Capítulo 5

De vuelta a los principios de la Combinatoria. Desarreglos

Para este capítulo se ha dejado algunas partes de la Combinatoria que hubiesen tenido su lugar natural previamente en capítulos anteriores, pero que al requerir bien conocimientos previos aún no vistos o una cierta capacidad de abstracción y razonamiento deductivo que no eran posibles presuponer, se han pospuestos para el final del desarrollo de los contenidos de la Combinatoria de este curso.

5.1. Principio de Inclusión-Exclusión

En capítulos anteriores ha habido muchas ocasiones de aplicar el Principio de Inclusión-Exclusión, del que se dio una justificación al inicio de esta materia. Ahora vamos a dar una demostración del mismo. Veremos primero los casos de la unión de dos o de tres conjuntos y finalmente veremos el Principio en su caso general.

Teorema 5.1 *Sean A y B subconjuntos dentro de un cierto conjunto U. Se verifica que*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Demostración. Vamos a descomponer los conjuntos A, B y $A \cup B$ en unión de conjuntos disjuntos. Es fácil comprobar que

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B),\ B = (B \setminus A) \cup (A \cap B),\ A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A). \tag{5.1}$$

Ahora bien, los tres conjuntos que aparecen en los segundos miembros de las tres igualdades anteriores (5.1) son disjuntos dos a dos. En efecto,

$$(A \setminus B) \cap (A \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cap (A \cap B) = A \cap \emptyset = \emptyset, \tag{5.2}$$

$$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = (A \cap \bar{B}) \cap (B \cap \bar{A}) = A \cap \emptyset \cap \bar{A} = \emptyset, \tag{5.3}$$

$$(A \cap B) \cap (B \setminus A) = (A \cap B) \cap (B \cap \bar{A}) = A \cap B \cap \bar{A} = \emptyset. \tag{5.4}$$

Siendo los anteriores conjuntos dos a dos, de (5.1) se sigue que $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$ y $|B \setminus A| = |B| - |A \cap B|$, por lo que se sigue que

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A \setminus B| + |A \cap B| + |B \setminus A| \\ &= |A| - |A \cap B| + |A \cap B| + |B| - |A \cap B| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B|. \end{aligned}$$

□

Hemos visto ya, en el Capítulo 1, el Principio de Inclusión-Exclusión en el caso de tres conjuntos. Ahora vamos a demostrarlo.

Teorema 5.2 *Sean A_1, A_2, A_3 subconjuntos de un cierto conjunto U. Se verifica que*

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Demostración. Haciendo uso del teorema anterior y de las propiedades de la unión e intersección de conjuntos tenemos

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1 \cup (A_2 \cup A_3)| \\ &= |A_1| + |A_2 \cup B| - |A_1 \cap (A_2 \cup A_3)| \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3| - |(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)| \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| - |(A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap A_3)|) \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|. \end{aligned}$$

□

Vemos ahora el Principio de Inclusión-Exclusión en el caso general.

Teorema 5.3 *Sean $A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos de un cierto conjunto U. Al complementario de cada A_i, $U \setminus A_i$, lo denotamos por $\bar{A}_i = U \setminus A_i$. Se verifica que*

$$\begin{aligned} |\bar{A}_1 \cap \ldots \cap \bar{A}_n| = |U| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum |A_{i_1} \cap A_{i_2}| - \sum |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| + \ldots \\ + (-1)^k \sum |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| + \ldots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|, \end{aligned} \tag{5.5}$$

donde, para $2 \leq k \leq n$, las sumas $\sum |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$ se extienden a todas las combinaciones de orden k, $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, de $\{1, \ldots, n\}$.

Demostración. Sea $x \in U$. Si x no pertenece a ninguno de los conjuntos A_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ entonces $x \in \bar{A}_1 \cap \ldots \cap \bar{A}_n$, por lo tanto al hacer el cardinal de ese conjunto, $|\bar{A}_1 \cap \ldots \cap \bar{A}_n|$, ese elemento x aporta o suma un 1 al valor de ese cardinal. Como $x \in U$ pero $x \notin A_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, ese elemento x contribuye también con un 1 al lado derecho de (5.6).

