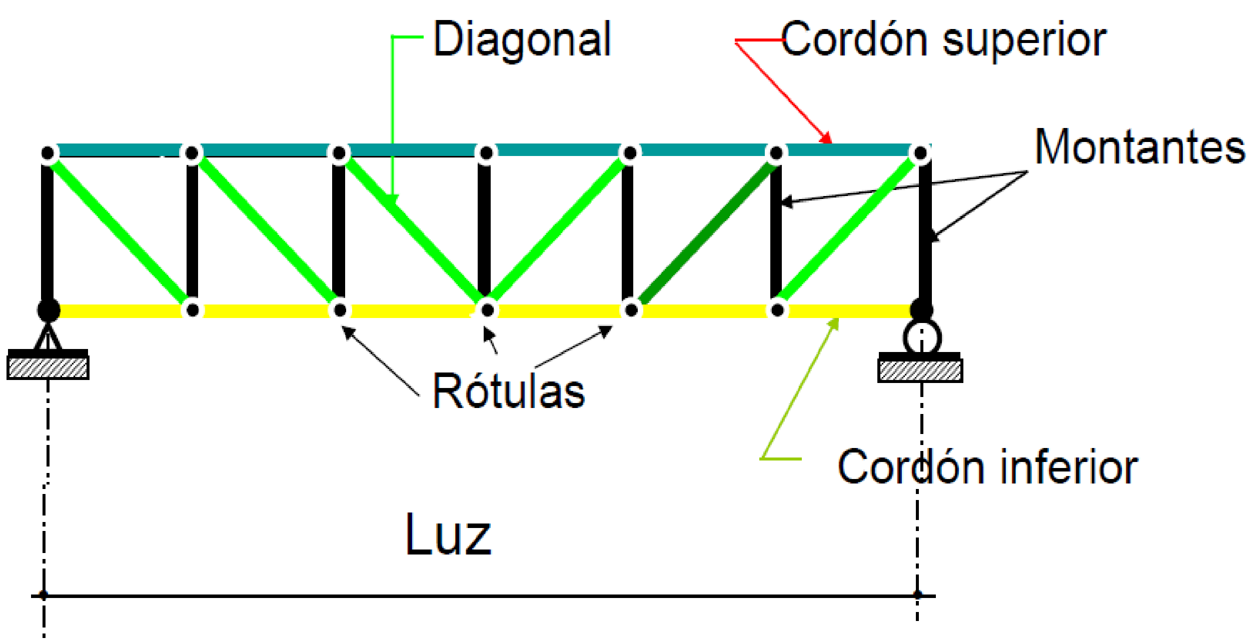
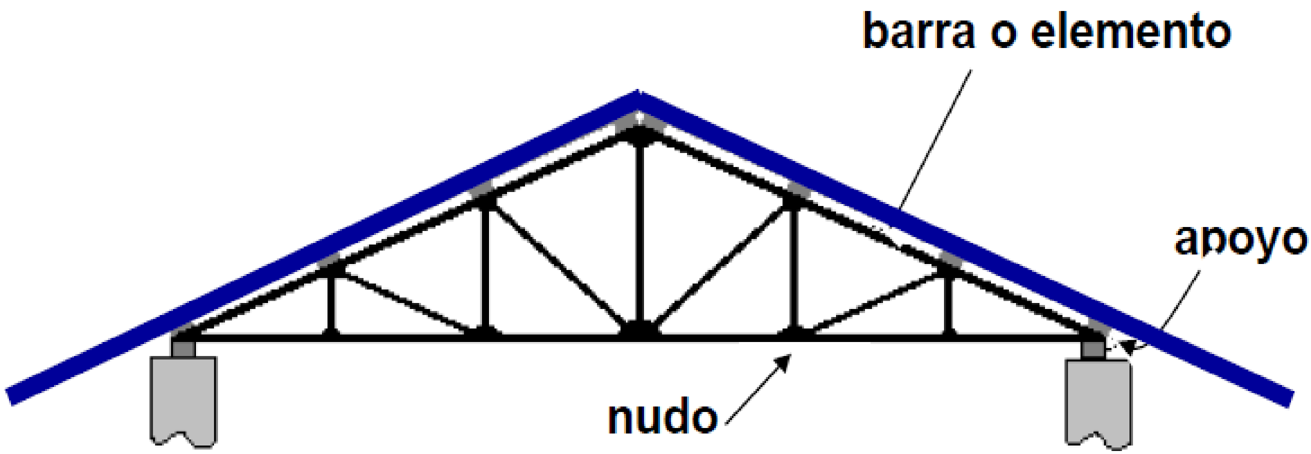
Tema 4: Estructuras articuladas planas
Definiciones y conceptos

Cuando necesitemos salvar luces importantes (> 10 ó 15 m), o necesitamos vigas de gran canto, puede resultar más económico utilizar estructuras articuladas en celosía que vigas de alma llena

