Tema 4. Cantidad de movimiento.

Problemas resueltos.

Problema 1.- Un hombre de 80 kilos de peso, está de pie sobre la parte trasera de un trineo, de masa 400 kg y longitud 18 m. El conjunto se mueve sin rozamiento sobre un lago helado a una velocidad de 4 m/s. El hombre empieza a moverse sobre el trineo, hacia su parte delantera, a una velocidad de 2 m/s respecto al trineo. ¿Qué distancia habrá recorrido el trineo sobre el hielo antes de que el hombre llegue a la parte delantera del trineo?.

Solución:

Como el hombre se mueve con una velocidad de 2 m/s respecto al trineo, tardará 9 segundos en atravesarlo. Lo único que necesitamos saber es a qué velocidad se mueve el trineo sobre el hielo cuando el hombre se está moviendo.

Para ello basta darse cuenta que al no haber rozamiento ni ninguna otra fuerza exterior el impulso o cantidad de movimiento se tiene que conservar. Para un observador exterior, la cantidad de movimiento antes de que el hombre se empiece a mover es:

$$U_t(M_t + M_h)$$

mientras que después de que haya empezado a moverse es:

$$MtV_t + M_h(V_h + V_t)$$

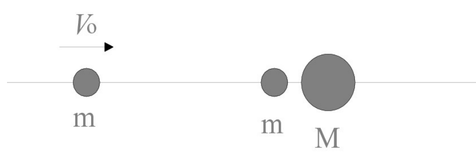
Despejando V_t se obtiene:

$$V_t = \frac{(M_t + M_h)U_t - M_hV_h}{M_t + M_h}$$

Sustituyendo los valores del enunciado se obtiene $V_t = 3ms^{-1}$. Por lo tanto, el espacio recorrido por el trineo hasta que el hombre llega a su parte delantera será de 27 m.

Problema 2.- Las dos masas de la derecha de la figura, están inicialmente en reposo y un poco separadas; la masa de la izquierda incide con velocidad V_0. Suponiendo que las colisiones sean frontales, demostrar que si M es menor o igual que m hay dos colisiones, mientras que si M es mayor que m hay tres colisiones. Encontrar las velocidades finales.

Solución:



La primera colisión de la partícula incidente con la partícula de masa m que está en reposo se puede analizar directamente imponiendo que la cantidad de movimiento y la energía mecánica se conserven, puesto que los choques son elásticos (hágalo el estudiante).

El resultado es que toda la cantidad de movimiento se transfiere a la partícula inicialmente en reposo, y la partícula incidente queda en reposo. Por lo tanto el siguiente choque será el de la partícula ahora en movimiento con velocidad V_0 contra la partícula de masa M. Aplicando otra vez conservación de la cantidad de movimiento y teniendo en cuenta que todo el movimiento se da en una sola dimensión, la ecuación correspondiente a la conservación del momento lineal es;

$$mV_0 = mV_1 + MV_2$$

Aplicando conservación de la energía cinética tenemos otra ecuación para V_1 y V_2:

$$\frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{1}{2}mV_1^2 + \frac{1}{2}MV_2^2$$

Este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se puede resolver, por ejemplo, despejando V_2 en la primera ecuación y sustituyendo su valor en la segunda. De esta manera se llega a una ecuación de segundo grado para V_1. Una vez halladas sus dos raíces podemos hallar los valores correspondientes para V_2. Sin embargo, una de las soluciones es de signo negativo para V_2, que no es posible físicamente, con lo que esa solución se descarta. Después de estas operaciones los valores que se obtienen son:

$$V_1 = \frac{m-M}{m+M}V_0$$
$$V_2 = \frac{2m}{m+M}V_0$$

Por lo tanto, se pueden dar los siguientes casos:

- Si M = m, $V_1 = 0$, y no habrá más colisiones posteriores, luego hay dos colisiones en total.
- Si M es menor que m, V_1 es positiva, con lo que tampoco puede volver a chocar con la otra partícula de masa m. Por lo tanto, en total hay dos choques.
- Si M es mayor que m, V_1 es negativa, y se producirá un tercer choque entre las dos partículas de masa m.

Problema 3.- Una bola, con velocidad $V_0 = 10m/s$, choca elásticamente contra otras dos bolas idénticas. Estas dos bolas se encuentran juntas y en reposo, y sus centros están sobre una línea perpendicular a la trayectoria de la bola móvil (véase la figura, que es una vista desde arriba). Hallar las velocidades de las tres bolas después de la colisión.