Supongamos que x pertenece a p conjuntos A_i, siendo $1 \leq p \leq n$. Entonces es claro que $x \notin \bar{A}_1 \cap \ldots \cap \bar{A}_n$, luego al calcular su cardinal ese elemento x aporta 0 al mismo. Ahora bien, $x \in U$, luego aporta 1 al calcular $|U|$ y, por otra parte, x pertenece a p conjuntos A_i, luego al calcular $\sum |A_i|$ este elemento x aporta p a esa suma de cardinales. Además, el número de veces que este x se cuenta en la suma $\sum |A_{i_1} \cap A_{i_j}|$, estando la suma extendida a las combinaciones de orden 2 de $\{1, \ldots, n\}$, es C_p^2. En general, el número de veces que x se cuenta en $\sum |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$, variando k entre 3 y p (el caso $k = 2$ ya lo hemos considerado antes), y estando la suma extendida a las combinaciones de orden k de $\{1, \ldots, n\}$ es C_p^k. Por tanto, la contribución de x a la derecha de la igualda en (5.6) es

$$\binom{p}{0} - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} - \ldots + (-1)^p \binom{p}{p} = (1-1)^p = 0.$$

Por tanto, en cualquier caso, cada $x \in U$ contribuye con la misma cantidad a la izquierda y a la derecha de (5.6), luego la igualdad (5.6) se verifica.

□

Corolario 5.4 *Sean $A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos de un cierto conjunto U. Se verifica que*

$$\begin{aligned}|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \ldots \\ + (-1)^{k-1} \sum |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| + \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|,\end{aligned} \tag{5.6}$$

donde, para $2 \leq k \leq n$, las sumas $\sum |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$ se extienden a todas las combinaciones de orden k, $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, de $\{1, \ldots, n\}$.

Demostración. En $\bar{A}_1 \cap \ldots \cap \bar{A}_n$ están todos los elementos de U que no están en $A_1 \cup \ldots \cup A_n$; por tanto, del Teorema 5.3 se sigue de inmediato. □

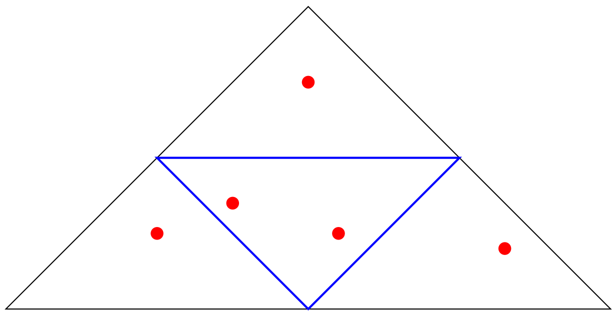
5.2. Principio de Distribución

Otro de los principios básicos de la Combinatoria es el Principio de Distribución, por ello, desde un punto de vista de la coherencia estructural de estos apuntes se incluye aquí.

El Principio de Distribución es también conocido como Principio de las Cajas, del Palomar o de Dirichlet. La idea es muy intuitiva, si tenemos un palomar con $k+1$ palomas y k huecos, al menos uno de los lugares contendrá dos o más palomas. En su versión para la distribución de objetos entre cajas también es muy intuitivo; así, si hemos de repartir k objetos entre n cajas y $k > n$ entonces al menos una caja deberá contener dos o más objetos.

Ejemplo 5.5 *Si a una tutoría asisten* 13 *estudiantes, entonces al menos dos de ellos celebran su cumpleaños en el mismo mes. En este caso los meses serían las* 12 *cajas y los* 13 *estudiantes representarían los objetos a distribuir en cada caja (mes) en el que cumple años.*

Ejemplo 5.6 *En un triángulo equilátero de lado* 1 *se colocan cinco puntos en su interior, entonces al menos dos de ellos están a una distancia menor que* $\frac{1}{2}$.



