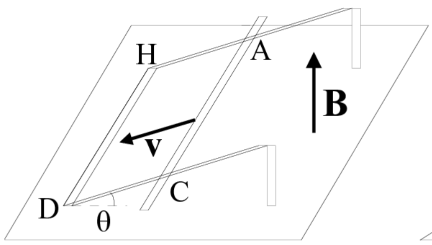
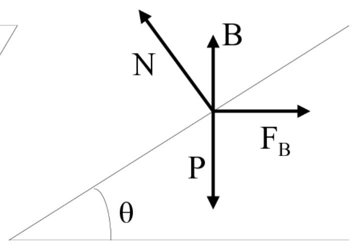
Tema 5. Fenómenos de Inducción Electromagnética.

Problemas resueltos.

Problema 1.- Una varilla conductora de masa $m = 10$ g, de longitud $l = 20$ cm y resistencia $R = 10$ ohmios, baja deslizando por unos carriles conductores que forman un ángulo de $\theta = 30^o$ con la horizontal. Los carriles se cierran en su parte inferior por un conductor paralelo a la varilla. En toda la región existe un campo magnético uniforme, perpendicular al plano horizontal sobre el que se apoyan los carriles. La inducción magnética B de dicho campo es igual a 1 Tesla (véase la figura).
Se observa que el movimiento primero es acelerado, convirtiéndose luego en uniforme.
a) Razónese físicamente por qué ocurre esto.
b) Calcúlese la velocidad de la varilla, la FEM inducida en sus extremos y la corriente que pasa por el circuito cuando el movimiento de la varilla es uniforme.
Nota: Se desprecia el rozamiento entre la varilla y los carriles y la resistencia eléctrica de éstos y del conductor inferior, pero no así la de la varilla.





Solución:

a) Analicemos primero el fenómeno físico que tiene lugar en este ejercicio. Nos indican que el movimiento de la varilla es inicialmente acelerado. Que sea acelerado significa que existe una fuerza neta sobre la varilla. Esta fuerza se descompone en el peso de la varilla, P, y una fuerza de ligadura de ésta con los carriles, y que es normal a los mismos, N. En el instante en que se pone en movimiento la varilla no actúan más fuerzas.

Según desliza la varilla sobre los carriles, la superficie del circuito rectangular ACDH disminuye. Como dicha superficie es atravesada por las líneas de fuerza del campo magnético **B**, el flujo total que atraviesa el circuito variará.

Al variar el flujo, $\mathbf{\Phi}_B$, se induce una fuerza electromotriz, cuyo sentido nos da la ley de Lenz: al haber una disminución del flujo, la corriente inducida debe tener un sentido tal que el campo que cree esa corriente ($\mathbf{B}_{inducido}$) vaya en el mismo sentido que **B**, para que no disminuya el flujo a través de ACDH. Luego el sentido de esta corriente es AHDCA, es decir el contrario a las agujas del reloj (véase la figura). En la varilla conductora circulará, pues, en el sentido CA. Dado que la varilla baja con movimiento acelerado, la variación de flujo con respecto al tiempo será cada vez mayor.

Ahora bien, al comenzar a circular una corriente i por el circuito ACDH, actuará sobre las distintas partes del circuito una fuerza magnética por elemnto de longitud $d\mathbf{l}$, $d\mathbf{F}_B = i(d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$. La fuerza que actúa sobre la varilla (es irrelevante considerar la que actúa sobre el resto del circuito, al ser sus partes fijas) tiene una componente que va en sentido contrario a la del peso que la hace deslizar (véase el esquema de la parte derecha de la figura). En cualquier instante, la ecuación de movimiento de la varilla en la dirección paralela a los carriles será

$$P \operatorname{sen}\theta - F_B \cos\theta = ma \tag{1}$$

y en la dirección perpendicular a los mismos

$$N - P\cos\theta - F_B \operatorname{sen}\theta = 0.$$

Analicemos la primera de estas ecuaciones. $\mathbf{F}_B$ es una fuerza que en los *primeros instantes* es variable: aumenta en el transcurso del tiempo. En efecto, el flujo magnético que atraviesa el circuito es variable y se genera una FEM que llamamos ε:

$$d\mathbf{\Phi}_B = \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = BdS\cos\theta \qquad \Longrightarrow \qquad \varepsilon = B\cos\theta\frac{dS}{dt} = B\cos\theta l\frac{dx(t)}{dt}, \tag{2}$$

donde $x(t)$ es la distancia que separa la varilla del conductor HD en el instante t, y $dx(t)/dt$ representa la velocidad (con signo menos) con la que desciende la varilla.