Solución:

En el momento del impacto los centros de las tres partículas forman un triángulo equilátero; además, la partícula incidente golpea en la dirección perpendicular a la línea que une los centros de las otras dos. Por lo tanto, hay varias consecuencias de la geometría del problema:

- Las dos partículas de la derecha salen hacia arriba y abajo, respectivamente, formando ángulos de 30^o con la horizontal.
- Las componentes horizontales de sus velocidades son iguales, y las componentes verticales difieren únicamente en el signo.
- La partícula incidente tiene componente vertical de la velocidad igual a cero, tanto antes como después del choque.

Llamando V_1 y V_2 a los módulos de las velocidades de las partículas que salen hacia arriba y hacia abajo, respectivamente, y V_3 al de la velocidad de la partícula incidente después del choque, podemos escribir las expresiones de la conservación de la componente horizontal de la cantidad de movimiento, y la conservación de la energía cinética (omitimos las masas, dado que es la misma para todas las partículas):

$$V_0 = 2V_{1x} + V_3$$
$$V_0^2 = 2V_{1x}^2 + 2V_{1y}^2 + V_3^2$$

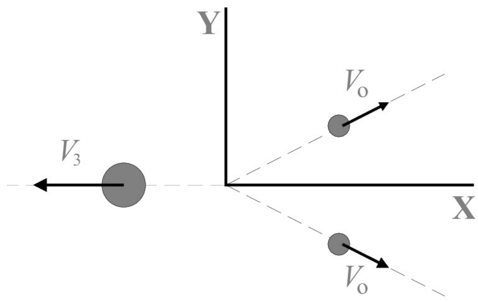
además, como sabemos el ángulo con el que salen las partículas de la derecha, sabemos que $V_{1y} = (\sqrt{3}/3)V_{1x}$, con lo que el sistema se puede resolver, obteniendo:

$$V_1 = \left(\frac{3}{5}, \frac{\sqrt{3}}{5}\right) V_0 \qquad V_2 = \left(\frac{3}{5}, \frac{-\sqrt{3}}{5}\right) V_0 \qquad V_3 = \left(\frac{-1}{5}, 0\right) V_0$$

Problema 4.- Un vaso en reposo explota sobre una mesa y se rompe en tres pedazos. Dos de ellos tienen igual masa y salen despedidos sobre la mesa con la misma velocidad de $30m/s$, formando entre sí un ángulo de $60°$. El tercero tiene una masa triple que la de los otros. Hallar la magnitud y dirección de su velocidad. (Nota: considérese que la mesa no tiene rozamiento)

Solución:

Como no hay fuerzas exteriores se conserva la cantidad de movimiento. Para estudiar dicha conservación elegimos el sistema de referencia en el que el vaso está inicialmente en reposo y con el eje X en la dirección de la bisectriz del ángulo de 60^o. En dicho sistema las ecuaciones correspondientes a la conservación de las componentes horizontal y vertical de la cantidad de movimiento son, respectivamente:



$$p_x = 0 = m_1V_{1x}+m_2V_{2x}+m_3V_{3x} = mV_o cos\alpha + mV_o cos\alpha + 3mV_{3x}$$

$$p_y = 0 = m_1V_{1y}+m_2V_{2y}+m_3V_{3y} = mV_o sen\alpha - mV_o sen\alpha + 3mV_{3y}$$

De las ecuaciones anteriores se deduce que $V_{3y} = 0$ y que $V_{3x} = \frac{2}{3}V_o cos\alpha = 10\sqrt{3}m/s$.

Problema 5.- Una bola de masa m cae verticalmente desde una cierta altura sobre un plano inclinado (con ángulo α). El choque de la bola con el plano es elástico y la cantidad de movimiento comunicada al plano es p. Se pide:

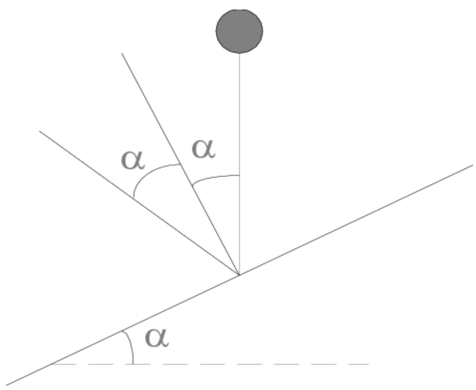
a) ¿desde qué altura se dejó caer la bola?

b) calcular el tiempo transcurrido desde el choque con el plano hasta que la bola alcance el punto más alto de su trayectoria;

c) Si $m = 100g$, $\alpha = 30^o$ y $p = 1,73$ N · s, hallar los valores numéricos de las variables que se han pedido en los apartados anteriores.