*Dividimos el triángulo como se indica en la figura. Hay "*4 *cajas (cada triángulo pequeño)" y hay* 5 *puntos, entonces al menos dos puntos estarán en una misma caja. Cada caja es un triángulo de lados* $\frac{1}{2}$, *entonces los dos puntos han de estar a una distancia menor que* $\frac{1}{2}$.

Una formulación equivalente del Principio del Palomar es la siguiente:

Teorema 5.7 *Si se distribuyen k objetos en n cajas y se verifica que $k > nr$, entonces en al menos una de las cajas habrá como mínimo $r+1$ objetos.*

Demostración. Distribuimos los k objetos en las n cajas. Sea X_i el conjunto cuyos elementos son los objetos que están en la caja $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Se tiene, por el Principio de Adición, que

$$k = |X_1 \cup \ldots \cup X_n| = |X_1| + |X_2| + \ldots |X_n|$$

y como $k > nr$, se sigue que

$$|X_1| + |X_2| + \ldots |X_n| > nr. \tag{5.7}$$

Supongamos que no es cierta la tesis del teorema; es decir, que para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ es $|X_i| \leq r$, entonces $k = |X_1 \cup \ldots \cup X_n| = |X_1| + |X_2| + \ldots |X_n| \leq nr$ lo que contradice (5.7).

□

Observemos que en este teorema si consideramos $r = 1$ obtenemos el Principio del Palomar enunciado al inicio de esa sección.

Ejemplo 5.8 *Se distribuyen* 100 *objetos en* 7 *cajas, entonces en al menos una caja habrá como mínimo* 15 *objetos, ya que* $100 > 7 \cdot 14 = 98$.

Vemos ahora el Principio del Palomar generalizado.

Teorema 5.9 Principio del Palomar generalizado *Si $r \cdot n + 1$ palomas ocupan n divisiones de un palomar, al menos una de las divisiones tiene $r + 1$ o más palomas.*

Demostración. Supongamos lo contrario, entonces cada una de las n divisiones contendrían r o menos palomas, entonces el número total de palomas será menor o igual que nr, lo que contradice que hay $rn + 1$ palomas.

□

Naturalmente el enunciado es el mismo si en lugar de palomas se habla de objetos y en lugar de divisiones del palomar se habla de cajas.

El Principio del Palomar se puede formular en términos de la parte entera de un número real. Parte entera techo de un número real x, $\lceil x \rceil$ se define como el número entero más próximo por exceso; por tanto, el menor número entero igual o mayor que el número real x. La parte entera suelo de un número real x, $\lfloor x \rfloor$, se define como el número entero más próximo por defecto; por tanto, el mayor número entero igual o menor que el número real x.

Teorema 5.10 *Si k objetos se distribuyen en n cajas, entonces en alguna caja debe haber al menos $\lceil \frac{k}{n} \rceil$ objetos y en alguna caja hay a lo sumo $\lfloor \frac{k}{n} \rfloor$.*

Dejamos su demostración como tarea para el lector.

5.3. Desarreglos

Este epígrafe es sobre permutaciones ordinarias y por eso su lugar natural es dentro del Capítulo 2. No obstante, hemos insistido en la Introducción en que la falta de recursos matemáticos por parte del alumno así como el escaso rodaje que tiene en los procesos de deducción aconsejan modular los contenidos de acuerdo a un principio didáctico de asimilación. En este caso, este apartado es aconsejable verlo cuando ya hayan pasado algunas semanas desde el inicio de los estudios universitarios por parte del alumno y es la razón por la que lo vemos aquí.

Dado un conjunto finito llamaremos *arreglo* en el conjunto a cualquier sucesión finita de elementos de dicho conjunto. De las distintas posibilidades ahora estamos interesados en aquellos arreglos del conjunto en los que están todos sus elementos una sola vez. Al tratarse de sucesiones, tenemos un orden entre los elementos del conjunto.