Terminología estructural de las estructuras articuladas

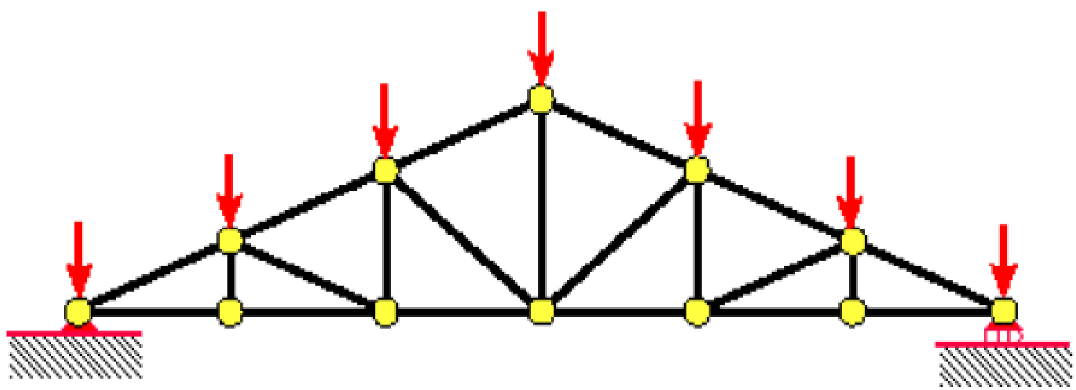




Sistema físico

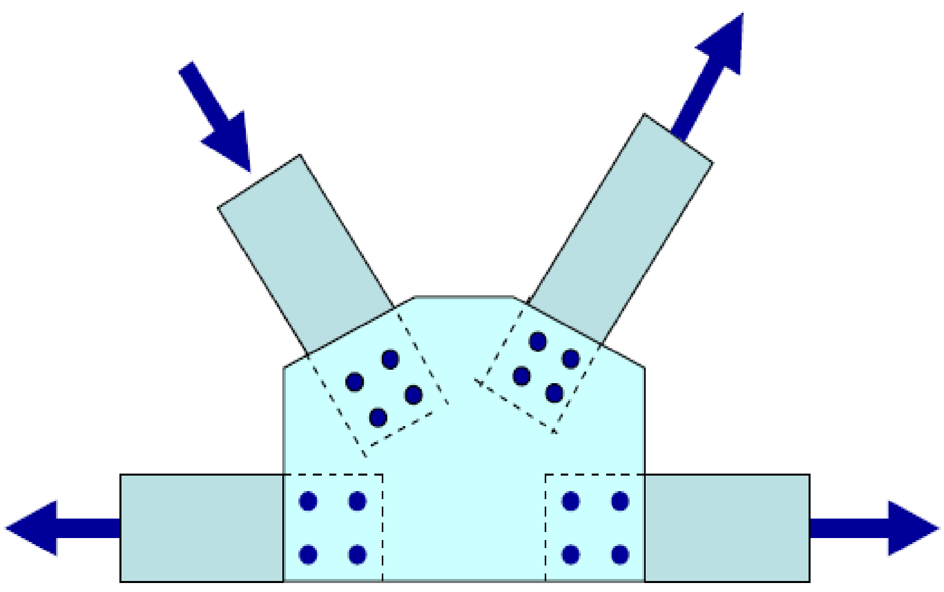
IDEALIZACIÓN

Sistema estructural



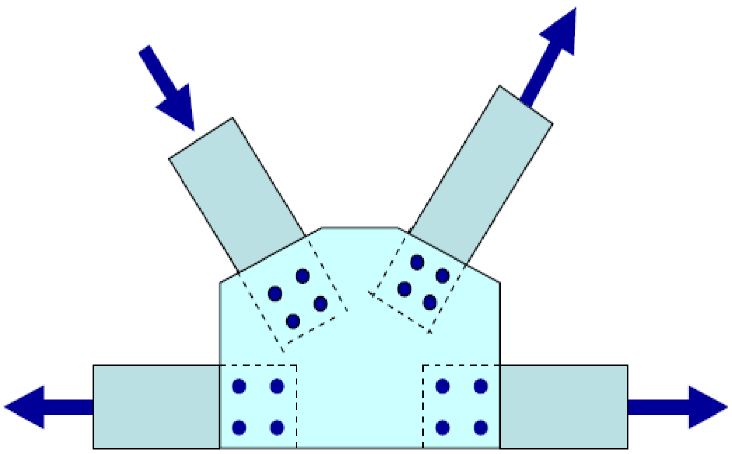
Hipótesis de diseño

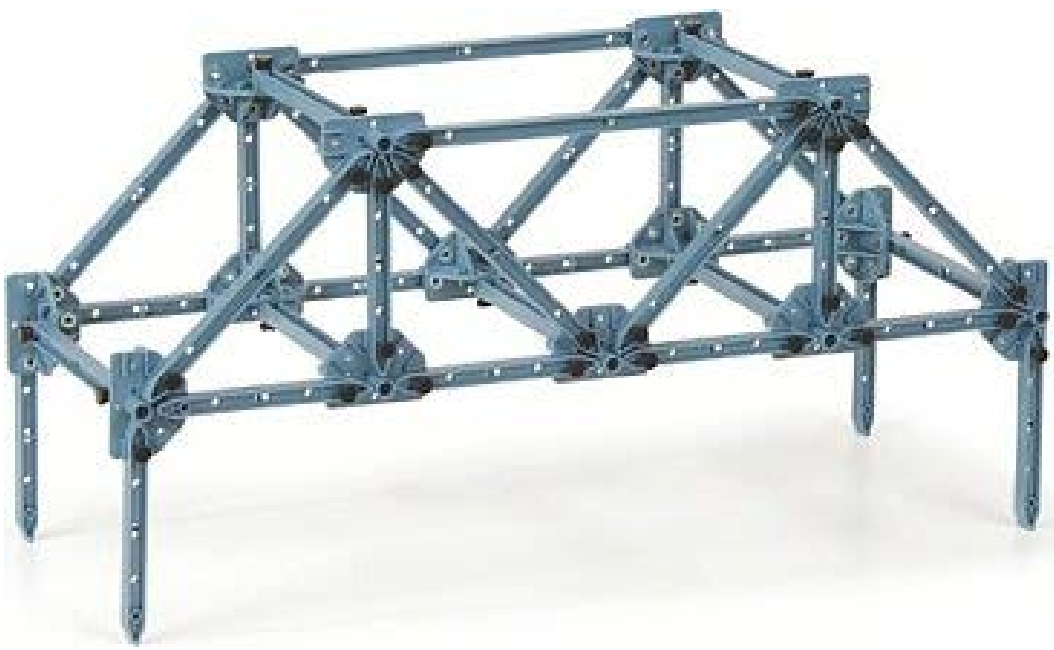
- **Las barras se unen unas a otras mediante uniones flexibles**
  - Los ejes de las barras son concurrentes en un punto
  - En la realidad, esta unión proporciona alguna rigidez (tensiones secundarias)



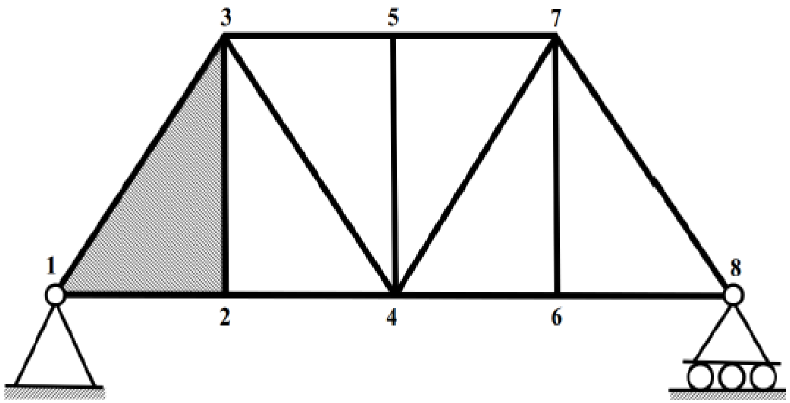
Hipótesis de diseño

- **Las barras se unen unas a otras mediante uniones flexibles**
  - Los ejes de las barras son concurrentes en un punto
  - En la realidad, esta unión proporciona alguna rigidez (tensiones secundarias)