Como el único tramo del circuito que tiene resistencia no despreciable es la resistencia R de la varilla móvil, la intensidad que pasa por el circuito es

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Bl}{R}\frac{dx(t)}{dt}\cos\theta.$$

Por tanto, i es función del tiempo, y lo será también la fuerza magnética, $F_B(t) = lBi(t)$. Es decir, al comenzar el movimiento de la varilla el módulo de la fuerza magnética aumenta con el tiempo. Llevando las expresiones de la intensidad de corriente y de la fuerza magnética a la ecuación (1) se obtiene:

$$P\operatorname{sen}\theta - \frac{B^2l^2}{R}\frac{dx(t)}{dt}\cos^2\theta = ma(t)$$

Como vemos, a medida que transcurre el tiempo crece el segundo sumando del primer miembro, por lo que será menor la aceleración. Llegará un momento en que ésta se anule y el movimiento se hará uniforme, como se indica en el enunciado.

b) Para calcular esta velocidad uniforme, hacemos $a = 0$, y obtenemos

$$v_0 = \frac{mgR\operatorname{sen}\theta}{B^2l^2\cos^2\theta}.$$

A partir de este instante en que $a = 0$ y $v = v_0$ la FEM inducida y la intensidad permanecen constantes. La fuerza electromotriz es fácil de calcular a partir de la ecuación (2):

$$\varepsilon_0 = Blv_0\cos\theta = \frac{mgR}{Bl}\tan\theta,$$

mientras que la intensidad

$$i_0 = \frac{mg}{Bl}\tan\theta$$

Sustituyendo los valores numéricos, se obtiene:

$$v = 16,35 \text{ m s}^{-1}, \quad \varepsilon = 2,83 \text{ V}, \quad i = 0,283 \text{ A}$$

Problema 2.- Supongamos dos solenoides rectilíneos indefinidos (cuya longitud l es mucho mayor que su radio), de radios R_1 y R_2 ($R_1 < R_2$). Circulan corrientes por los solenoides, tales que crean un campo en el sentido indicado en la figura. Calcular la inductancia mutua entre los dos solenoides cuando están dispuestos como se indica en la figura, en los siguientes casos:
a) circula una corriente $i_1(t)$ en el conductor 1;
b) circula una corriente, $i_2(t)$, en el conductor 2.

Solución:

El campo creado por el inductor (1) vale

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} i_1$$

mientras que el flujo a través de una espira del inductor (2) será:

$$\Phi_{21} = \pi R_1^2 B_1 = \mu_0 \pi R_1^2 \frac{N_1}{l} i_1$$

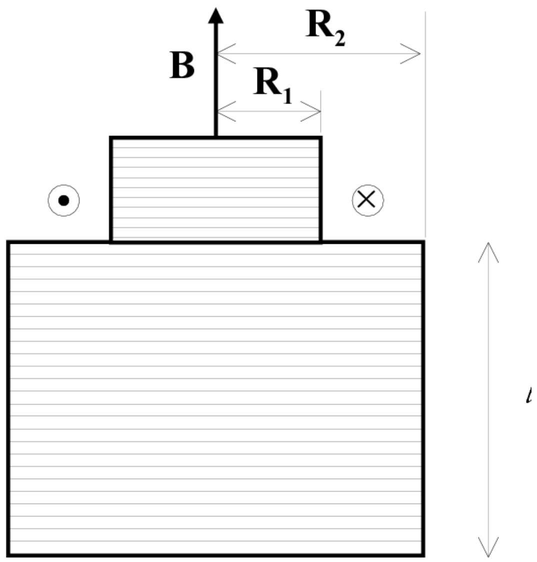
(Pregunta: ¿por qué el área efectiva es πR_1^2 y no πR_2^2?)

Si la corriente i_1 es variable, se inducirá en (2) una FEM

$$\varepsilon_2 = -\frac{dN_2\Phi_{21}}{dt} = -N_2 \mu_0 \pi R_1^2 \frac{N_1}{l} \frac{di_1}{dt}$$

que nos da como coeficiente de inductancia mutua

$$M_{12} = \mu_0 \pi R_1^2 \frac{N_1 N_2}{l}$$

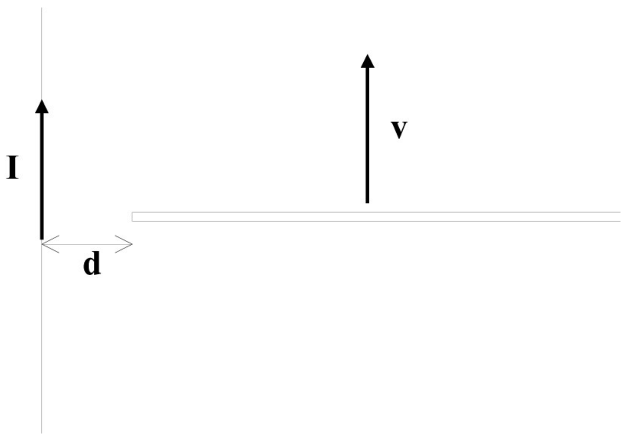


Si repetimos el mismo proceso considerando que la corriente circula exclusivamente por el inductor (2), obtendremos después de un cálculo similar:

$$M_{21} = \mu_0 \pi R_1^2 \frac{N_2 N_1}{l}$$

Nota: para este caso particular y sin que sirva de demostración general, hemos justificado la igualdad entre ambos coeficientes de inducción mutua.