Solución:

a) $p = mv_y$, y $v_y = \frac{p}{m} = \sqrt{2gh}$; por lo tanto $h = \frac{p^2}{2gm^2} = 15,27m$.



b) Por conservación del momento la bola, al rebotar, sale con la misma velocidad, y ángulo 2α con la vertical.

$$v_y = v_{o_y} - at = \frac{p}{m}\cos 2\alpha - gt$$

En el punto más alto $v_y = 0$ y

$$t = \frac{p}{mg}\cos 2\alpha = 0,88s$$

c) Los resultados numéricos son los obtenidos en los apartados a) y b).

Problema 6.- Una masa de 2 Kg que se mueve con velocidad de $7m/s$ choca y se queda pegada con otra masa de 6 Kg que está inicialmente en reposo. La masa combinada choca y se queda pegada a otra masa de 2 Kg, también inicialmente en reposo. Si las colisiones son frontales, hallar:

a) la velocidad final del sistema,

b) la energía total perdida en los choques.

Solución:

a) Los dos choques que se mencionan en el enunciado son choques inelásticos y por lo tanto en ambos se conserva el momento lineal pero no la energía. Por lo tanto los dos se resuelven de la misma manera aplicando la conservación de la cantidad de movimiento. Para el primer choque:

$$m_1v_1 = (m_1+m_2)v_2; \quad v_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}v_1 = \frac{7}{4}m/s$$

Para el segundo choque:

$$(m_1+m_2)v_2 = (m_1+m_2+m_3)v_3; \quad v_3 = \frac{m_1+m_2}{m_1+m_2+m_3}v_2 = \frac{7}{5}m/s$$

b) La energía perdida será la diferencia entre la energía cinética antes de cada choque y la energía cinética después de cada choque. Para el primer choque:

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_2^2 = \frac{147}{4} julios$$

Para el segundo choqe:

$$\Delta E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3) v_3^2 = \frac{49}{20} julios$$

Problema 7.- La masa total inicial de un cohete es 30.000 kg, de la cual el 80 % corresponde a combustible. El combustible se quema a razón de 200 kg/s y se expulsa gas con una velocidad relativa de 1,8 km/s. Determinar:

a) la fuerza de impulsión del cohete,

b) el tiempo transcurrido hasta la combustión total,

c) su velocidad final suponiendo que se mueve hacia arriba cerca de la superficie terrestre donde el campo gravitatorio g es constante.

Solución:

a) Como el combustible se quema a una razón de 200 kg/s la masa del cohete sufre una variación con el tiempo de forma que $m(t) = m_i - 200t$. Por lo tanto la fuerza de impulsión será igual a la variación de la cantidad de movimiento del cohete, es decir:

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = \frac{d\left[(m_i - 200t)(-v_g)\right]}{dt} = 200 v_g = 3,6 \times 10^5 \mathrm{N}$$

b) Como solamente el 80 % de la masa del cohete corresponde a combustible, el tiempo transcurrido hasta la combustión total será $T = 120$ segundos.

c) Suponiendo que el campo gravitatorio es constante, la fuerza que se ejerce sobre el cohete es $F_{ext} = -mg$. Por lo tanto según la segunda ley de Newton $\Delta p = F_{ext}$, con lo que

$$v_g \frac{dm(t)}{dt} + m(t)\frac{dv}{dt} = -mg; \quad \text{o lo que es lo mismo} \quad \frac{dv}{dt} = -g - \frac{v_g}{m(t)}\frac{dm(t)}{dt}$$

Integrando ambos miembros de la ecuación entre 0 y T obtenemos

$$v = -gT - v_g ln\left(\frac{m_f}{m_i}\right) = 1{,}680\,\mathrm{ms}^{-1}$$

Problema 8.- El sistema de la figura está formado por dos bolas perfectamente elásticas, de masas M y 3M, colgadas mediante hilos de modo que pueden oscilar en el plano de la figura y que realizan impactos directos. Si las dos bolas se elevan inicialmente una misma altura h con respecto al punto más bajo de sus trayectorias posibles,

a) hallar las velocidades de ambas bolas después del primer choque,

b) hallar las velocidades de ambas bolas después del segundo choque.

c) Suponga ahora que en vez de alzar las dos bolas a una misma altura, se deja la de menor masa en su posición de equilibrio y se alza una altura h solamente la bola más pesada,

c) ¿cuáles serán las velocidades de ambas bolas después del primer choque?,

d) ¿y después del segundo?