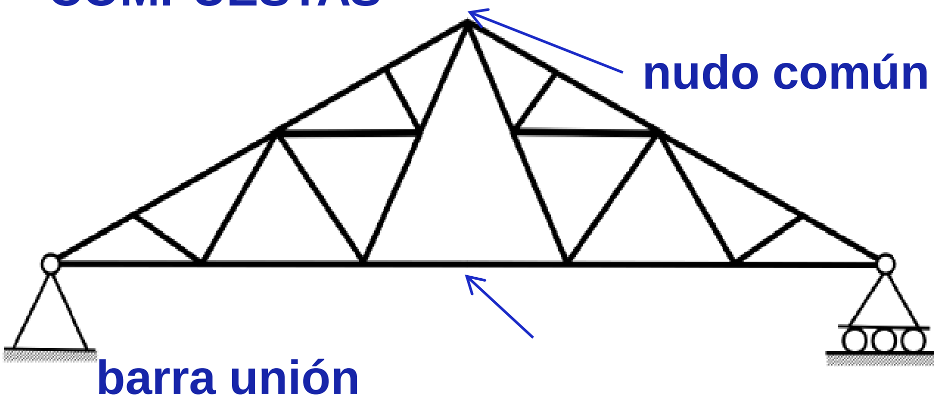




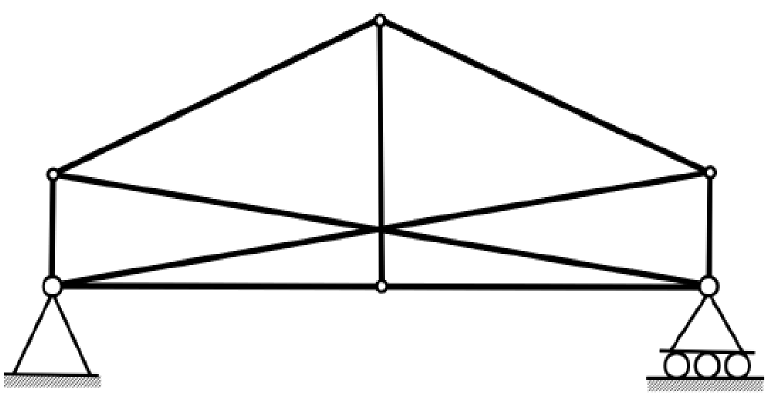
ESTRUCTURAS ARTICULADAS SIMPLES

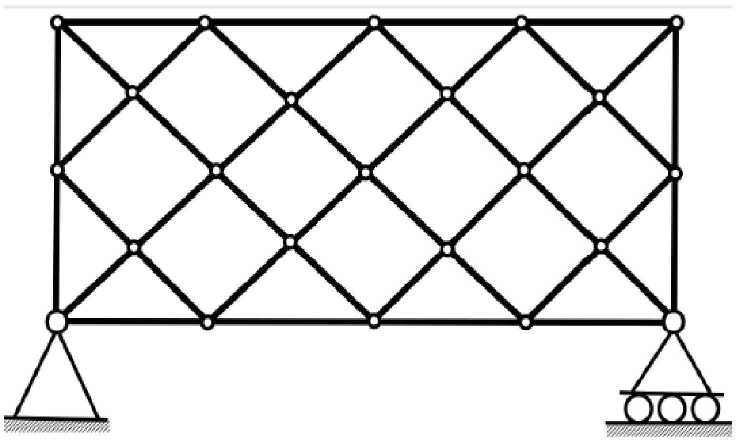


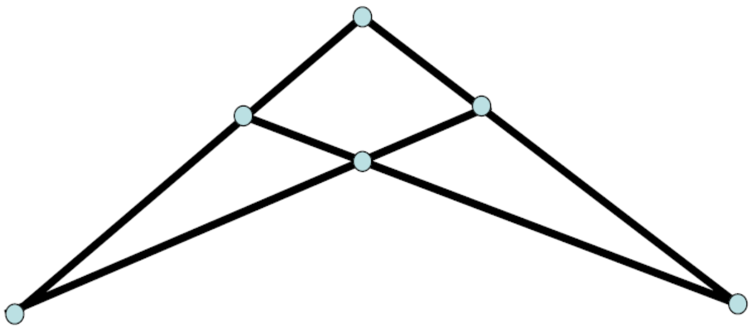
ESTRUCTURAS ARTICULADAS COMPUESTAS

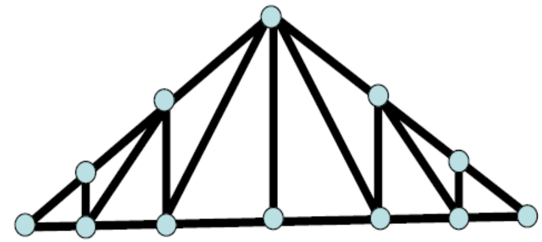


ESTRUCTURAS ARTICULADAS COMPLEJAS

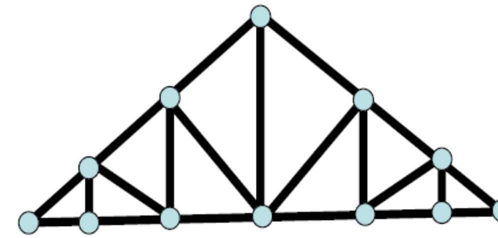








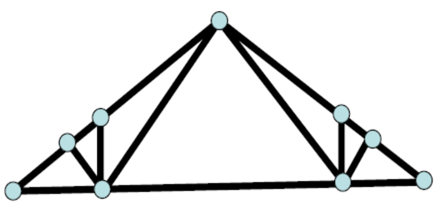
Howe



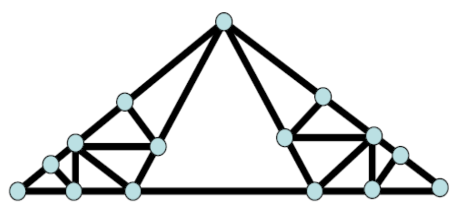
Pratt

Luces cortas (<20 m)
Plantas en las que se requiere espacio vertical

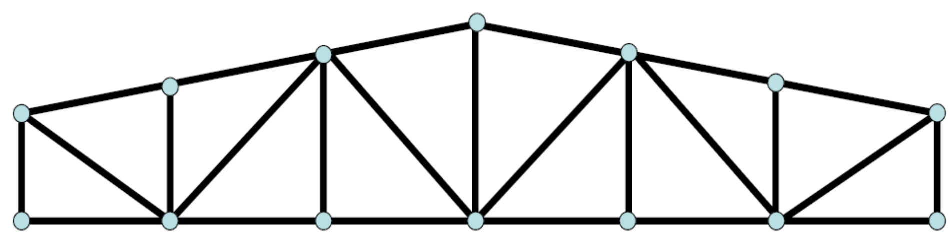
Luces moderadas (20-30 m)
Su diseño puede modificarse para conseguir techos planos



Fan



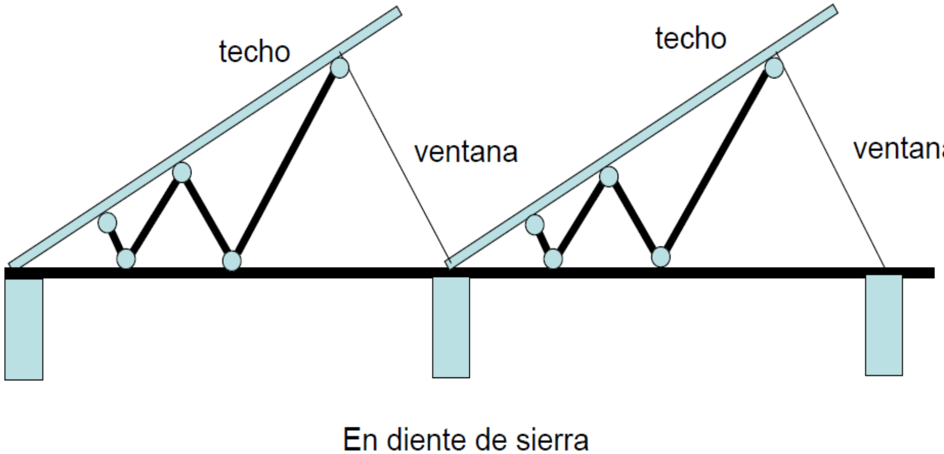
Fink



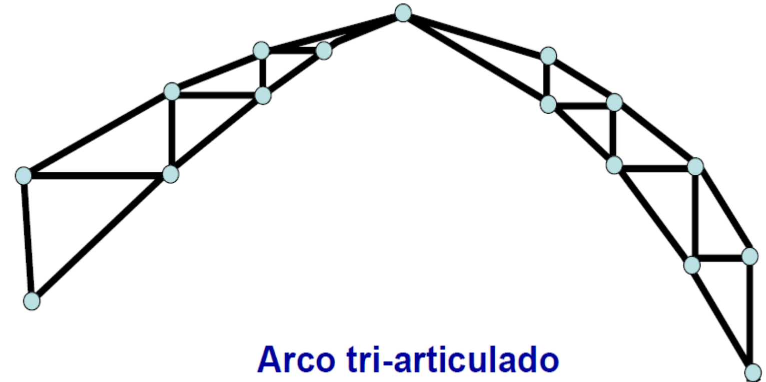
Warren

Luces grandes (>30 m)

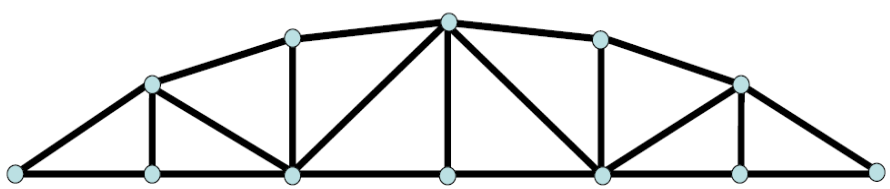
Aplicable cuando se desean cubiertas planas



Cuando la localización de pilares no es problema
Cuando se precisa iluminación natural



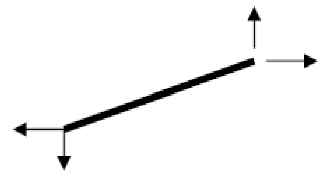
Alturas altas y luces grandes



Garajes y hangares aeronáuticos

Estructuras articuladas isostáticas o estrictamente completas

Son aquéllas en las que pueden determinarse los esfuerzos axiles en todas las barras utilizando, exclusivamente, las ecuaciones de la estática. Si denominamos b al número de barras de la Estructura, n al número de nudos de la misma y c al número de coacciones externas, podemos establecer:



Número de incógnitas por barra: 4

Número de incógnitas: $4b$ + Coacciones externas: c = $4b+c$

Número de ecuaciones que podemos plantear:

Equilibrio de una barra: 3 ($\Sigma H=0$, $\Sigma V=0$ y $\Sigma M=0$)

Equilibrio de un nudo: 2 ($\Sigma H=0$ y $\Sigma V=0$)

$3b+2n$

El problema es estáticamente determinado cuando:

$4b+c=3b+2n$

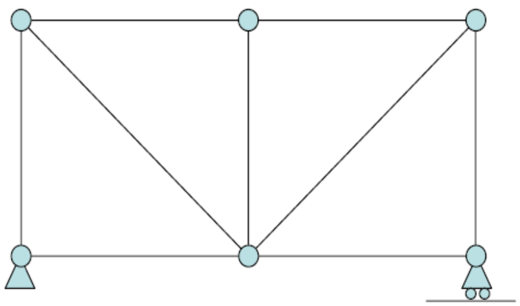
$$\boxed{b=2n-c}$$

GDH=b+c-2n

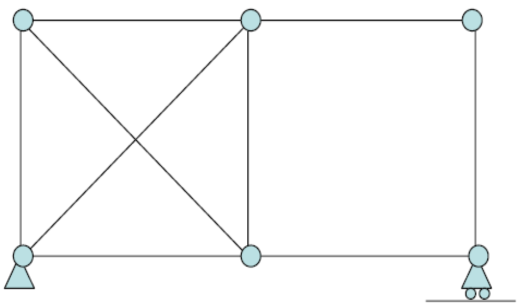
Sí GDH < 0 (Mecanismo)
Sí GDH = 0 (Isostática ?)
Sí GDH >0 (Hiperestática)