Problema 3.- Una barra conductora de longitud ℓ se mueve con velocidad uniforme v, en una dirección paralela a un conductor rectilíneo de longitud infinita, por el que circula una corriente constante I (véase la figura). El extremo más próximo de la barra se encuentra a una distancia d del conductor. Calcular la diferencia de potencial entre los extremos de la barra conductora móvil.



Solución:

Según el enunciado, nuestro conductor se mueve en el seno del campo magnético creado por un hilo rectilíneo de longitud infinita. Este campo tiene una expresión

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

donde x es la distancia desde el eje del hilo al punto donde estemos evaluando el campo.

Por lo tanto, los puntos de la barra conductora móvil ven diferentes valores del campo magnético, al estar situados a diferentes distancias respecto al hilo que crea el campo. En cada punto de la barra, la velocidad de la barra y el campo B son perpendiculares, por lo que podemos escribir la fuerza electromotriz inducida como:

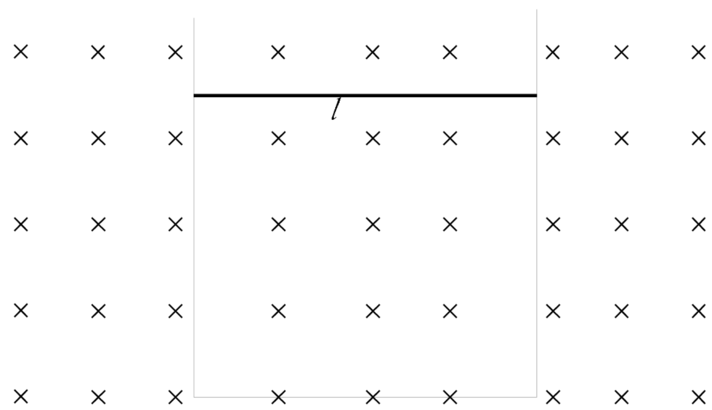
$$V = \int vB dx = \int_d^{d+l} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx = \mu_0 \frac{vI}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{l}{d}\right)$$

`Respecto al signo, el potencial será positivo en el extremo de la barra más próximo al conducto`

Problema 4.- Un conductor, de longitud l, masa m y resistencia eléctrica R, desliza por unos rieles verticales sin rozamiento, por efecto de la gravedad. Un campo magnético uniforme, de inducción B, actúa horizontalmente (véase la figura). Si los extremos inferiores de los rieles se encuentran conectados por otro conductor, y la resistencia eléctrica de este conductor y de los rieles puede despreciarse, averiguar:
a) la corriente que fluye por el circuito;
b) la velocidad límite que alcanzará el conductor en su caída.

Solución:

a) La intensidad es tal que la fuerza magnética se opone al deslizamiento hacia abajo de la varilla. Por otra parte, la variación del flujo magnético a través del área delimitada por la varilla es:



$$d\phi_B = Bds$$

ya que el campo y el vector perpendicular a la superficie son siempre paralelos. Por tanto la fuerza electromotriz inducida será:

$$E = B\frac{ds}{dt} = Bl\frac{dx}{dt} = Blv$$

y la intensidad que fluye por el circuito será:

$$i = \frac{E}{R} = \frac{Bl}{R}v.$$

b) La velocidad límite se alcanzará cuando la aceleración sea nula, es decir cuando la fuerza magnética equilibre a la fuerza de gravedad:

$$mg = F_m = Bli = \frac{b^2 l^2}{R} v \qquad \Longrightarrow \qquad v = \frac{mgR}{b^2 l^2}.$$

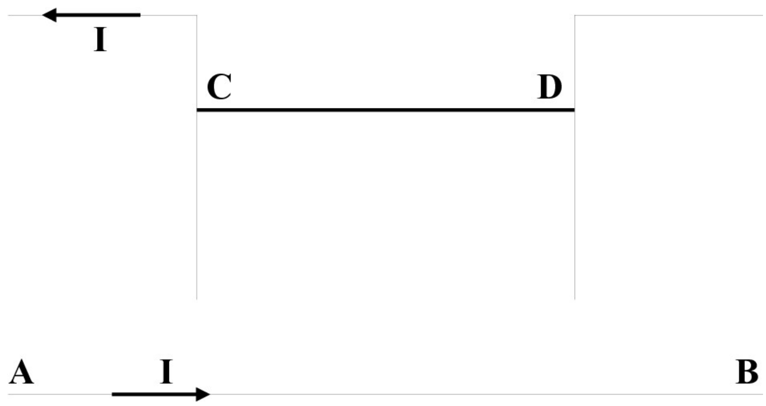
Problema 5.- Un alambre largo horizontal AB reposa sobre la superficie de una mesa. Otro alambre CD, situado directamente encima de AB y paralelo al mismo, tiene una longitud l y puede deslizar verticalmente en contacto con las guías metálicas de la figura. Los dos alambres están conectados eléctricamente y por ellos circula una corriente I. La densidad lineal de masa del alambre CD es λ.
¿A qué altura quedará en equilibrio el alambre CD a causa de la fuerza magnética creada por la corriente que circula por el alambre AB (y por todo el circuito, claro está)?