Solución:

a) La velocidad de las dos bolas antes del choque se calcula por conservación de la energía. Para la bola más ligera se tiene

$$\frac{1}{2} M v_1^2 = Mgh \;\Rightarrow\; v_1 = \sqrt{2gh}$$

mientras que para la otra, la velocidad es la misma pero en dirección contraria, es decir $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$. Como el choque ocurre en la parte más baja de la trayectoria, se puede considerar que es en una dimensión (horizontal), por lo que, aplicando la conservación de la cantidad de movimiento y de la energía, calculamos las velocidades justo después del primer choque

$$\begin{aligned} Mv_1 - 3Mv_2 &= Mv_1' + 3Mv_2' \\ \frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}3Mv_2^2 &= \frac{1}{2}Mv_1'^2 + \frac{1}{2}3Mv_2'^2 \end{aligned}$$

que, usando el valor anterior para las velocidades iniciales, nos conduce a

$$\begin{aligned} v_1' + 3v_2' &= -2\sqrt{2gh} \\ v_1'^2 + 3v_2'^2 &= 8gh \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones encontramos las dos soluciones

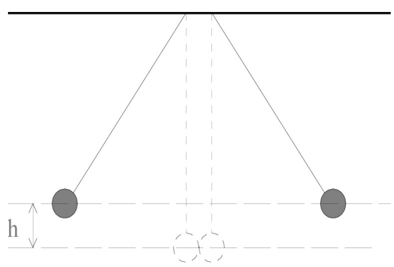
$$v_1' = \sqrt{2gh}; v_2' = -\sqrt{2gh}$$

y

$$v_1' = -2\sqrt{2gh}; v_2' = 0$$

La primera de ellas es absurda pues indica que no hay choque, así que la correcta es la segunda, que indica que la bola más pesada se queda parada, mientras que la más ligera sale rebotada con velocidad doble que la que llevaba antes del choque. Así pues la solución es

$$v_1' = -2\sqrt{2gh} \quad v_2' = 0$$



b) Para el segundo choque las velocidades iniciales son ahora $v_1 = 2\sqrt{2gh}$ y $v_2 = 0$, por lo que la conservación de la cantidad de movimiento y de la energía conduce a las ecuaciones (hemos multiplicado por 2 la ecuación para la energía)

$$\begin{aligned} Mv_1 &= Mv_1' + 3Mv_2' \\ Mv_1^2 &= Mv_1'^2 + 3Mv_2'^2 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, con el valor conocido de $v_1 = 2\sqrt{2gh}$, de nuevo se encuentran dos soluciones, de las cuales sólo una tiene sentido (pues la otra significa que no ha habido choque, lo que es absurdo). La solución con sentido físico es

$$v_1' = -\sqrt{2gh} \quad v_2' = \sqrt{2gh}$$

que indica que se van a repetir las condiciones previas al primer choque (el movimiento se repite cada dos choques).

c) El procedimiento es exactamente el mismo que para los dos apartados anteriores. Ahora las velocidades iniciales son $v_1 = 0$ y $v_2 = -\sqrt{2gh}$ (el signo $-$ indica que la bola se está moviendo hacia la izquierda en el momento del choque). Aplicando de nuevo la conservación de la cantidad de movimiento y de la energía, y resolviendo el sistema de ecuaciones, la solución con sentido físico es

$$v_1' = \frac{3}{2}v_2 = -\frac{3}{2}\sqrt{2gh} \quad v_2' = \frac{1}{2}v_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{2gh}$$

de forma que las dos bolas se mueven hacia la izquierda, y la más pesada reduce su velocidad a la mitad y le cede la mitad de su cantidad de movimiento a la más ligera.

d) Como el periodo de un péndulo simple no depende de la masa de la lenteja, las dos bolas volveran a chocar cuando vuelvan a encontrarse en la posición inferior, que es cuando ha pasado un semiperiodo, y llegan las dos con las velocidades calculadas en el apartado anterior, pero cambiadas de signo (la bola más ligera alcanza a la más pesada ya que lleva mayor velocidad), es decir, que las velocidades antes del choque son $v_1 = \frac{3}{2}\sqrt{2gh}$ y $v_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2gh}$. De nuevo las leyes de conservación conducen a la única solución con sentido físico que es

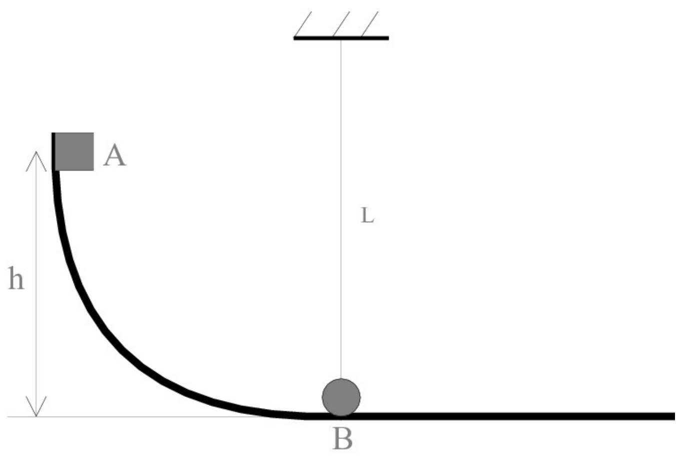
$$v_1' = 0 \qquad\qquad v_2' = \sqrt{2gh}$$

por lo que, de nuevo, se van a repetir las condiciones previas al primer choque (como ocurría en el apartado b).