Si el conjunto tiene n elementos, podemos poner en sucesión, uno tras otro, los elementos del mismo y tendríamos un cierto arreglo $(a_1, a_2 \ldots, a_n)$. Por ejemplo, si tenemos un conjunto cuyos elementos son un triángulo (t), un cuadrado (c), un pentágono (p) y un hexágono (h), un arreglo sería (c, h, t, p), pero también lo serían: (t, h, c, p), (t, c, p, h), etc. Si queremos que estén todos los elementos y que solo aparezcan una vez en la sucesión, tendremos 4! arreglos posibles. Cada uno de ellos es una permutación de los elementos del conjunto y cualquiera de esos arreglos podemos tomarlo como permutación principal; por ejemplo, podemos considerar que la permutación principal es t, c, p, h. Podemos codificar este arreglo indicando el orden en que aparece cada elemento y así el triángulo será el primer elemento de la permutación principal, el cuadrado el segundo, etc.; es decir $t = a_1$, $c = a_2$, $p = a_3$ y $h = a_4$, de modo que el subíndice nos indica el lugar que está ocupando. También podríamos decir que al 1 (en el lugar 1) le corresponde $t = a_1$, al 2 le corresponde $c = a_2$, al 3 le corresponde $p = a_3$ y al 4 le corresponde $h = a_4$. En el Capítulo 4 veremos que cada uno de estos arreglos posibles se corresponde con una aplicación biyectiva entre los conjuntos $\{1, 2, 3, 4\}$ y $\{t, c, p, h\}$, de modo que $(c, h, t, p) = (\sigma(2), \sigma(6), \sigma(1), \sigma(3)$ siendo σ la aplicación en cuestión, $\sigma : \{1, 2, 3, 4\} \longrightarrow \{t, c, p, h\}$.

Fijada la permutación principal, cualquier permutación de la misma viene dada por una correspondencia relativa al orden. Si nos fijamos por ejemplo en $\{1, 2, 3, 4\}$, siendo $(1, 2, 3, 4)$ la permutación principal, podemos enfatizar el cambio de orden de otra permutación cualquiera, como la $(2, 3, 4, 1)$, simbolizandolo como sigue

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

de modo que se evidencia que el 2 ocupa la posición del 1, el 3 la del 2 etc.

Fijada una permutación principal, un desarreglo es una permutación de los elementos del conjunto dado en la que ningún elemento está en su posición original. Así, por ejemplo, si en el caso anterior la permutación principal considerada es (t, c, p, h), entonces (t, p, h, c) no es un desarreglo porque t está en la posición primera. Por el contrario, (h, p, t, c) o (p, t, h, c) sí son desarreglos.

Definición 5.11 *Dado un conjunto finito $\{1, 2, \ldots, n\}$ y considerada como permutación principal $(1, 2, \ldots, n)$, una permutación σ se llama desarreglo si $\sigma(i) \neq i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Una pregunta que surge inmediatamente es ¿cuántos desarreglos hay? Al número de desarreglos de los n números (en general de n objetos) o simplemente de n lo denotamos por $D(n)$. Es claro que $D(1) = 0$, porque un único elemento no podemos permutarlo y cambiarlo de orden. También es claro que $D(2) = 1$, porque para $\{1, 2\}$ la otra permutación posible, $(2, 1)$ es un desarreglo. Es fácil comprobar que $D(3) = 2$, pues para $\{1, 2, 3\}$ solo hay dos permutaciones que no conservan el lugar de la permutación principal para ninguno de sus elementos son $(2, 3, 1)$ y $(3, 1, 2)$.

Teorema 5.12 *Sea $n \in \mathbb{Z}^+$, el número de desarreglos de n es*

$$D(n) = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}. \tag{5.8}$$

Demostración. Sea A_1 el conjunto de las permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que tienen al 1 en primer lugar. Sea A_2 el de aquellas que tienen al 2 en segundo lugar, y así sucesivamente hasta A_n el conjunto de las permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que tienen al n en enésimo lugar.