Solución:

La corriente que circula por el alambre AB crea un campo en cada punto del alambre CD, de expresión

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi h},$$

donde se ha llamado h a la distancia vertical entre los conductores AB y CD.



Este campo ejerce una fuerza magnética sobre el alambre conductor CD. Por tanto, este conductor estará en equilibrio en la posición en la que dicha fuerza magnética equilibre su peso. Por lo tanto:

$$mg = F_{mag} = IlB$$

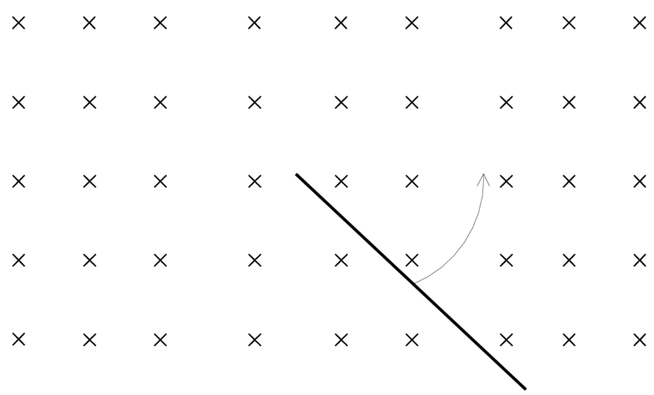
(donde hemos llamado m a la masa del alambre CD) o bien:

$$\lambda l g = Il\frac{\mu_0 I}{2\pi h} \qquad \Longrightarrow \qquad h = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi\lambda g}$$

Problema 6.- Una varilla metálica de longitud L gira, en un plano horizontal y alrededor de uno de sus extremos que se mantiene fijo, con velocidad angular constante ω. La varilla está sometida a un campo magnético vertical uniforme B. Calcular:
a) la fuerza de Lorentz ejercida sobre un electrón situado a una distancia r del extremo fijo de la barra,
b) el valor del campo eléctrico inducido a lo largo de la varilla,
c) la diferencia de potencial inducida entre los extremos de ésta.

Datos: $L = 20$ cm, $B = 0,1$ T, $\omega = 10$ rad/seg.

Solución:



a) Teniendo en cuenta que la velocidad del electrón (de módulo $v = \omega r$) es perpendicular al campo magnético, la fuerza de Lorentz que siente el electrón será $F = e\omega r B$.

b) Esta fuerza puede interpretarse como creada por un campo eléctrico inducido, que será igual a la fuerza ejercida sobre la carga dividida por el valor de dicha carga. Por lo tanto, el campo inducido a una distancia r del centro de giro será:

$$E(r) = \frac{qvB}{q} = B\omega r.$$

c) La diferencia de potencial entre los extremos de un elemento de varilla de longitud dr será $dV = E\,dr = B\omega r\,dr$, e integrando a lo largo de la varilla tenemos

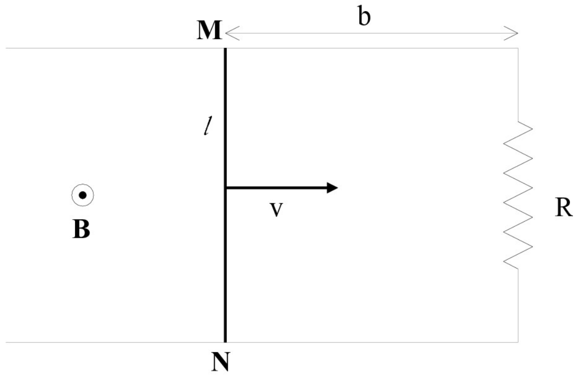
$$V = \frac{B\omega L^2}{2} = 2\pi \times 10^{-2} \text{ voltios}$$

Problema 7.- El conductor MN de la figura tiene masa y resistencia eléctrica despreciables y longitud $l = 0,1$ m. Dicho conductor desliza sin rozamiento sobre dos raíles situados en un

plano horizontal y unidos a través de una resistencia $R = 0{,}5\ \Omega$.
a) Suponga que, perpendicularmente al plano del movimiento, existe un campo magnético uniforme $B = 1$ Wb m^{-2}. Calcule la intensidad que recorre el circuito cuando el conductor MN se mueve con velocidad $v = 10$ m/s.
b) Suponga ahora que el conductor MN está en reposo, que la longitud de los raíles es $b = \sqrt{2}$ m, y que el campo magnético ya no es uniforme, sino que depende del tiempo según la ley $B = B_0 \cos(\omega t)$, siendo $B = 1$ Wb m^{-2}. Calcule el valor que debe tener la frecuencia ω para que la intensidad de la corriente inducida en el circuito sea de 1 Amperio.