Problema 9.- En el sistema de la figura el bloque A desliza sin rozamiento hasta chocar elásticamente con la bola B. Siendo, $m_A = 500g$, $m_B = 240g$, $h = 60$ cm, $\ell = 90$ cm, calcúlese:
a) la velocidad de B, inmediatamente después del choque;
b) la tensión máxima del hilo;
c) altura máxima que alcanza B.

Solución:

a) Calculamos la velocidad de A en el momento del choque, usando la conservación de la energía:



$$m_A gh = \frac{1}{2} m_A v_A^2; \qquad v_A = \sqrt{2gh}.$$

Para calcular la velocidad de B después del choque elástico aplicamos los principios de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía cinética:

$$m_A v_A = m_A V_A + m_B V_B$$

$$m_A v_A^2 = m_A (V_A)^2 + m_B V_B^2$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas se obtiene[1]

$$V_A = v_A \left(1 - \frac{2m_B}{m_A + m_B}\right); \qquad V_B = \frac{2m_A v_A}{m_A + m_B} = 4,68 \text{ m s}^{-1}$$

b) Después del choque la tensión es

$$T = m_B g \cos\alpha + m_B \frac{v^2}{\ell}$$

v se calcula por conservación de la energía:

$$\frac{1}{2} m V_B^2 = \frac{1}{2} m v^2 + mgH$$

de donde

$$v^2 = V_B^2 - 2gH = V_B^2 - 2g\ell(1 - \cos\alpha)$$

Sustituyendo en la expresión de la tensión:

$$T = m_B \frac{V_B^2}{\ell} - 2m_B g + 3m_B g \cos\alpha$$

[1]Es más fácil hacerlo si se expresa la velocidad relativa de ambas partículas después del choque en función de la velocidad relativa antes del choque. Teniendo en cuenta que el choque es elástico, en este caso se cumple que $v_A = V_B - V_A$.

La tensión máxima se alcanzará cuando $\cos\alpha = 1$, es decir, cuando $\alpha = 0^o$, es decir

$$T_{\max} = m_B \frac{V_B^2}{\ell} + m_B g.$$

c) En el punto más alto alcanzado por B:

$$\frac{1}{2} m_B V_B^2 = m_B g h_B; \quad \text{es decir} \qquad h_B = \frac{V_B^2}{2g} = \left(\frac{2m_A}{m_A + m_B}\right)^2 h \simeq 1,10 \text{ m}$$

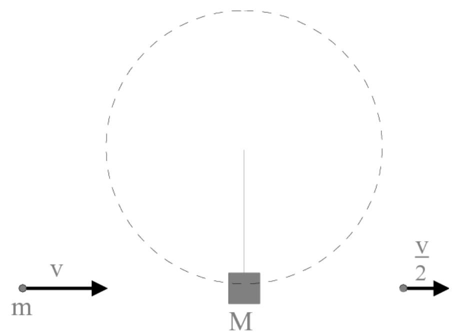
Problema 10.- En el sistema de la figura, una bala de masa m y velocidad v atraviesa la lenteja de un péndulo de masa M y sale con velocidad $v/2$. La longitud de la cuerda del péndulo es l. Se pide:

a) Calcular el valor mínimo que deberá tener v para que el péndulo pueda dar una vuelta completa.

b) Suponiendo que la velocidad de la bala es la obtenida en el apartado anterior, calcular la tensión de la cuerda en el punto más bajo, el intermedio y el más alto de la trayectoria de la lenteja del péndulo.

Solución:

a) En primer lugar calcularemos la velocidad con que se mueve la lenteja después del impacto. Por conservación de la cantidad de movimiento, tenemos que



$$mv = MV + m\frac{v}{2}$$

por lo que la velocidad de la lenteja V es $V = \frac{m}{2M}v$.

