movimiento resultante es la composición de un movimiento de traslación uniformemente frenado, con aceleración a y velocidad inicial v_0, y un movimiento de rotación uniformemente acelerado de velocidad angular inicial nula y aceleración angular α. Entonces, las expresiones de la cinemática nos dan a cualquier tiempo t los valores de la velocidad del centro de la bola y la velocidad angular de la misma, que serán:

$$v_c = v_0 - \mu_c g t \qquad \omega = \alpha t = -\frac{5\mu_c g}{2R} t.$$

Para resolver el problema basta comprobar qué valores deben tener v_c, ω y t cuando se cumpla la condición de rodadura sin deslizamiento, esto es, cuando $v_c = -\omega R$. Las expresiones para v_c, ω y la condición de rodadura sin deslizamiento forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que se resuelve dando como resultado:

$$t_1 = \frac{2v_0}{7\mu_c g}; \qquad v_1 = \frac{5}{7} v_0; \qquad s_1 = \frac{12 v_0^2}{49 \mu_c g}$$

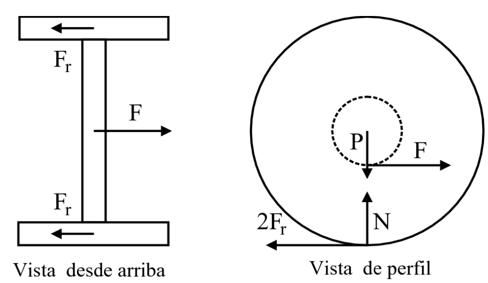
b) Sustituyendo los valores numéricos dados en el enunciado se obtiene:

$$t_1 = \frac{4}{7} = 0,57s; \qquad v_1 = \frac{40}{7} = 5,7ms^{-1}; \qquad s_1 = 3,92m$$

Problema 11.- En el sistema de la figura dos ruedas iguales, con masas de 10 kg y diámetros de 50 cm, están rígidamente unidas a un eje de diámetro 20 cm y masa 20 kg. Se tira de una cuerda enrollada al eje con una fuerza de 22 N en dirección horizontal. Hallar la aceleración lineal del centro de masas del sistema cuando rueda sin deslizar.

Solución:

Llamaremos m_r a la masa de cada rueda y m_e a la masa del eje, de manera que $M = 2m_r + m_e$ es la masa total del sistema. Por otra parte, R es el radio de cada rueda, r el radio del eje, y F a la fuerza con la que se tira de la cuerda.



En la dirección horizontal, las fuerzas que actúan sobre el sistema son la fuerza F con la que se tira de la cuerda enrollada al eje, y la fuerza de rozamiento F_r en los dos puntos de contacto de las ruedas con el suelo (ambas apuntan en dirección contraria a F). Si elegimos el punto de contacto con el suelo, que llamaremos o, para el cálculo de los momentos de las fuerzas actuantes sobre el sistema, conseguimos que la fuerza de rozamiento no contribuya al momento total y simplificamos la resolución del problema.

Consideraremos, de manera arbitraria como positivo el movimiento rotatorio en el sentido de las agujas del reloj (para la rotación), y de traslación hacia la derecha (para el movimiento de desplazamiento del centro de masas). Supondremos que, en principio, el sistema se mueve hacia la derecha (si no fuera así, el signo del resultado nos lo diría al final), y entonces tenemos que[1]

$$\tau_o = F\,(R - r) = I_o\,\alpha$$

[1]Nótese que con el convenio anterior el sentido del vector momento es el mismo que el del vector aceleración angular

donde I_o es el momento de inercia del sistema con respecto a un eje que pasa por el punto de contacto respecto al que hemos calculado el momento, y α es la aceleración angular. Para calcular el momento de inercia hay que sumar las contribuciones de cada rueda y del eje, y usar el teorema de Steiner, o de los ejes paralelos, para trasladar el eje respecto al que calculamos el momento de inercia (pasaremos del centro de masas al punto de contacto con el suelo). Explícitamente, tenemos

$$I_o = 2\left(\frac{1}{2}m_r R^2 + m_r R^2\right) + \left(\frac{1}{2}m_e r^2 + m_e R^2\right)$$

donde el primer paréntesis es la contribución de cada una de las dos ruedas, y el segundo paréntesis es la correspondiente al eje de unión. Por lo tanto

$$I_o = m_r R^2 + \frac{1}{2}m_e r^2 + MR^2.$$

Como, por otra parte, nos dicen que el sistema rueda sin deslizar, la condición de rodadura, que relaciona la aceleración del centro de masas con la aceleración angular, nos dice que

$$a = \alpha R.$$

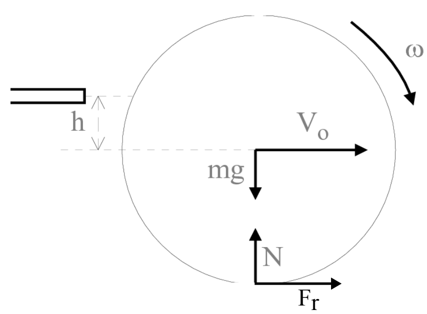
Por lo tanto, de la ecuación del momento, deducimos finalmente

$$a = \frac{F\,R(R-r)}{I_o}$$

que nos dice que, efectivamente, el sistema se mueve hacia la derecha, en el sentido de la fuerza con la que se tira de la cuerda.