Estructuras articuladas isostáticas o estrictamente completas

$\boxed{b=2n-c}$ → **Condición necesaria, pero no suficiente**



b=9, n=6, c=3 ¡Se cumple la condición!



b=9, n=6, c=3
¡Se cumple también la condición pero no existe equilibrio, ante las posibles cargas

Métodos de análisis de estructuras articuladas isostáticas: esfuerzos

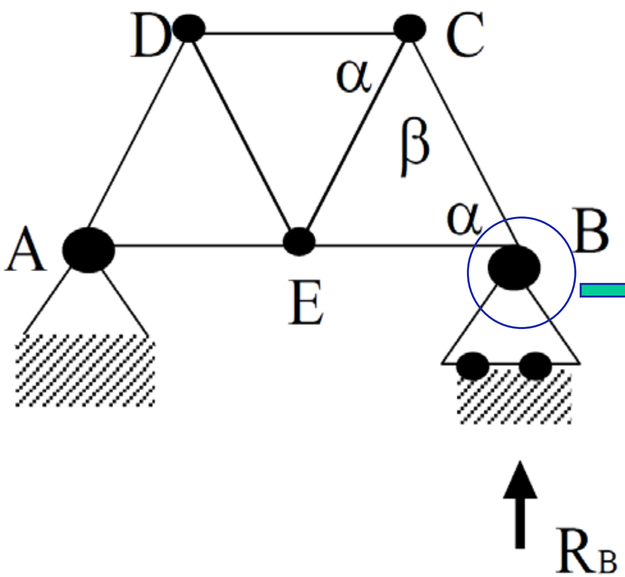
- Método de equilibrio de los **nudos**:
    - Método analítico
    - Método gráfico (Cremona)

- Método de equilibrio de las **secciones**

Métodos de análisis de estructuras articuladas isostáticas: esfuerzos

➢ Método de equilibrio de los nudos:

- **Método analítico**

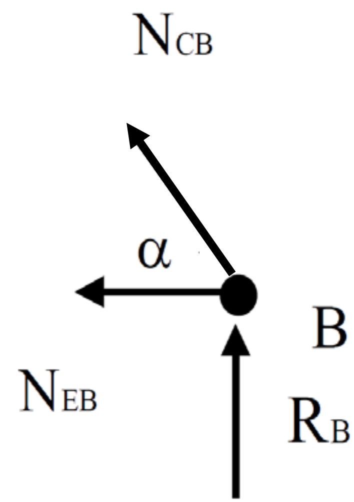


Nudo B:

reacción R_B

acción barra CB

acción barra EB



Métodos de análisis de estructuras articuladas isostáticas: esfuerzos

➢Método de equilibrio de los nudos:

- **Método analítico**

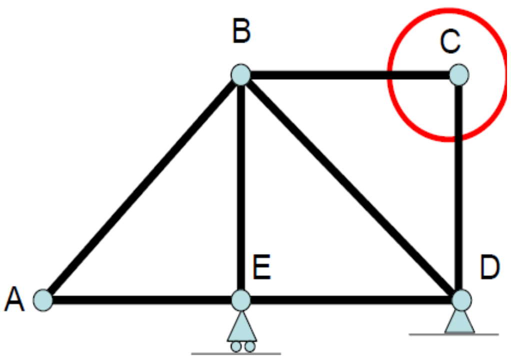
- Plantee las ecuaciones de equilibrio en cada nudo
- Tenga en cuenta las posibles simetrías
- Identifique las barras que no sufren ningún esfuerzo
  - (i) cuando sólo dos barras de diferentes direcciones coincidan en un nudo, y éste no está exteriormente cargado, ninguna de las dos barras sufre esfuerzo axil
  - (ii) Si tres barras coinciden en un nudo, y éste no está cargado, y dos de las barras tienen la misma dirección, la barra no colineal con las dos anteriores no sufre esfuerzo axil

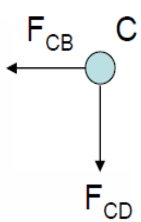
Métodos de análisis de estructuras articuladas isostáticas: esfuerzos

➢Método de equilibrio de los nudos:

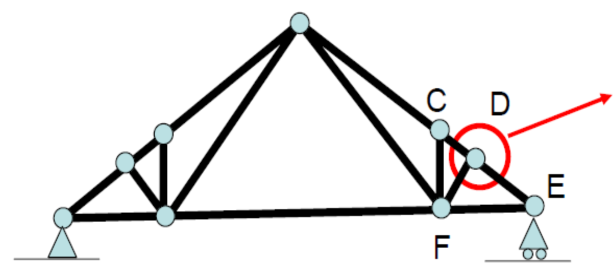
- **Método analítico**

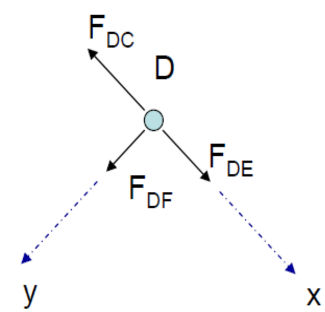
Dos barras coincidentes en un nudo no cargado (nudo C):





Tres barras coincidentes en un nudo no cargado (nudo D) siendo dos de ellas colineales:



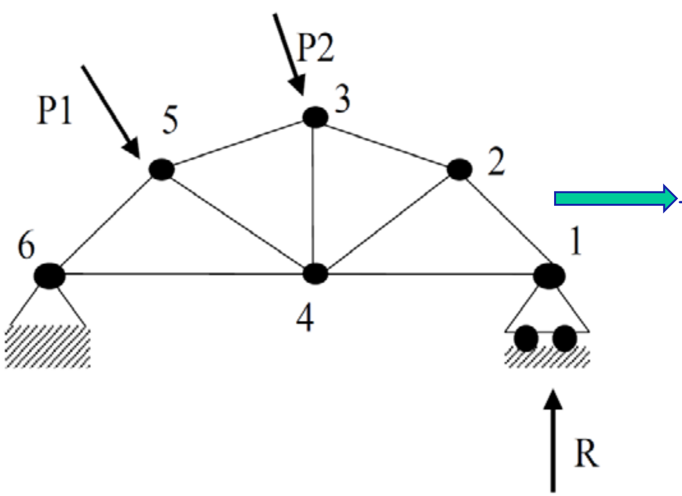


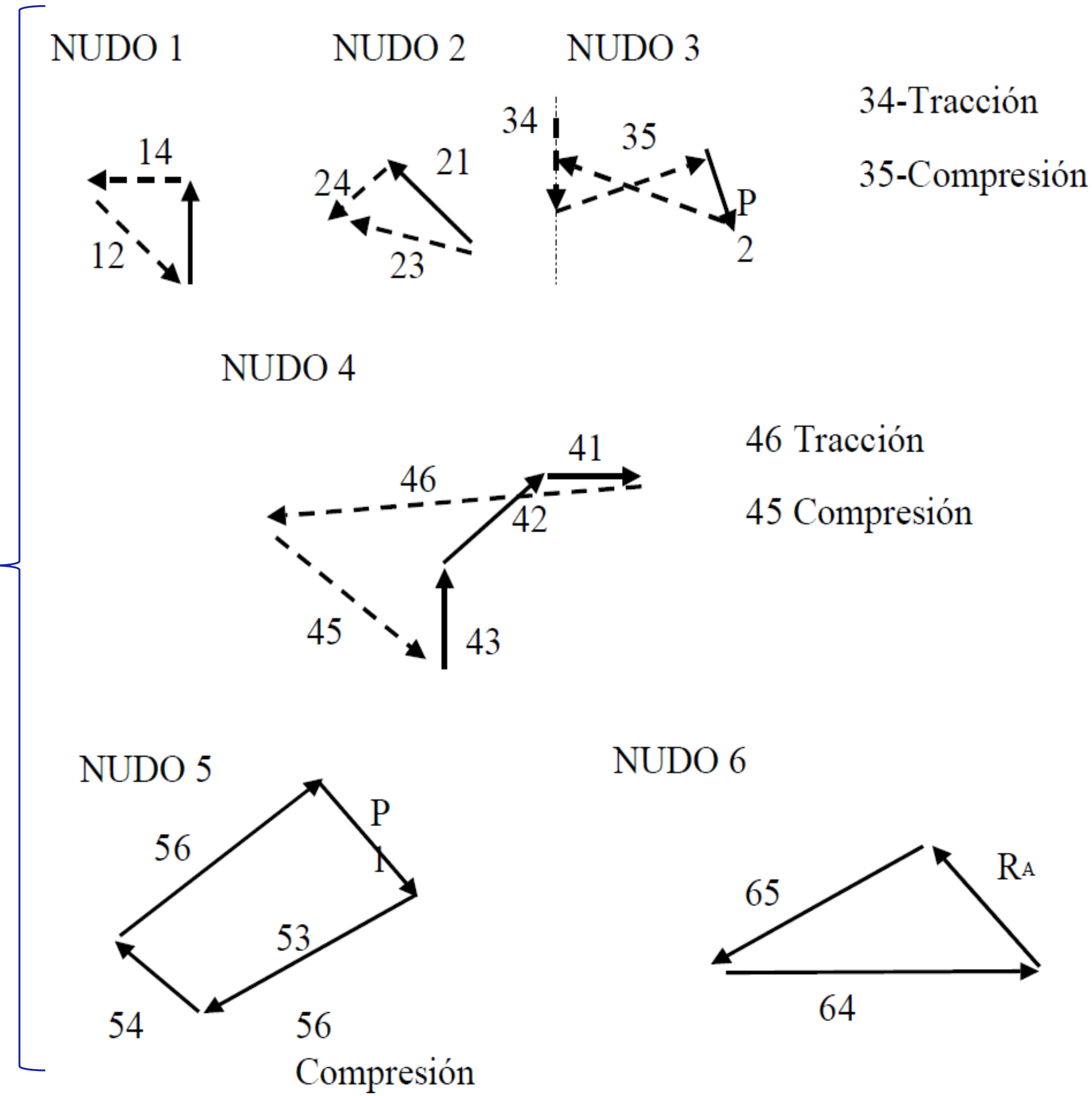
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{DC} \;\; y \;\; F_{DE} \quad \textit{iguales y contrarias}$$

$$\sum F_y = F_{DF} = 0$$

Métodos de análisis de estructuras articuladas isostáticas: esfuerzos

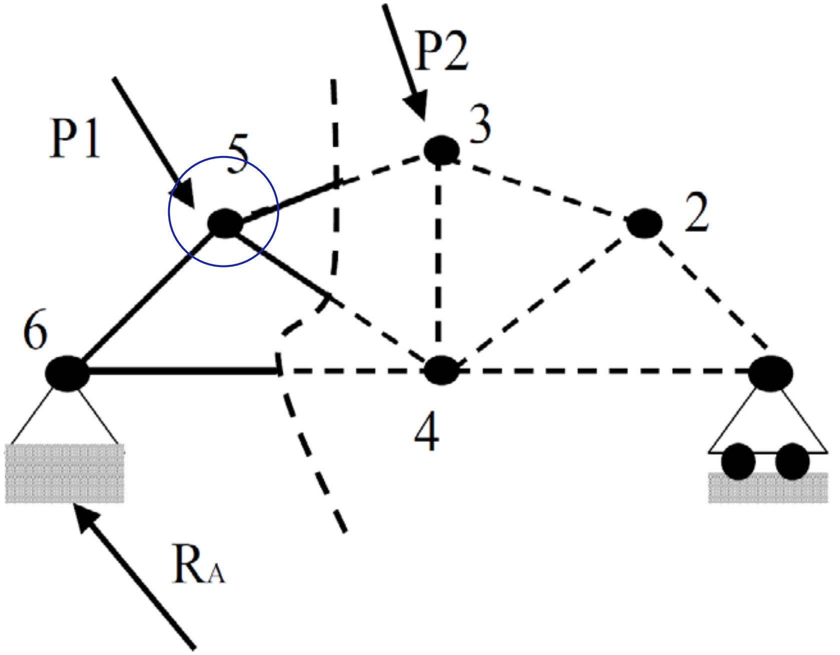
- Método de los nudos:
  - **Método gráfico (Cremona)**

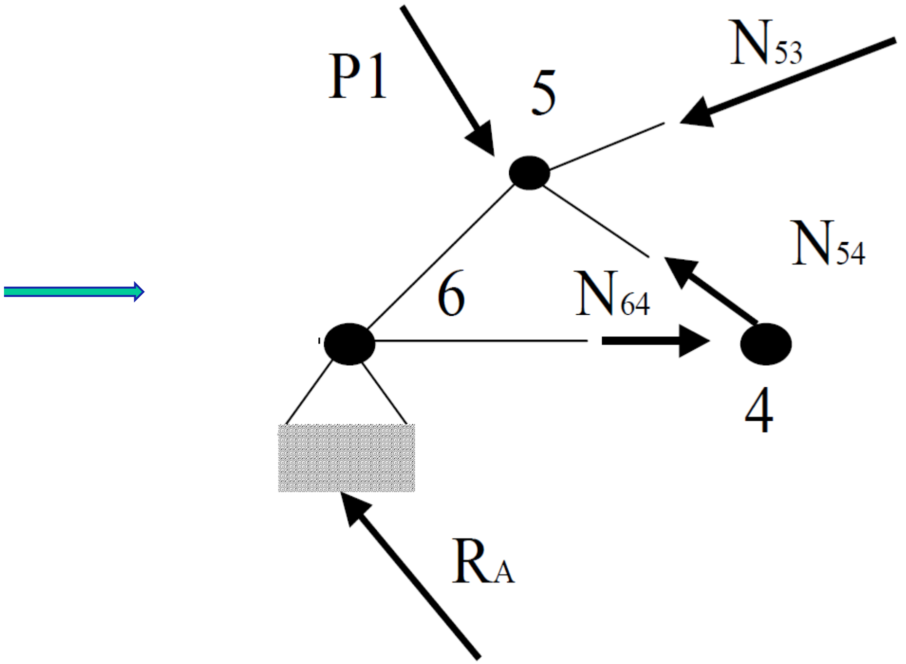




Métodos de análisis de estructuras articuladas isostáticas: esfuerzos

- ➢Método de equilibrio de las secciones

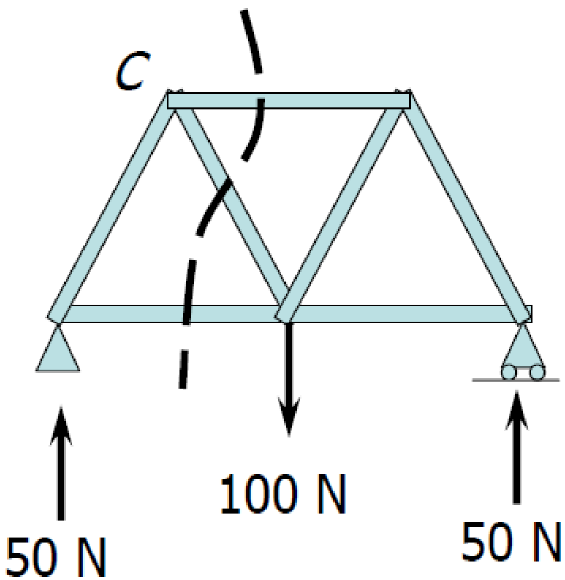


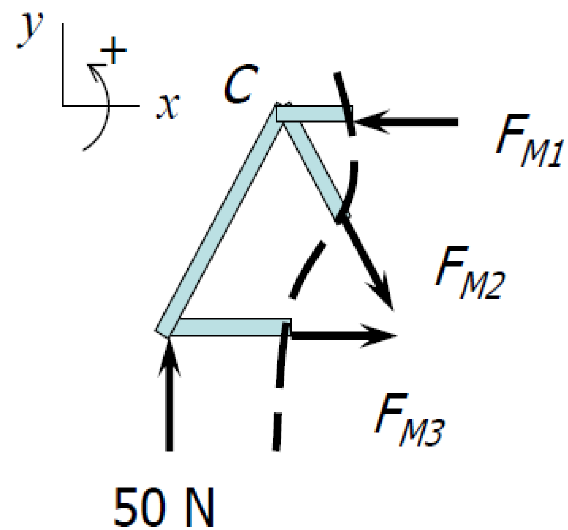


Métodos de análisis de estructuras articuladas isostáticas: esfuerzos

➢Método de equilibrio de las secciones:

Ejemplo





$$\sum F_y = 0; \quad 50 - F_{M2}\cos 30 = 0; \quad F_{M2} = 57{,}7 \text{ N}$$

$$\sum M_C = 0; \quad -50\tfrac{1}{2}a + F_{M3}\,0{,}866a = 0; \quad F_{M3} = 28{,}9 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0; \quad -F_{M1} + 57{,}7\cos 60 + 28{,}9 = 0; \quad F_{M1} = 57{,}7\,N$$

Métodos de análisis de estructuras articuladas isostáticas: desplazamientos

Para calcular desplazamientos en nudos de una estructura articulada, aplicaremos el Principio de los Trabajos Virtuales (fuerzas virtuales). Para ello, consideraremos como Sistema 0 el sistema estructural real, con sus cargas, del que partimos, y como Sistema I el mismo sistema estructural pero, ahora, sólo sometido a una carga virtual (unidad) en el nudo y dirección en que deseamos obtener el desplazamiento.

$$\sum F^{\delta}_i \, \delta_i + \sum R_i \, \Delta_i = \sum \int_A^B \left[N^0 N^I \frac{ds}{EA} + M^0 M^I \frac{ds}{EI} + T^0 T^I \frac{ds}{GA_C} + M_T^O M_T^1 \frac{GI_0}{GK} \right]$$

Fuerzas (momentos) virtuales -unitarios

Para **estructuras articuladas**, el único **esfuerzo** a considerar es el **axil**:

$$\sum F^{\delta}_i \, \delta_i + \sum R_i \, \Delta_i = \sum \int_A^B \left[N^0 N^I \frac{ds}{EA} \right]$$

Esfuerzo axil constante en toda la barra

$$\sum F^{\delta}_i \, \delta_i + \sum R_i \, \Delta_i = \sum N^0 N^I \int_A^B \left[\frac{ds}{EA} \right] = \sum N^0 N^I \frac{L_i}{EA_i}$$

Métodos de análisis de estructuras articuladas isostáticas: desplazamientos

Para **estructuras articuladas**, el único **esfuerzo** a considerar es el **axil**:

$$\sum F_i\, \delta_i + \sum R_i\, \Delta_i = \sum \int_A^B \left[N^0 N^I \frac{ds}{EA} \right]$$

Esfuerzo axil constante en toda la barra

$$\sum F_i\, \delta_i + \sum R_i\, \Delta_i = \sum N^0 N^I \int_A^B \left[\frac{ds}{EA} \right] = \sum N^0 N^I \frac{L_i}{EA_i}$$

Efectos térmicos y faltas de ajuste:

ΔT_i y ∂e_i

Métodos de análisis de estructuras articuladas isostáticas: desplazamientos

También pueden calcularse los desplazamientos utilizando el Teorema de Castigliano

$$U = \sum_{barras} \frac{1}{2} \frac{N_i^2 \cdot L_i}{E \cdot A_i} \longrightarrow \frac{\partial U}{\partial F_i} = d_i$$

Sin embargo, puede haber casos en los que, además de cargas mecánicas, algunas barras experimenten un cambio de temperatura o que, alguna de ellas, presente un error de fabricación (que haya quedado más corta o más larga que la longitud requerida).

En estas condiciones, la energía elástica del sistema estructural se expresa como:

$$U = \sum_{barras} \frac{1}{2} \frac{N_i^2 \cdot L_i}{E \cdot A_i} + \sum_{\substack{barras \\ con\ error}} N_i\, \partial_i^e + \sum_{\substack{barras \\ con\ \Delta T}} N_i\, \partial_i^{\Delta T}$$

∂_i^e = error de ejecución de la barra *i*

$\partial_i^{\Delta T}$ = cambio de longitud de la barra *i* debido a la variación de temperatura

$$\partial_i^{\Delta T} = \alpha\, L_i\, \Delta T_i$$

Métodos de análisis de estructuras articuladas isostáticas: desplazamientos

Sin embargo, puede haber casos en los que, además de cargas mecánicas, algunas barras experimenten un cambio de temperatura o que, alguna de ellas, presente un error de fabricación (que haya quedado más corta o más larga que la longitud requerida).

En estas condiciones, la energía elástica del sistema estructural se expresa como:

$$U = \sum_{barras} \frac{1}{2} \frac{N_i^2 \cdot L_i}{E \cdot A_i} + \sum_{\substack{barras \\ con\ error}} N_i\, \partial_i^e + \sum_{\substack{barras \\ con\ \Delta T}} N_i\, \partial_i^{\Delta T}$$

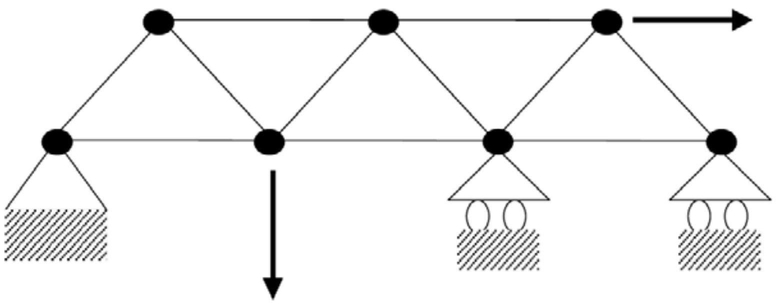
∂_i^e = error de ejecución de la barra *i*

$\partial_i^{\Delta T}$ = cambio de longitud de la barra *i* debido a la variación de temperatura

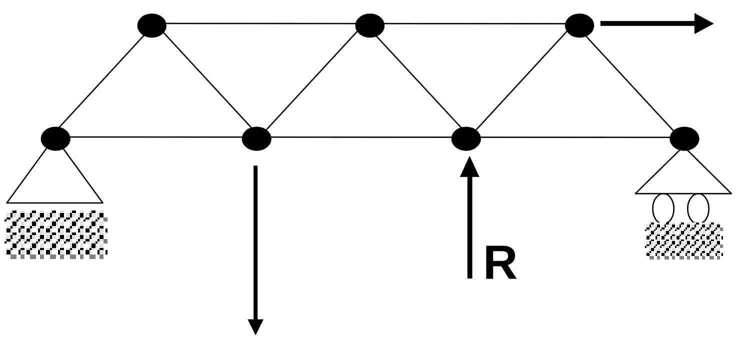
$$\partial_i^{\Delta T} = \alpha\ L_i\ \Delta T_i$$

Métodos de análisis de estructuras articuladas <u>hiperestáticas</u>

- Hiperestatismo externo: coacciones "de más"

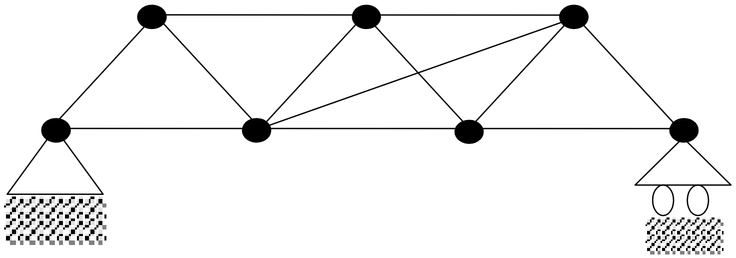


La condición a imponer es un movimiento vertical del punto de aplicación de R (el inicial apoyo) sea nulo. De esta condición se obtienen el valor de R pudiendo resolver la estructura como isostática.