Por otro lado, sabemos que la energía total se tiene que conservar. Por tanto, si tomamos como origen de energía potencial la posición más baja de la lenteja, podemos escribir:

$$\frac{1}{2}MV^2 = Mg2l + \frac{1}{2}M(V')^2.$$

Además, la condición para que la lenteja pueda dar una vuelta es que en el punto más alto la tensión de la cuerda sea $T \geq 0$. Tomando como positiva la dirección hacia el centro del movimiento circular (dirección centrípeta), en el punto más alto tanto la tensión de la cuerda como el peso de la lenteja tienen la misma dirección, por lo que la segunda ley de Newton dice que

$$T + Mg = M\frac{(V')^2}{l}$$

La velocidad mínima que debe llevar la lenteja en ese punto será la que hace que la tensión de la cuerda sea también mínima, es decir, $T = 0$. Por lo tanto

$$M\frac{(V')^2}{l} = Mg \quad \Rightarrow \quad V' = \sqrt{gl}$$

Sustituyendo las expresiones de V y V' en la ecuación de la conservación de la energía y despejando v se obtiene:

$$v = 2\sqrt{5lg}\,\frac{M}{m}$$

b)

— En el punto más bajo la tensión de la cuerda y el peso tienen direcciones opuestas, por lo que tenemos

$$T - Mg = M\frac{V^2}{l} \quad \Rightarrow \quad T = Mg + M\frac{V^2}{l}$$

Cuando $v = 2\sqrt{5lg}\frac{M}{m}$, el valor de V es $V = \sqrt{5lg}$, y por lo tanto, $T = 6Mg$.
— Cuando la lenteja se halla en la posición intermedia el peso es perpendicular a la tensión. Por consiguiente, la tensión es la única fuerza en la dirección centrípeta y, por lo tanto, $T = M\frac{(V'')^2}{l}$.

Para calcular V'' utilizamos otra vez conservación de la energía:

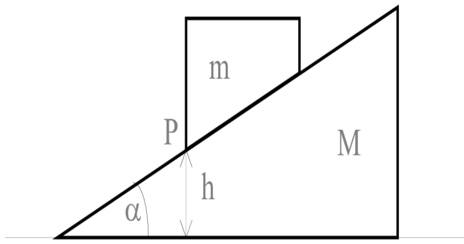
$$\frac{1}{2}MV^2 = Mgl + \frac{1}{2}M(V'')^2$$

de donde $(V'')^2 = 3lg$, y, por lo tanto, $T = 3Mg$.
— En el punto más alto ya hemos visto anteriormente que, cuando la velocidad de la lenteja es $V' = \sqrt{gl}$, la tensión de la cuerda es cero.

Problema 11.- Un bloque de masa m está colocado sobre una cuña de masa M que, a su vez, se apoya sobre una mesa horizontal como se muestra en la figura. Todas las superficies son lisas y sin fricción. Si el sistema parte del reposo estando el punto de partida del bloque a una altura h por encima de la mesa, hallar la velocidad de la cuña en el instante en que el punto P llega a la mesa.

Solución:

Para resolver el problema basta darse cuenta que la única fuerza exterior que actúa es la gravedad, que tiene dirección vertical, con lo que se conserva la cantidad de movimiento en la dirección horizontal. Por otra parte, esta fuerza exterior deriva de un potencial, con lo que se cumple el principio de conservación de la energía. Por tanto, podemos escribir la ecuación que representa la conservación de la energía,



$$2mgh = MV^2 + mv_h^2 + mv_v^2,$$

donde V es la velocidad final de la cuña de masa M, y v_h y v_v son las componentes horizontal y vertical, respectivamente de la velocidad del bloque de masa m en el momento en que el punto P llega al suelo. En ese momento, también podemos escribir la ecuación de conservación de la componente horizontal de la cantidad de movimiento, que es

$$mv_h + MV = 0$$

Tenemos, entonces, dos ecuaciones y tres incógnitas V, v_h y v_v; para resolver el sistema nos hace falta una ecuación más, que la obtenemos de imponer que en el sistema de referencia de la cuña, la velocidad del bloque $(v_h - V, v_v)$ es siempre tangente al plano inclinado, es decir

$$\frac{v_v}{v_h - V} = tg\alpha.$$

Despejando v_h en la segunda ecuación y sustituyéndola en la tercera tenemos

$$v_h = -\frac{M}{m}V; \qquad v_v = -(\frac{M+m}{m})V\tan\alpha$$

Sustituyendo estas dos expresiones en la primera ecuación nos queda una ecuación con V como única incógnita. Al despejar V nos queda

$$V^2 = \frac{2m^2gh}{(M+m)\left[M + (M+m)tg^2\alpha\right]} = \frac{2m^2gh}{(M+m)\left[M(1+tg^2\alpha) + mtg^2\alpha\right]}.$$

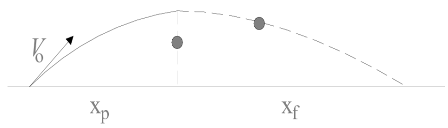
Multiplicando numerador y denominador por $cos^2\alpha$ y extrayendo la raíz cuadrada obtenemos la expresión final

$$V = \sqrt{\frac{2m^2ghcos^2\alpha}{(M+m)\left[M + msen^2\alpha\right]}}.$$

Problema 12.- Un proyectil se dispara a 45^o con la horizontal y con $500m/s$ de velocidad inicial. En el punto más alto de su trayectoria explota en dos fragmentos de igual masa, uno de los cuales cae verticalmente con velocidad inicial nula. Calcular a qué distancia del cañón cae el segundo fragmento al suelo.