Problema 12.- Una bola de billar de radio R y masa m, inicialmente en reposo, recibe un golpe de un taco en dirección horizontal y a una altura h por encima del centro de la bola (véase la figura). El golpe le comunica una velocidad inicial V_0, y debido al rozamiento con la mesa, termina rodando sin deslizar con una velocidad igual a $(9/7)V_0$. ¿Cuál es la distancia h a la que el taco ha golpeado la bola?

Solución:



Supondremos como positivo el giro en sentido contrario a las agujas del reloj. Si el taco ejerce una fuerza F durante un tiempo δt, le comunica a la bola una cantidad de movimiento $F\delta t = mV_0$, y un momento angular $Fh\delta t = -I\omega_0$ (el signo menos corresponde a la elección del sentido de giro positivo que hemos hecho al principio). Dividiendo miembro a miembro se obtiene $\omega_0 = -\frac{mhV_0}{I}$, de donde (en módulo) $V_0/\omega_0 R = 2R/5h$; es decir, si $h < \frac{2}{5}R$, V_0 es mayor que la velocidad correspondiente a una rodadura pura y la dinámica es similar a la de un problema anterior en que se consideró la bola golpeada a la altura de su centro: el rozamiento hará disminuir la velocidad de traslación y aumentar la de rotación hasta que se produzca la rodadura pura.

Dado que en el enunciado se especifica que la velocidad de traslación final es mayor que la inicial estamos en el caso contrario, es decir: $h > \frac{2}{5}R$, y entonces el rozamiento produce una aceleración del movimiento de traslación y un frenado del movimiento de rotación, por lo que la fuerza de rozamiento deberá tener el sentido de las X positivas.

Por otro lado, dado que al final rueda sin deslizar, la velocidad angular final será $\omega_f = -\frac{9}{7}\frac{V_0}{R}$. Si conseguimos relacionar ω_0 y ω_f habremos resuelto el problema. Por lo tanto escribimos las ecuaciones de la dinámica de traslación y rotación:

$$F_r = ma \Rightarrow mg\mu = ma \Rightarrow a = g\mu$$

$$\tau = I\alpha \Rightarrow F_r R = mg\mu R = I\alpha$$

Por lo tanto, $\alpha = mRa/I$ (el signo positivo de α indica que su orientación es la opuesta a la de ω). Por otra parte, la velocidad de traslación sigue la ley $V = V_0 + at$, y como sabemos el valor final de la velocidad podemos deducir que $at = \frac{2}{7}V_0$, por lo que $\alpha t = \frac{2}{7}\frac{mR}{I}V_0$.

Por lo tanto, para la velocidad angular tenemos:

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha t = -\frac{mhV_0}{I} + \frac{2}{7}\frac{mR}{I}V_0$$

Sustituyendo el valor de $\omega_f = -\frac{9}{7}\frac{V_0}{R}$, el momento de inercia de la esfera $I = \frac{2}{5}mR^2$ y simplificando se llega a:

$$h = \frac{4}{5}R$$

Problema 13.- Una bola de billar de radio R, inicialmente en reposo, recibe un golpe instantáneo mediante un taco y se aplica a una distancia $2R/3$ por debajo del centro de la bola. El impulso comunicado por el taco a la bola es horizontal. La velocidad inicial de la bola es v_o. Se pide calcular:

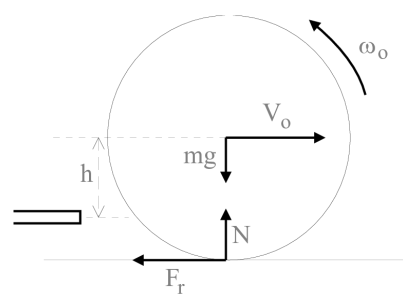
a) la velocidad angular inicial ω_o,

b) la velocidad de la bola cuando empieza a rodar sin deslizar,

c) la energía cinética inicial de la bola,

d) el trabajo de fricción realizado por la bola cuando desliza por la mesa.

Solución:



a) El taco actúa durante un tiempo Δt con una fuerza F y comunica a la bola un impulso $F\Delta t = mv_0$. Como resultado, se le comunica un momento angular

$$F\frac{2}{3}R\Delta t = I\omega_0$$

Sustituyendo en esta última ecuación $F\Delta t$ por mv_0 se obtiene $\omega_0 = \frac{5v_0}{3R}$.