Solución:

a) La fuerza electromotriz inducida se calcula fácilmente a partir de la derivada temporal del flujo magnético:



$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}Blx = -Blv$$

Por consiguiente, el módulo de la fuerza electromotriz será 1 voltio, y el módulo de la intensidad será $I = 2$ A.

b) En el caso del campo magnético variable con el tiempo y el conductor en reposo, la variación del flujo magnético proviene directamente de la variación del campo magnético. El cálculo de la fuerza electromotriz inducida se hace formalmente a partir de la misma expresión anterior:

$$\epsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = SB_0\omega \operatorname{sen} \omega t = blB_0\omega \operatorname{sen} \omega t.$$

El valor máximo que puede tomar entonces la intensidad será:

$$I_{max} = \frac{\epsilon_{max}}{R} = \frac{blB_0\omega}{R}.$$

Para que la intensidad eficaz sea de $1A$, la intensidad máxima deberá tomar un valor de $\sqrt{2}$ A, y, por lo tanto, el valor que deberá tomar ω para que esto se cumpla es:

$$\omega = \frac{\sqrt{2}R}{blB_0} = 5\ \text{s}^{-1}.$$

Problema 8.- Un carrete plano y circular, de 200 espiras de 40 cm de diámetro, gira en el campo magnético terrestre, alrededor de un eje vertical, a razón de 900 r.p.m. La f.e.m. eficaz generada es de 28 mV. Calcular el valor que tiene en ese lugar la componente horizontal del campo magnético terrestre

Solución:

Dado que el carrete gira en torno a un eje según la vertical del lugar, la única componente del campo magnético terrestre que contribuye a la variación de flujo magnético Φ es la componente horizontal. Por lo tanto la fuerza electromotriz inducida ε será:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(NB_HS\ \cos\omega t) = NB_HS\omega\ \operatorname{sen}\omega t$$

`Falta definir` N, S, `y la geometría del sistema.`

Al ser ε sinusoidal, el valor eficaz de la fuerza electromotriz inducida es $\varepsilon_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_{max}$. Por lo tanto, la componente del campo magnético terrestre según la horizontal del lugar será:

$$B_H = \frac{\sqrt{2}\epsilon_{ef}}{NS\omega} = 1{,}67 \times 10^{-5}\ \text{T}.$$

Problema 9.- Un cuadro de 200 espiras de $15\ \mathrm{cm/s^2}$ de área gira un ángulo de 90^o en un tiempo de $0,1$ s, desde una posición en que su plano es perpendicular a un campo magnético existente de 5 T, hasta otra posición en que el plano es paralelo a dicho campo. La resistencia del cuadro es de 50 ohmios y está conectado a un galvanómetro balístico. Calcular la carga que pasa por el galvanómetro.

Solución:

Al cambiar la orientación del cuadro respecto al campo magnético se produce una variación del flujo magnético que da lugar a una fuerza electromotriz inducida ε, que es la que provoca la corriente. Para calcular ε calculamos la derivada temporal del flujo magnético Φ

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(NBS\ \cos\omega t) = NBS\omega\ \operatorname{sen}\omega t.$$

La carga que pasa por el galvanómetro será la integral de la intensidad durante el tiempo que dura el movimiento. Como la intensidad es $I = \varepsilon/R$, tenemos:

$$Q = \int_0^T \frac{NBS\omega}{R}\ \operatorname{sen}\omega t\ dt = \frac{NBS}{R} = 0,03\ \mathrm{C}.$$

Problema 10.- Una barra conductora de longitud l se mueve en un plano vertical en la dirección perpendicular a su eje con velocidad v. La región está sometida a la acción de un campo magnético B uniforme y perpendicular al plano del movimiento de la barra. Suponiendo que el campo magnético está dirigido en el sentido negativo del eje OX, se pide:
a) Calcular la diferencia de potencial entre los extremos de la barra.
b) Hallar el valor numérico de dicha diferencia de potencial si $l = 1,5$ m; $B = 0,5$ T; $v = 4$ m/s.
c) ¿Cuál de los extremos de la barra se encuentra a mayor potencial?

Solución:

a) Al moverse la barra en el seno del campo B se produce una fuerza sobre los electrones del metal de forma $\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B}$.