Solución:

En el punto más alto de la trayectoria la velocidad del proyectil tiene las siguientes componentes:



$$V_x = V_o cos\alpha \qquad V_y = 0.$$

Al ser el proceso de fragmentación instantáneo, la cantidad de movimiento se conserva. Puesto que el proyectil inicial explota en el punto más alto de la trayectoria, la componente vertical de su velocidad es cero. Dado que el primer fragmento cae verticalmente, la componente vertical de su velocidad inicial después de la fragmentación es nula, mientras que el otro fragmento sigue moviéndose horizontalmente (la componente vertical de su velocidad es cero).

Indicando con subíndices 1 y 2 a los fragmentos que resultan de la explosión, la conservación de la componente horizontal del momento lineal es

$$mV_o cos\alpha = \frac{m}{2}V_{1x} + \frac{m}{2}V_{2x},$$

y dado que $V_{1x} = 0$ ya que cae verticalmente,

$$V_{2x} = 2V_o cos\alpha.$$

Esta componente se mantiene constante, ya que la única fuerza externa (la gravedad) es vertical.

Para obtener la distancia de caída solo nos hace falta utilizar las fórmulas correspondientes al movimiento del proyectil. Primero calculamos el tiempo que tardan en caer los fragmentos al suelo. Para ello, recordemos que la componente vertical de la velocidad del proyectil se rige por la ecuación:

$$V_y = V_o sen\alpha - gt,$$

por lo tanto el proyectil alcanza el punto más alto en un tiempo $t_0 = V_o sen\alpha/g$. Este tiempo de subida coincide con el tiempo de caída hasta el suelo de los dos fragmentos, ya que ambos caen con componente vertical de la velocidad inicialmente nula. Entonces, el espacio recorrido en la dirección horizontal será, durante la subida del proyectil

$$x_{proyectil} = (V_o cos\alpha)t_0,$$

y durante la caída del fragmento

$$x_{fragmento} = (2V_o cos\alpha)t_0.$$

Por lo tanto sustituyendo el valor de t, tendremos

$$X = x_{proyectil} + x_{fragmento} = \frac{3V_o^2}{g} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha.$$

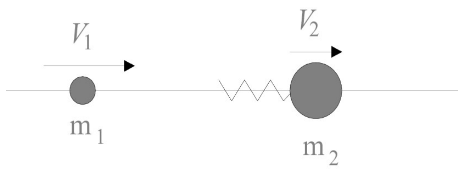
Problema 13.- Dos partículas con masas $m_1 = 2kg$, y $m_2 = 5kg$ se mueven sin rozamiento sobre un alambre horizontal, con velocidades $v_1 = 17m/s$, y $v_2 = 3m/s$, dirigidas en el mismo sentido y de forma que la partícula más ligera se acerca hacia la más pesada. La partícula pesada tiene en dirección hacia la ligera un resorte ideal sin masa de constante $k = 4{,}480N/m$. Calcule:

a) La compresión máxima del resorte al colisionar las dos partículas,

b) las velocidades finales de las dos partículas.

Solución:

a) Durante la compresión y posterior estiramiento del resorte) no se ejercen fuerzas exteriores al sistema, de forma que en todo el proceso se conservan tanto la cantidad de movimiento como la energía total del mismo. Al establecer las ecuaciones de conservación para el momento de máxima compresión del resorte basta darse cuenta que, en ese preciso instante, la velocidad de ambas partículas es idéntica, ya que su velocidad relativa es nula: por lo tanto podemos escribir:



$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)V$$

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = (m_1 + m_2)V^2 + kx^2$$

donde V representa la velocidad de ambas partículas en el momento de máxima compresión, x la compresión del muelle, y ya se han simplificado los factores 1/2 de las energías. Tenemos por lo tanto un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (V y x), cuya solución es

$$V = \frac{P}{m_1 + m_2} \qquad mx = \sqrt{\frac{1}{k}\left(2E - \frac{P^2}{m_1 + m_2}\right)},$$

donde P y E son, respectivamente, el momento total inicial y la energía total inicial, es decir:

$$P = m_1 v_1 + m_2 v_2 = 49\ Kg\, m\, s^{-1}$$

y

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = 311,5\ julios.$$

Sustituyendo los valores anteriores en las fórmulas respectivas se obtiene $V = 7ms^{-1}$, y $x = 0,25m$.