$D(n)$ será igual al número de todas las permutaciones menos el cardinal de $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$; es decir,

$$D(n) = n! - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|.$$

Aplicaremos el principio de inclusión-exclusión. Veamos el cardinal de A_1. Tenemos que el 1 está en su lugar, pero los otros $n - 1$ números pueden permutarse de todas las formas posibles, luego $|A_1| = (n-1)!$ Análogamente va a ocurrir para cada $|A_i|$, $i \in \{2, \ldots, n\}$, el 1 está fijo en la posición i y el resto puede permutar de todas las formas posibles, por lo que $|A_i| = (n-1)!$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Veamos ahora los cardinales de las intersecciones dos a dos, $A_i \cap A_j$, con $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ e $i \neq j$. Tenemos que

$$A_i \cap A_j = \{\text{permutaciones que tienen a } i \text{ y } j \text{ en sus respectivos lugares}\},$$

el resto, $n - 2$ elementos, pueden variar de todas las formas posibles; por tanto, $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$

Para tres conjuntos, $A_i \cap A_j \cap A_k$, con $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j, i \neq k, j \neq k$, tenemos que

$$A_i \cap A_j \cap A_k = \{\text{permutaciones que conservan los lugares } i, j, k\},$$

el resto, $n - 3$ elementos, pueden variar de todas las formas posibles; por tanto, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = (n-3)!$

Razonando análogamente llegamos a la intersección de $n - 1$ conjuntos A_i, que tendrán cardinal 1!. Finalmente

$$|A_1 \cap \ldots \cap A_n| = |\{1, \ldots, n\}| = 1 = 0! = (n-n)!$$

Ahora bien, hay

$$\begin{array}{ccc} C_n^1 = n & \text{cardinales} & |A_i|, \\ C_n^2 & \text{cardinales} & |A_i \cap A_j|, \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ C_n^{n-1} & \text{cardinales} & |A_{i_1} \cap \ldots A_{i_{n-1}}|, \\ C_n^n = 1 & \text{cardinal} & |A_1 \cap \ldots \cap A_n|. \end{array}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \ldots \cup A_n| &= C_n^1(n-1)! - C_n^2(n-2)! + C_n^3(n-3)! + \ldots \\ &\quad \ldots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^n 1! + (-1)^n C_n^n 0!, \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} D(n) &= n! - C_n^1(n-1)! + C_n^2(n-2)! + \ldots + (-1)^n C_n^n 0! \\ &= n! - \frac{n}{1!(n-1)!}(n-1)! + \frac{n}{2!(n-2)!}(n-2)! + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{0!n!} 0! \\ &= n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right]. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.13 *El número de desarreglos de* $\{1,2,3,4,5\}$ *será*

$$D(5) = 5! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right] = 5 \cdot 4 \cdot 3 - 5 \cdot 4 + 5 - 1 = 44.$$

Definición 5.14 *Sea* $\{1,2,\ldots,n\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, *y una cierta permutación* $P_0 = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ *de la permutación principal. Decimos que cualquier otra permutación* $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ *es incompatible con* P_0 *si* $i_k \neq j_k$ *para cada* $k \in \{1,\ldots,n\}$.

Es decir, $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ es incompatible con P_0 si no mantiene ningún número en el lugar que ocupa P_0. Consecuentemente, los desarreglos son las permutaciones que son incompatibles con la permutación principal (usualmente el arreglo nautural $(1,2,\ldots,n)$.

Proposición 5.15 *Dada una permutación* P_0 *de* $\{1,\ldots,n\}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, *entonces el número de permutaciones incompatibles con* P_0 *es el número de desarreglos de* n, $D(n)$.