b) El movimiento posterior viene gobernado por la fuerza de rozamiento F_r. Escribiendo las ecuaciones para el movimiento de traslación del centro de masas y para el movimiento de rotación en torno al centro de masas, tenemos:

$$ma = -F_r \qquad I\alpha = -F_r R$$

De estas ecuaciones, sustituyendo $I = \frac{2}{5}mR^2$, se obtienen los valores de las aceleraciones lineal y angular que resultan ser constantes,

$$a = -F_r/m \qquad \alpha = -\frac{5F_r}{2mR}.$$

Por lo tanto el movimiento resultante es la composición de un movimiento de traslación uniformemente frenado, con aceleración a y velocidad inicial v_0, y un movimiento de rotación uniformemente acelerado de velocidad angular inicial ω_0 y aceleración angular α. Entonces, las expresiones de la cinemática nos dan a cualquier tiempo t los valores de la velocidad del centro de la bola y la velocidad angular de la misma, que serán:

$$v = v_0 - \frac{F_r}{m}t; \qquad \omega = \omega_0 - \frac{5F_r}{2mR}t$$

Para poder resolver el sistema necesitamos una ecuación más que nos la da la condición de rodadura sin deslizamiento, esto es $v = -\omega R$. Eliminando F_r de las dos ecuaciones anteriores y utilizando la condición de rodadura obtenemos $v = \frac{5}{21} v_0$.

c) Es la suma de las energías cinéticas traslación y de rotación después del golpe,

$$E_{ci} = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I \omega_0^2 = \frac{19}{18} m v_0^2.$$

d)

$$W_r = E_{ci} - E_{cf} = E_{ci} - \left(\frac{1}{2} M v_f^2 + \frac{1}{2} I \omega_f^2 \right) = \frac{64}{63} m v_0^2.$$

Problema 14.- En el sistema de la figura, un cilindro de masa m y radio r rueda sin deslizar desde A hasta B sobre un bloque de madera con un perfil circular. El bloque de madera tiene una masa M y el radio de su cuadrante de superficie cilíndrica es R. El bloque de madera se apoya sin rozamiento sobre una superficie horizontal plana. Suponiendo que cuando el cilindro está en A, tanto m como M están en reposo, hallar la velocidad del bloque y la velocidad del centro de masas del cilindro cuando éste llegue al punto B.

Solución:

En primer lugar, la única fuerza externa que actúa sobre el sistema es la gravedad. Tomando como origen de energías potenciales la posición B, la energía potencial del cilindro en la posición A deberá haberse transformado al llegar a la posición B en la energía cinética del cilindro (que tendrá dos contribuciones, de traslación del centro de masas y de rotación en torno al mismo), más la energía cinética que ha adquirido el bloque. De esta manera tenemos:

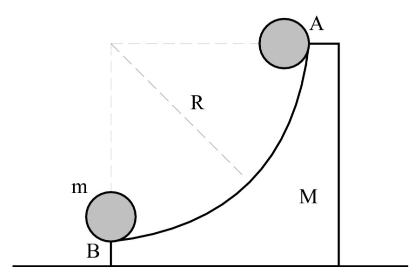
$$mg(R - r) \;=\; \frac{1}{2} M v_b^2 \;+\; \frac{1}{2} m v_c^2 \;+\; \frac{1}{2} I \omega_c^2$$

donde v_b es la velocidad del bloque, v_c es la velocidad del centro de masas del cilindro, $I = \frac{1}{2} m r^2$ es el momento de inercia del cilindro y ω_c es la velocidad angular de rotación del cilindro en torno a su eje de rotación.

En la ecuación anterior tenemos tres incógnitas v_b, v_c y ω_c, por lo tanto debemos encontrar dos ecuaciones más para resolver el problema. Una de ellas nos la da el hecho de que la fuerza exterior (la gravedad) sólo actúa en la dirección vertical, luego la componente horizontal de la cantidad de movimiento se conservará. Por lo tanto

$$M v_b \;=\; m v_c \qquad\qquad v_c = \frac{M}{m}\, v_b.$$

La tercera ecuación la obtenemos de la condición de rodadura sin deslizamiento. Dicha condición establece que el desplazamiento del punto de contacto debe ser el mismo en la superficie del cilindro y en la superficie del bloque. Por lo tanto, llamemos θ_c al ángulo girado por el cilindro sobre su eje y θ_b al ángulo descrito en el mismo desplazamiento por la recta que une el centro del cilindro con el centro del perfil circular del bloque. La condición de que los desplazamientos anteriores sean iguales implica que



$$\theta_c r \;= \theta_b R$$

Para obtener una condición que relacione las velocidades basta con derivar respecto al tiempo ambos miembros de la ecuación anterior, con lo que tenemos

$$\omega_c r \; = \; \omega_b R$$

Finalmente, para eliminar ω_b basta darse cuenta que el movimiento del centro del cilindro es un arco de circunferencia de radio $R - r$, de manera que $v_c = \omega_b(R - r)$. Por consiguiente,

$$\omega_c = \frac{R}{r(R-r)} v_c = \frac{MR}{mr(R-r)} v_b.$$

Substituyendo las expresiones de v_c y ω_c en la expresión del balance de energía obtenemos finalmente

$$v_b \; = \; \sqrt{\frac{2mg(R-r)}{M \; + \; \frac{M^2}{m} \; + \; \frac{M^2 R^2}{2m(R-r)^2}}}$$