b) Escribiendo otra vez las ecuaciones de conservación para el proceso de estirado del muelle se tiene:

$$P = m_1 V_1 + m_2 V_2$$

$$2E = m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2$$

Despejando V_1 en la ecuación de arriba y sustituyendo en la de abajo tenemos

$$V_1 = \frac{P - m_2 V_2}{m_1}$$

$$V_2^2 - 14V_2 + 33 = 0$$

La ecuación en V_2 tiene dos soluciones posibles que son 11 y 3 ms^{-1}, que al sustituir en la ecuación para V_1 nos dan, respectivamente, -3 y 17 ms^{-1}. Puesto que V_1 debe ser negantiva, la única solución con sentido físico es $V_1 = -3\ m\, s^{-1}$, y $V_2 = 11\ m\, s^{-1}$.

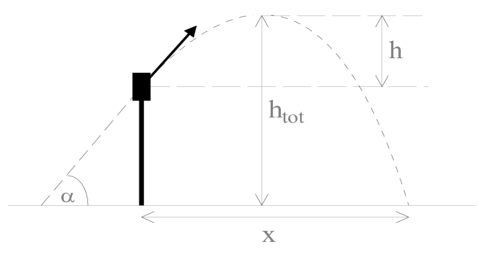
Problema 14.- En lo alto de un poste de 30 m de altura se encuentra un bote de masa $M = 500g$. Un muchacho situado a 20 m de la base del poste dispara contra el bote un proyectil de $m = 10g$, que realiza una trayectoria rectilínea y choca con el bote a una velocidad de 450 m/s. Suponiendo que el proyectil se incrusta en el bote,

a) ¿a qué altura por encima del poste se elevará el bote?,

b) ¿a qué distancia de la base del poste caerá el bote al suelo?, ¿cuánto tiempo tardará el bote en caer al suelo?

Solución:

a) Al incrustarse el proyectil en el bote, el choque es inelástico. Por tanto, se conserva la cantidad de movimiento pero no la energía. Por lo tanto, la velocidad del sistema proyectil más bote inmediatamente después del choque cumple:



$$mV = (m + M)v_o \quad \text{dedonde} \quad v_o = \frac{mV}{m + M} = 8,82ms^{-1}$$

A partir de entonces el movimiento es de tipo parabólico, ya
que sólo existe la aceleración de la gravedad. Por lo tanto, para
calcular a qué altura sube, basta con calcular a qué altura la componente vertical de la velocidad se anula, es decir:

$$v_y = v_o sen\alpha - gt = 0.$$

Obtenemos que $t = v_o sen\alpha/g$, y sustituyendo en la expresión para el espacio recorrido en la dirección vertical, nos da:

$$h = v_o sen\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{(v_o sen\alpha)^2}{2g} = 2,75\ m$$

b) El tiempo de subida se puede calcular directamente de la fórmula encontrada en el apartado anterior $t_s = v_o sen\alpha/g = 0,734\ s$. El tiempo de bajada se puede obtener a partir de:

$$h_{tot} = 30 + h = \frac{1}{2}gt_b^2; \quad t_b = \sqrt{2h_{tot}g} = 2,66s$$

Por lo tanto el tiempo pedido será $t_s + t_b = 3,39s$.

Finalmente, la distancia horizontal a la que caerá el bote se puede calcular sabiendo que en la horizontal no actúa ninguna aceleración, con lo cual:

$$x = v_o cos\alpha t = 16,6m$$

Problema 15.- Una bala de 10 g choca con un bloque de 990 g que está unido a un resorte. Por efecto del choque el resorte se comprime 10 cm. Sabemos que para comprimir el resorte 1 cm se necesitan 10^5 dinas. Se supone que antes del choque el resorte tiene su longitud natural, y que la bala queda incrustada en el bloque. Se pide:

a) energía potencial máxima almacenada en el resorte después del choque,

b) velocidad del bloque justamente después del choque con la bala,

c) velocidad inicial de la bala.

Solución:

a) Del enunciado se obtiene directamente la constante del resorte, que es $K = F/x = 10^5 \text{dinas} \cdot \text{cm}^{-1}$. Entonces tenemos:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = 5 \times 10^6 \text{erg}$$

b) Por conservación de la energía, la energía cinética después del choque será igual a la energía potencial después de la compresión, luego:

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2 = E_p$$

y, por tanto, $V = 10^2$ cm s^{-1}.

c) En el choque se conserva la cantidad de movimiento, luego $mv = (M+m)V$, despejando v se obtiene $v = 10^4$ cm s^{-1}.