<u>Demostración</u>. Es inmediato, pues el número de permutaciones incompatibles con algún orden fijo P_0 no depende de cuál sea ese orden sino solo del número de elementos; por tanto, el número de permutaciones incompatibles con P_0 es $D(n)$. $\square$

Determinación recurrente del número de desarreglos

Sería interesante saber si es posible calcular el desarreglo de un número entero n dado a partir del número de desarreglos de otros números menores porque ello nos facilitaría un método sistemático de cálculo. Si tenemos $\{1, 2, \ldots, n\}$ y considerando como permutación principal $(1, 2, \ldots, n)$, podemos construir un primer desarreglo, para ello, basta elegir en la posición primera un número i, entre 1 y n que sea distinto del 1. Por tanto, podemos poner

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ i & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Para seguir construyendo el desarreglo vamos a considerar dos casos, que a i que lo hemos puesto en primer lugar le corresponda el 1 en la nueva permutación que estamos construyendo o que no le corresponda el 1.

En el primer caso, ya hemos puesto a i en primer lugar y a 1 en el iésimo lugar, luego nos quedan $n-2$ lugares para terminar de formar un desarreglo; entonces el número de posibles desarreglos que podemos construir, fijados ya i y 1, es $D(n-2)$.

En el segundo caso, si en el lugar i no vamos a colocar el 1, los elementos 2 hasta el n pueden ir en cualquier posición siempre que no vaya a la misma posición inicial que tenía (y el i no vaya a la posición 1). En definitiva, lo que tenemos que formar es un desarreglo de $n-1$ elementos; por tanto hay $D(n-1)$ posibilidades.

Por tanto, elegido en primer lugar i hay $D(n-2) + D(n-1)$ posibilidades para terminar de formar el desarreglo. Pero hay $n-1$ posibilidades de elegir i para ocupar el primer lugar (desde el 2 hasta el n), luego en total, tendremos que el número de desarreglos es:

$$D(n) = (n-1)\left[D(n-1) + D(n-2)\right],$$

sabiendo además que $D(1) = 0$ y $D(2) = 1$. A fin de poder incluir el cero, convenimos en que sea $D(0) = 1$.

Podemos enunciar este resultado como un teorema.

Teorema 5.16 *Dado $n \in \mathbb{Z}^+$, con $n \geq 2$, el número de desarreglos de n verifica la siguiente ecuación de recurrencia*

$$D(n) = (n-1)\left[D(n-1) + D(n-2)\right], \tag{5.9}$$

con $D(1) = 0$ y $D(2) = 1$.

Desde la fórmula de recurrencia (5.9) podemos obtener la expresión explícita (5.8) de $D(n)$.

En efecto, restando $nD(n-1)$, a ambos lados de la igualdad, en (5.9)tenemos

$$\begin{aligned} D(n) - nD(n-1) &= (n-1)D(n-1) - nD(n-1) + (n-1)D(n-2) \\ &= -D(n-1) + (n-1)D(n-2) \\ &= -\left(D(n-1) - (n-1)D(n-2)\right). \end{aligned}$$

Si llamamos $Z(n) = D(n) - nD(n-1)$, lo que hemos obtenido es que

$$Z(n) = -Z(n-1) \tag{5.10}$$

y observemos que $Z(0) = 1$. Tenemos una ecuación que se denomina ecuación en recurrencia con condición inicial $Z(0) = 1$. Aunque a esta altura de sus estudios el alumno no ha estudiado las ecuaciones en recurrencia[1], vamos a tratar ésta adecuadamente para obtener el valor de $Z(n)$.

Supongamos que $Z(n) = \alpha^n$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\alpha \neq 0$. Tendremos que α^n es una solución de la ecuación en recurrencia (5.10) si y solo si se tiene que $\alpha^n = -\alpha^{n-1}$ o lo que es lo mismo si y solo si $\alpha^n + \alpha^{n-1} = \alpha^{n-1}(\alpha + 1) = 0$, si y solo si $\alpha = -1$. Luego $Z(n) = (-1)^n$. Naturalmente $c(-1)^n$, es también una solución (llamada solución general), cualquiera que sea la constante c, pero en nuestro caso, la condición inicial es que $Z(0) = 1$, luego $1 = Z(0) = c(-1)^0 = c$, por lo que $c = 1$ y la solución es $Z(n) = (-1)^n$.