Esta fuerza es equivalente a un campo eléctrico $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$. Dado que $\vec{v}$ y $\vec{B}$ son mutuamente perpendiculares, el campo eléctrico dentro de la barra se puede escribir como $E = vB$. Por tanto, para calcular el potencial basta con integrar:

$$V = \int_0^l vBdy = vBl.$$

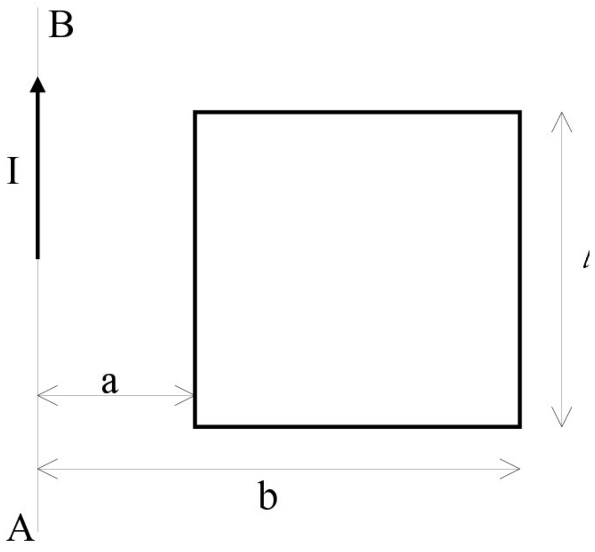
b) Sustituyendo los valores numéricos en la expresión anterior obtenemos $V = 3$ Voltios.

c) El sentido de la fuerza $\vec{F}$ se puede hallar por la regla habitual para el producto vectorial, y, teniendo en cuenta que la carga del electrón es negativa, dicha fuerza va hacia el extremo de la barra que está más alejado del eje, por lo tanto dicho extremo estará a menor potencial.

Problema 11.- En el sistema de la figura, la corriente que circula por el conductor infinito AB está dirigida hacia arriba y aumenta con el tiempo constantemente a una razón fija que llamaremos A. Se pide:
a) Para un instante dado en el que el valor de la corriente es I, ¿cuáles son la magnitud y dirección del campo magnético $\vec{B}$ a una distancia r del conductor?
b) ¿Cuál es el flujo que atraviesa la espira de sección cuadrada de la figura?
c) ¿Cuál es la fuerza electromotriz inducida en el cuadro?
Valores numéricos: $a = 10$ cm; $b = 30$ cm; $l = 20$ cm; $A = 2$ A/s.

Solución:

a) El módulo del campo creado por el conductor infinito AB en cualquier punto situado a una distancia r del mismo se puede calcular utilizando el teorema de Ampère:



$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 I.$$

Escogiendo como contorno de integración una circunferencia perpendicular al conductor (y al plano de la figura) y centrada en él, $\vec{B}$ y $\vec{dl}$ son paralelos, con lo que:

$$2\pi r B = \mu_0 I \qquad \Longrightarrow \qquad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Por otro lado, la regla de la mano derecha nos indica que la dirección de $\vec{B}$ es la de la tangente a la circunferencia en cada punto, y el sentido es contrario a las agujas del reloj en el plano de la circunferencia visto desde arriba.

b) El cálculo del flujo se simplifica mucho sólo con darse cuenta que el campo magnético es perpendicular a la espira y no depende de la coordenada vertical, de modo que:

$$\Phi(t) = \int\int \vec{B(t)} \cdot \vec{ds} = l\int_a^b \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 l I(t)}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

c) Como $I(t) = At$ tenemos

$$\Phi(t) = \frac{\mu_0 l t}{2\pi} A \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

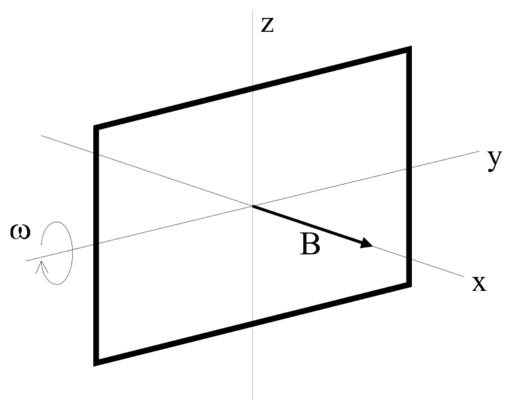
y como la fuerza electromotriz es la derivada temporal del flujo cambiada de signo, tenemos:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} A \ln\left(\frac{b}{a}\right) = -2,76 \times 10^{-7} \text{ Voltios.}$$

Problema 12.- En la figura se representa un cuadro rectangular de área A que gira en torno al eje OY con velocidad angular constante ω y sometido a un campo magnético constante B dirigido según el eje OX. Calcular:
a) el flujo que atraviesa el cuadro y su valor máximo,
b) la fuerza electromotriz inducida y su valor máximo,
c) la intensidad que circula por el cuadro y su valor máximo.
Valores numéricos: $A = 400$ **cm²**; $R = 2\ \Omega$; $\omega = 10$ **rad/s**; $B = 0,5$ **T.**