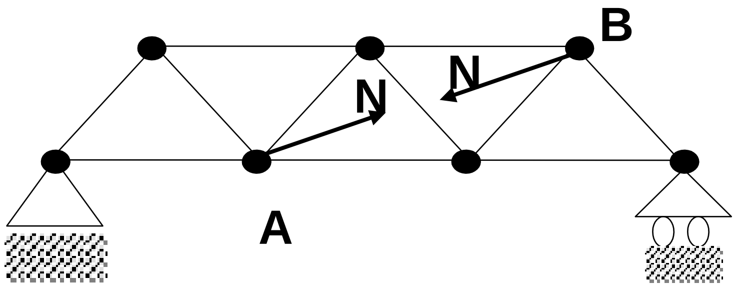


Métodos de análisis de estructuras articuladas hiperestáticas

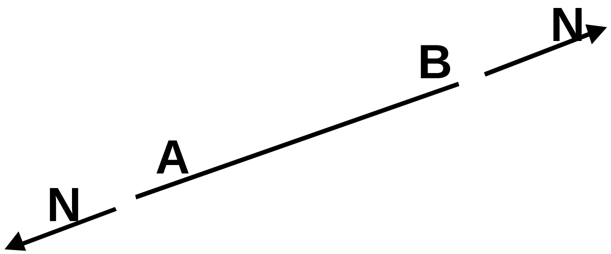
- Hiperestatismo **interno**: barras “de más”



Se elimina el hiperestatismo interno sustituyendo una barra por su efecto sobre la estructura, que es el de un par de fuerzas iguales y opuestas que actúan en los nodos A y B a los que la barra está unida.



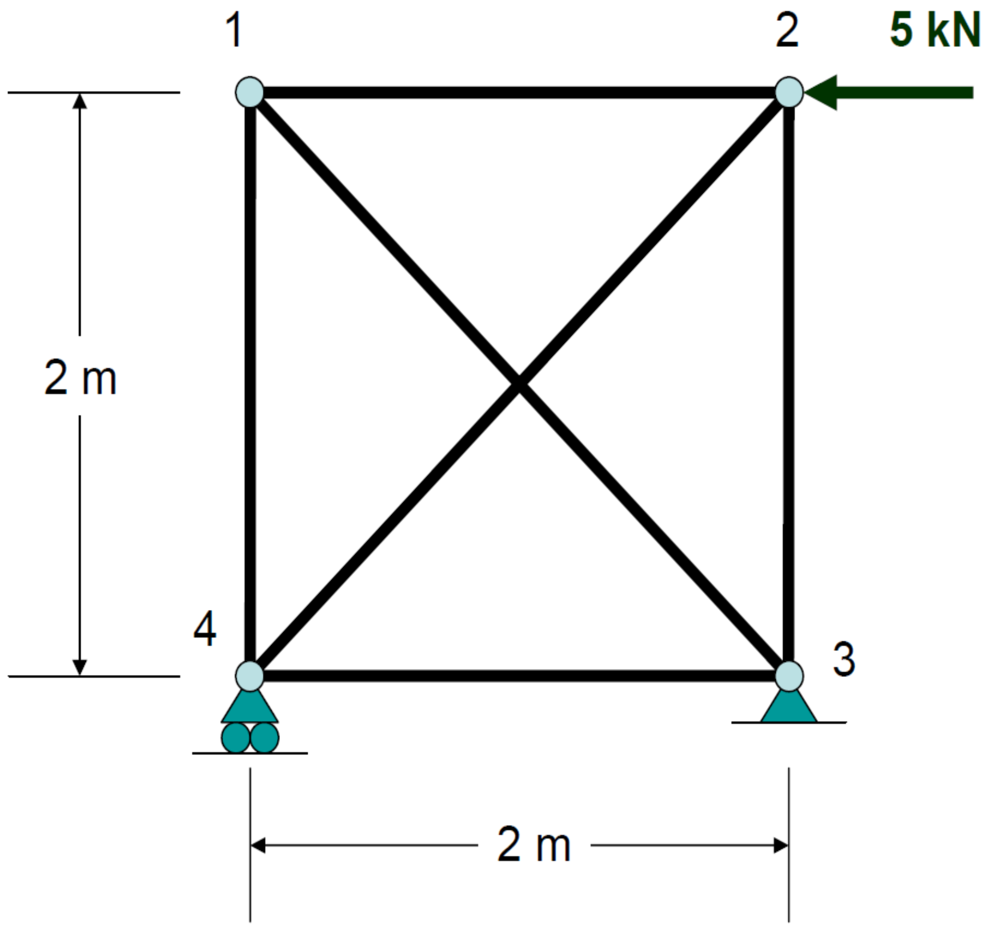
Estas fuerzas actuantes sobre los nodos A y B (acción de la barra contra el nudo) son iguales a las fuerzas actuantes en los extremos de la barra (acción del nudo contra la barra).



La condición evidente de compatibilidad a imponer es que el movimiento relativo entre los nodos A y B de la estructura (que se ha de calcular aplicando el Principio de los Trabajos Virtuales) coincida con el alargamiento de la barra obtenido aplicando la ley de Hooke.

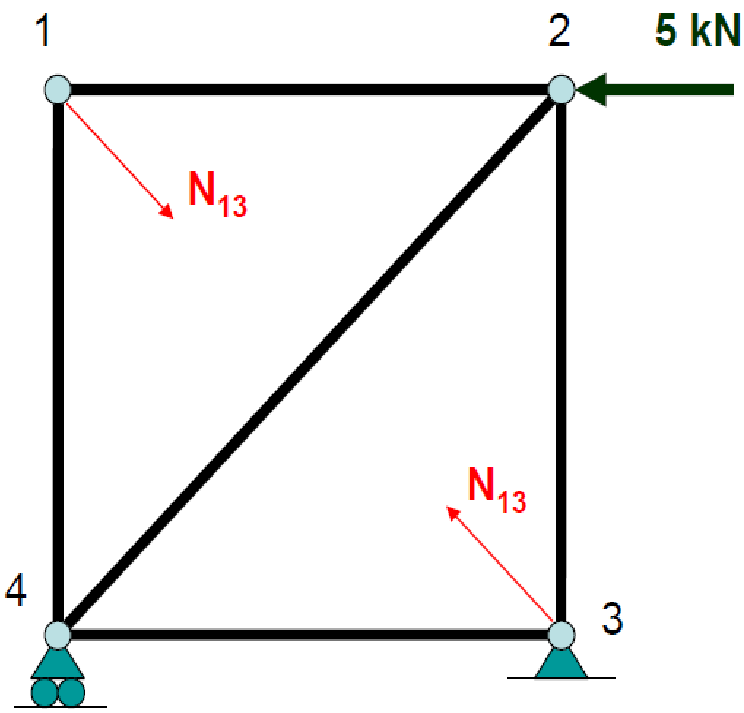
Métodos de análisis de estructuras articuladas hiperestáticas

Ejemplo

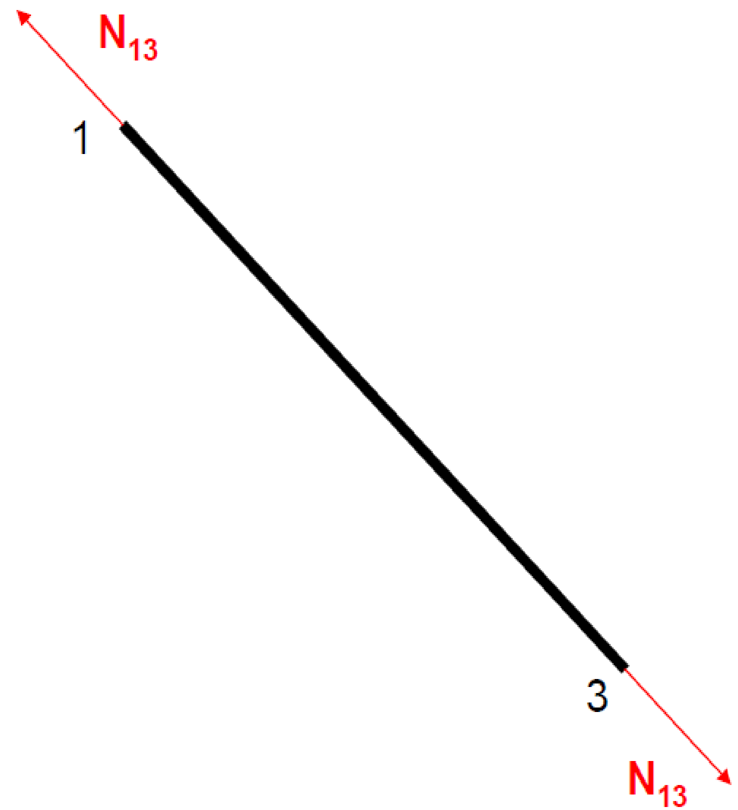


GDLE=3
CE=3
GHE=0
(estructura externamente isostática)