Consecuentemente, hemos obtenido que $D(n) - nD(n-1) = (-1)^n$. Si dividimos por $n!$, tenemos

$$\frac{D(n)}{n!} - \frac{D(n-1)}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}. \tag{5.11}$$

Planteamos ahora la ecuación (5.11) para sucesivos valores de n, recordando quiénes son $D(2)$, $D(1)$ y $D(0)$ y obtenemos

[1]El nombre de recurrente obedece a que se acude a valores anteriores para ir obteniendo los sucesivos valores de la sucesión en cuestión, en este caso $(Z(n))_n$. En general, una sucesión de números $a(0), a(1), a(2), \ldots, a(n), \ldots$ y una ecuación que relaciona a $a(n)$ con sus predecesores en la sucesión, válida para todos los enteros n mayores que algún entero n_0, se llama relación de recurrencia. Cada término de la sucesión se calcula a partir de los anteriores y por eso se necesitan uno (o varios, según la definición de la sucesión) valores iniciales. Aunque el procedimiento recurrente permite determinar cualquier valor de la sucesión, es siempre deseable encontrar una expresión explícita de $a(n)$ que permita calcular directamente los valores.

$$
\begin{array}{rcl}
\frac{D(n)}{n!} - \frac{D(n-1)}{(n-1)!} & = & \frac{(-1)^n}{n!} \\
\frac{D(n-1)}{(n-1)!} - \frac{D(n-2)}{(n-2)!} & = & \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \\
\frac{D(n-2)}{(n-2)!} - \frac{D(n-3)}{(n-3)!} & = & \frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!} \\
\frac{D(n-3)}{(n-3)!} - \frac{D(n-4)}{(n-4)!} & = & \frac{(-1)^{n-3}}{(n-3)!} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{D(2)}{2!} - \frac{D(1)}{1!} & = & \frac{1}{2!} \\
\frac{D(1)}{1!} - \frac{D(0)}{0!} & = & -\frac{1}{1!} \\
\frac{D(0)}{0!} & = & 1
\end{array}
$$

Sumando estas igualdades se tiene que

$\frac{D(n)}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \frac{1}{2!} - \frac{1}{1!} + 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$, de donde se obtiene la ecuación (5.8).

Una curiosidad más

Aunque el alumno, a esta altura del curso, aún no ha estudiado las series de potencias en Análisis Matemático, queremos que observe una relación interesante entre los desarreglos de un número n y el número e, base de los logaritmos neperianos.

Vamos a fijarnos en la expresión de $\frac{D(n)}{n!}$. Calculemos los siete primeros términos de esa sucesión con cuatro cifras decimales; es decir, sus valores para $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ y nos paramos en $n = 7$. Tendremos

n	$\frac{D(n)}{n!}$
1	0
2	$0,5000$
3	$0,333$
4	$0,3750$
5	$0,3667$
6	$0,3679$
7	$0,3679$

Podemos ver que ya tenemos el valor de $\frac{D(n)}{n!}$ con una exactitud de cuatro cifras decimales. Así que por grande que sea n el error entre $\frac{D(n)}{n!}$ y $0,3679$ será menor o igual que $0,00005$, ello nos está indicando que $\lim_{n\to\infty} \frac{D(n)}{n!} = 0,3678\ldots$, valor que coincide con el de $\frac{1}{e}$. Lo que hemos hecho, es justificar heurísticamente que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D(n)}{n!} = \frac{1}{e} = 0,367879\ldots.$$

Cuando el alumno haya estudiado en Análisis Matemático las series, verá que el desarrollo en serie de Taylor de e^x es

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Para $x = -1$ vemos la similitud entre esta serie y $\frac{D(n)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$, de modo que

$$\frac{D(n)}{n!} \approx \frac{1}{e}$$

lo que es un resultado sorprendente y maravilloso.