Solución:

a) El flujo se escribe como $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$; por su parte cada uno de los vectores puede escribirse en el sistema de referencia de la figura como $\vec{B} = B\hat{i}$, y $\vec{S} = A(\cos\omega t\hat{i} - \operatorname{sen}\omega t\hat{j})$. El producto escalar es entonces



$$\Phi(t) = BAcos\omega t$$

y $\Phi_{max} = BA = 0,02$ Wb.

b) La fuerza electromotriz inducida

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = BA\omega \operatorname{sen}\omega t$$

con lo que $\varepsilon_{max} = 0,2$ Voltios.

c)

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{BA\omega}{R} sen\omega t \qquad \Longrightarrow \qquad I_{max} = 0,1 \text{ Amperios.}$$

Problema 13.- Una espira rectangular cuyo lados horizontales y verticales miden $a = 10$ cm y $b = 5$ cm, respectivamente, tiene una resistencia de $2,5\ \Omega$. La espira se mueve en la dirección horizontal con una velocidad constante $v = 2,4$ cm/s. En el instante $t = 0$ la parte delantera de la espira penetra en una región cuadrada de 20 cm de lado en la que existe un campo magnético constante B. Se pide:
a) hallar el flujo magnético que atraviesa la espira en función del tiempo y dibujar un gráfico del mismo,
b) hallar la fuerza electromotriz y la corriente inducidas en la espira en función del tiempo y dibujar un gráfico de las mismas.

Solución:

a) Dado que el campo magnético es constante y siempre perpendicular a la espira, el valor del flujo magnético será siempre $\Phi(t) = BS(t)$. Aquí, $S(t)$ es la superficie de la espira contenida en la región en la que se encuentra el campo magnético.

Por lo tanto hay que distinguir tres periodos de tiempo. Mientras la espira está entrando en la región del campo magnético, $S(t)$ es proporcional al tiempo, $S(t) = bvt$ y la espira tarda $t_1 = a/v = 4,17$ segundos en entrar totalmente en la región del campo magnético. Por tanto,

$$\Phi(t) = Bbvt \qquad \text{para } 0 \le t \le t_1.$$

La espira tarda otro tiempo igual a t_1 desde que terminó de entrar hasta que empieza a salir de la región del campo magnético. Entonces, entre t_1 y $t_2 = 2t_1$, la espira está completamente contenida en la región del campo, luego

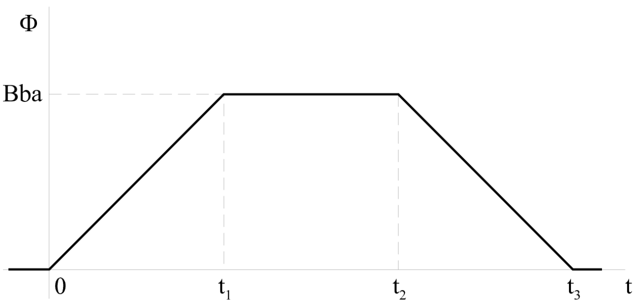
$$\Phi(t) = Bab \qquad \text{para } t_1 \le t \le t_2.$$

Finalmente, mientras la espira está saliendo de la región del campo, $S(t)$ decrece durante un intervalo de tiempo comprendido entre t_2 y $t_3 = 3t_1$, y tenemos que

$$\Phi(t) = Bb(a - vt) \qquad \text{para } t_2 \le t \le t_3.$$

Para tiempos mayores que t_3 la espira está completamente fuera de la región del campo y el flujo es nulo.

En resumidas cuentas, la evolución del flujo se puede representar con la figura.



b) La fuerza electromotriz se obtiene a partir de la relación $f = -d\Phi/dt$ y la corriente será, en cada caso, $I = f/R$, con lo que obtenemos:

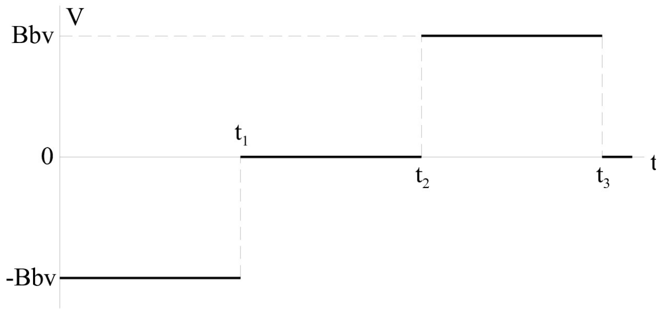
$$f = -Bbv; \qquad I = -\frac{Bbv}{R}; \qquad \text{para } 0 \le t \le t_1$$

$$f = 0; \qquad I = 0; \qquad \text{para } t_1 \le t \le t_2$$

$$f = Bbv; \qquad I = \frac{Bbv}{R}; \qquad \text{para } t_2 \le t \le t_3$$

Para tiempos mayores que t_3, tanto la fuerza electromotriz como la intensidad de corriente son nulas.