GDLI=3b_{total}-3=3.6-3=15
CI=2(b_{nudo} -1)=2(3-1).4=16
GHI=1
(estructura internamente hiperestática)



Sistema 0
(isostático)

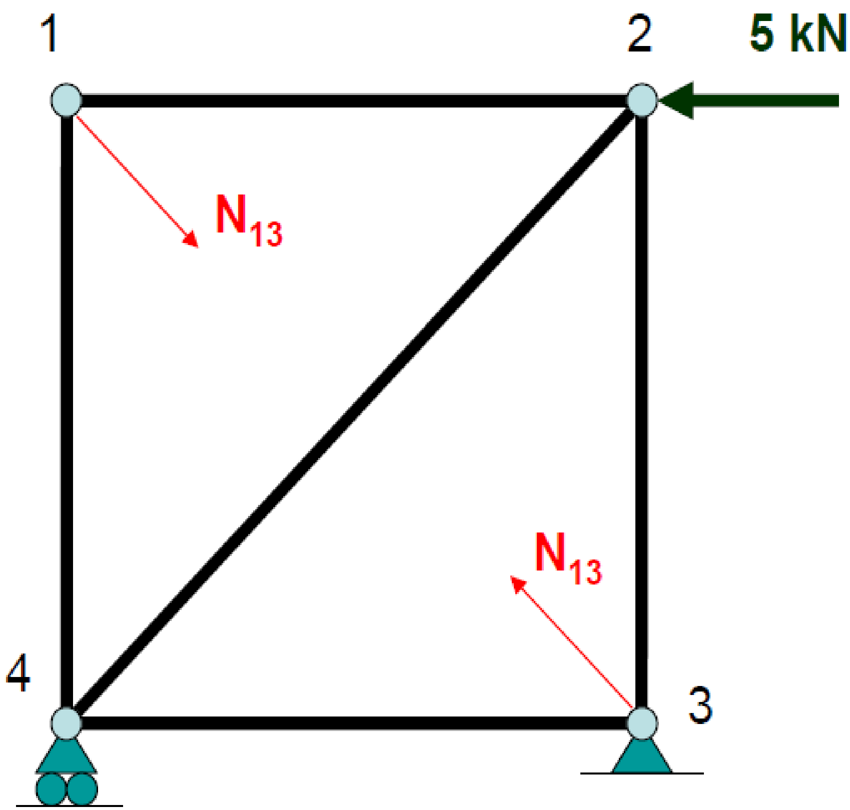


Sistema 2

Desplazamiento relativo entre los nudos 1 y 3 del sistema 0=
= Desplazamiento entre esos mismos nudos del sistema 2

(los desplazamientos mencionados deben entenderse medidos en la dirección 1-3)

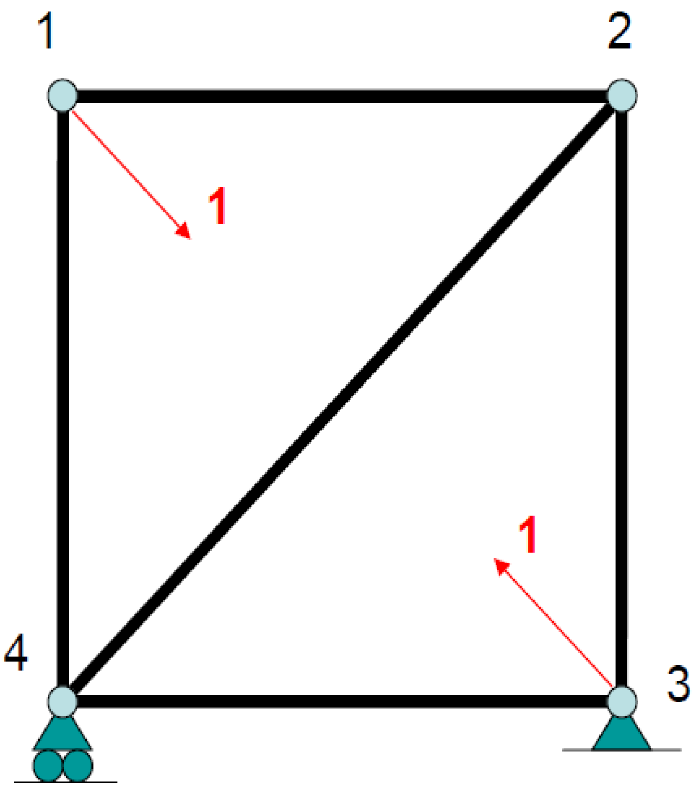
RESOLUCIÓN DEL SISTEMA 0



Barra	Axil
1-2	$-N_{13}/\sqrt{2}$
2-3	$5-N_{13}/\sqrt{2}$
3-4	$5-N_{13}/\sqrt{2}$
4-1	$-N_{13}/\sqrt{2}$
2-4	$-5\sqrt{2}+N_{13}$

Sistema 1
(isostático)

RESOLUCIÓN DEL SISTEMA 1 (Auxiliar para PTV)



Barra	Axil
1-2	$-1/\sqrt{2}$
2-3	$-1/\sqrt{2}$
3-4	$-1/\sqrt{2}$
4-1	$-1/\sqrt{2}$
2-4	1

Sistema 1
(isostático)

Estado 0

Barra	**Axil**
1-2	$-N_{13}/\sqrt{2}$
2-3	$5-N_{13}/\sqrt{2}$
3-4	$5-N_{13}/\sqrt{2}$
4-1	$-N_{13}/\sqrt{2}$
2-4	$-5\sqrt{2}+N_{13}$

Estado 1

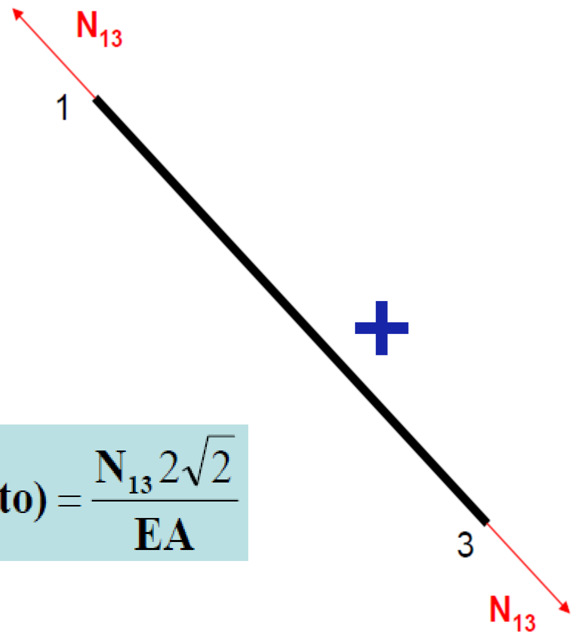
Barra	**Axil**
1-2	$-1/\sqrt{2}$
2-3	$-1/\sqrt{2}$
3-4	$-1/\sqrt{2}$
4-1	$-1/\sqrt{2}$
2-4	1

$$\Delta_{13}^{0}(\textbf{acercamiento}) = \frac{1}{EA}\sum_{barras} N_i^0 N_i^I L_i = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{EA}}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{N_{13}}{\sqrt{2}}\cdot 2\cdot 2+\left(5-\frac{N_{13}}{\sqrt{2}}\right)\cdot 2\cdot 2\right)+1\cdot(-5\sqrt{2}+N_{13})\cdot 2\sqrt{2}\right]$$

1

$$\boxed{\Delta_{13}^{0}(\textbf{acercamiento}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{EA}}[\mathbf{N}_{13}(4+2\sqrt{2})-10(2+\sqrt{2})]}$$

Por la ley de Hooke (Sistema 2)



$$\Delta_{13}^{0}(\text{acercamiento}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{EA}}[\mathbf{N}_{13}(4+2\sqrt{2}) - 10(2+\sqrt{2})]$$

$$\Delta_{13}^{2}(\text{alejamiento}) = \frac{\mathbf{N}_{13}2\sqrt{2}}{\mathbf{EA}}$$

$$\Delta_{13}^{0}(\text{acercamiento}) = -\Delta_{13}^{2}(\text{alejamiento})$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{EA}}[\mathbf{N}_{13}(4+2\sqrt{2}) - 10(2+\sqrt{2})] = -\frac{\mathbf{N}_{13}2\sqrt{2}}{\mathbf{EA}}$$

$N_{13}=3{,}53$ kN