Por tanto, la representación gráfica de la evolución de la fuerza electromotriz es



La forma de la evolución de la corriente es la misma que la de la figura anterior, dado que entre los valores de la corriente y la fuerza electromotriz sólo hay una constante multiplicativa ($1/R$).

Problema 14.- Un péndulo simple está formado por una varilla conductora de longitud L y masa despreciable, que soporta una bola metálica de masa m. El péndulo se mueve en el seno de un campo magnético horizontal y uniforme B y ejecuta un movimiento armónico simple de amplitud angular α_o. ¿Cuál es la fuerza electromotriz generada a lo largo de la varilla de la que pende el péndulo?

Solución:

El péndulo realiza oscilaciones que vienen descritas por la variación del ángulo que forma la varilla con la vertical $\alpha(t) = \alpha_0 \cos\omega t$, donde $\omega = \sqrt{(g/l)}$. Como los distintos puntos de la varilla del péndulo se mueven con distintas velocidades, el campo eléctrico inducido (que tiene relación directa con la fuerza magnética que sufren los electrones de la varilla) será distinto en cada punto.

Supongamos la varilla dividida en elementos infinitesimales de longitud dr. Para el elemento situado entre r y $r + dr$, tendremos que su velocidad de traslación es

$$v(t) = r\frac{d\alpha(t)}{dt} = -r\alpha_0\omega \ \operatorname{sen}\omega t.$$

Por lo tanto el campo eléctrico inducido en ese elemento de varilla (recuerde la simetría del sistema que estamos estudiando) será

$$E = vB = -B\omega\alpha_0 r \ \operatorname{sen}\omega t.$$

Finalmente, integrando en toda la varilla

$$V = \int_0^L \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_0^L (-B\omega\alpha_0 \ \operatorname{sen}\omega t) r dr = -B\omega\alpha_0\frac{L^2}{2} \ \operatorname{sen}\omega t.$$

Problema 15.- Una corriente de intensidad $I = 20$ A recorre un alambre infinito, situado a lo largo del eje X, en el sentido positivo de dicho eje. Una pequeña esfera metálica de radio $R = 2$ cm se encuentra inicialmente en reposo sobre el eje Y y a una distancia $h = 45$ cm por encima del alambre. La esfera se deja caer en el instante $t = 0$.
(a) ¿Cuál es es campo eléctrico en el centro de la esfera en el instante $t = 0,1$ s? Supóngase que el único campo magnético es el producido por el alambre.
(b) ¿Cuál es el voltaje a través de la esfera en el instante $t = 0,1$ s?
(Dato: $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}$ Tm/A.)

Solución:

a) Al moverse la esfera en el seno de un campo magnético, las cargas en el metal sienten la fuerza de Lorenz debido a su movimiento. Eso es equivalente a un campo eléctrico inducido, de intensidad:

$$\vec{E}(t) = \frac{\vec{F}(t)}{q} = \vec{v}(t)\times\vec{B}(t)$$

Por otro lado, el campo magnético en el centro de la esfera puede ser calculado fácilmente por medio del teorema de Ampère y tiene como expresión:

$$\vec{B}(t) = \frac{\mu_0 I}{2\pi z(t)}\,\widehat{\imath},$$

donde $z(t)$ es la altura del centro de la esfera respecto al alambre. Ahora bien, las expresiones para $z(t)$ y $\vec{v}(t)$ corresponden a la caída libre de la esfera, es decir:

$$z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2; \qquad \vec{v}(t) = -gt^2\,\widehat{k}.$$

Por lo tanto

$$\vec{E}(t) = \; -\frac{\mu_o I g t}{2\pi(h - \frac{1}{2}gt^2)}\,\widehat{\jmath} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{E}(t = 0,1\ \mathrm{s}) = -7,7 \times 10^{-5}\,\widehat{\jmath}\ \mathrm{V/m}.$$

b) La diferencia de potencial entre los puntos superior e inferior de la esfera será:

$$\Delta V \;=\; -\int_{z(t)-R}^{z(t)+R} \vec{E}(t)\cdot d\vec{r}$$

Como el campo eléctrico es un campo conservativo, dicha integral no depende del camino recorrido. Podemos, pues, elegir el segmento rectilíneo que une los puntos superior e inferior de la esfera, a lo largo del cual el campo eléctrico $\vec{E}(t)$ y el vector $d\vec{r}$ son siempre perpendiculares entre sí. Por lo tanto, la cantidad dentro de la integral es siempre cero, y la diferencia de potencial buscada es nula (¿cabría esperar otro resultado?).