Capítulo 4

Problemas de distribución

En este tema nos centraremos en el estudio de diversas tipologías de problemas de distribución. Distribución de objetos entre destinatarios que también podemos considerar de distribución de objetos en cajas. En el tema anterior ya se han abordado problemas de esta naturaleza y hemos visto cómo las combinaciones con repetición nos sirven para resolver problemas relativos a la distribución de objetos iguales entre destinatarios (cajas) diferentes tanto cuando no hay restricciones relativas al número de objetos por caja, que se corresponde con CR_n^k, como cuando en cada caja debe haber al menos un objeto, que se corresponde con C_{k-1}^{n-1} como vimos en el Teorema 3.8 del tema anterior. Cuando los objetos son diferentes y los destinatarios o cajas son diferentes hemos visto que las variaciones con repetición nos eran de utilidad para su resolución si no hay restricciones sobre el número de objetos en cada caja. Para el caso en que tales restricciones existan y también cuando los objetos son diferentes y los destinatarios son iguales o bien en el caso de que los objetos son iguales y los destinatarios también no tenemos, de momento, técnicas apropiadas para abordarlos. En este tema abordaremos las técnicas necesarias para la resolución de los problemas de distribución de objetos en cajas en cualquiera de los casos posibles y considerando también restricciones sobre el número de objetos en las cajas.

4.1. Aplicaciones entre conjuntos finitos. Objetos diferentes en cajas diferentes no vacías

4.1.1. Aplicaciones entre conjuntos finitos

Sean los conjuntos $X = \{1, \ldots, k\}$ e $Y = \{1, \ldots n\}$. Vamos a considerar las aplicaciones que podemos establecer entre X e Y, $f : X \to Y$. Todo elemento de X tiene que tener imagen, pero no todo elemento de Y tiene por qué tener original y, además, un mismo elemento de X no puede tener dos imágenes distintas. Por tanto,

$$f : X = \{1, \ldots, k\} \to Y = \{1, \ldots, n\}$$

es una k-lista (una lista con k posiciones o si se prefiere una k-upla) en la que en cada posición se sitúa un elemento de $Y = \{1, \ldots, n\}$; así, en la primera posición está la imagen de 1, $f(1)$, en la segunda estará $f(2)$ imagen del 2, etc. y desde luego cada $f(i) \in \{1, \ldots, n\}$. Como dos originales distintos pueden tener la misma imagen, los valores de $Y = \{1, \ldots, n\}$ pueden estar repetidos o no en la k-lista

$$(\overbrace{\_, \_, \_, \cdots, \_}^{k})$$

$$\uparrow$$

$$\in \{1, \ldots, n\}$$

Por tanto, en total podemos construir $n^k = VR_n^k$ aplicaciones entre $X = \{1, \ldots, k\}$ e $Y = \{1, \ldots n\}$.

Tiene sentido ahora preguntarse por el números de aplicaciones que sean inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

Aplicaciones inyectivas

Recordemos que cuando dos elementos distintos de X no pueden tener la misma imagen (es decir, cuando si $a \neq b$, entonces $f(a) \neq f(b)$) se dice que la aplicación es inyectiva. Nos interesa saber cuántas aplicaciones inyectivas hay entre $X = \{1, \ldots, k\}$ e $Y = \{1, \ldots n\}$.

Al ser la aplicación f inyectiva no es posible la repetición, luego cada aplicación es una k-lista donde no se repiten los elementos de Y. Caben dos casos, que $n \geq k$ o bien que $n < k$.

Si $n < k$, como en la k-lista debe haber en cada posición un elemento de Y, y $n < k$, necesariamente ha de repetirse algún elemento, entonces dos elementos distintos de X tendrían la misma imagen y f no sería inyectiva. Luego este caso no puede darse.

Por tanto, solo es posible que $n \geq k$. En esta situación, para la primera posición de la k-upla tendremos n posibilidades, para la segunda ya solo habrá $n-1$ posibilidades, para la tercera $n-2$ y así sucesivamente hasta la enésima posición para la que habrá $n-k+1$ posibilidades. En total tendremos $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ aplicaciones inyectivas posibles.

Aplicaciones biyectivas

Si ahora consideramos las aplicaciones biyectivas entre $X = \{1, \ldots, k\}$ e $Y = \{1, \ldots n\}$, estamos hablando de aplicaciones que son inyectivas (1 a 1) y tal que el número de elementos de Y es igual al de X, $n = k$. Por tanto, tendremos $V_k^k = P_k = k!$ aplicaciones biyectivas.

Aplicaciones sobreyectivas

Finalmente nos interesamos por el número de aplicaciones sobreyectivas que pueden definirse entre $X = \{1, \dots, k\}$ e $Y = \{1, \dots n\}$. Las aplicaciones sobreyectivas son aquellas que no dejan ningún elemento de Y sin original; es decir, todo elemento de Y ha de ser la imagen de algún elemento de X (o de más de uno).

Cuando una aplicación f deje sin original a algún elemento de Y diremos que esa aplicación se "salta" ese elemento de Y.

Teorema 4.1 *El número de aplicaciones sobreyectivas, $f : X \to Y$ entre dos conjuntos finitos con cardinales $|X| = k$ e $|Y| = n$ es*

$$n^k - C_n^1(n-1)^k + C_n^2(n-2)^k - C_n^3(n-3)^k + \dots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}(1)^k.$$

Demostración. Las aplicaciones sobreyectivas serán todas las aplicaciones menos las que no son sobreyectivas y su número será consecuentemente

$$n^k - |\{f : X \to Y / \ f \text{ no es sobreyectiva}\}|.$$

Ahora bien, las aplicaciones no sobreyectivas se saltan al menos algún elemento de Y: el 1 o el 2 o el 3, etc. Consideremos, los conjuntos:

$$\begin{array}{lcl} A_1 & = & \{\text{aplicaciones } f : X \to Y \text{ que se saltan el } 1\}, \\ A_2 & = & \{\text{aplicaciones } f : X \to Y \text{ que se saltan el } 2\}, \\ \vdots & \vdots & \qquad\qquad\qquad \vdots \\ A_n & = & \{\text{aplicaciones } f : X \to Y \text{ que se saltan el } n\}. \end{array}$$

De este modo, el número de aplicaciones sobreyectivas será

$$n^k - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|.$$

Para la determinación del cardinal $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n|$ usamos el Principio de inclusión-exclusión.

Una aplicación que esté en A_1 no toma el valor 1 como imagen; es decir, en la k-upla correspondiente, $(f(1), f(2), \dots, f(k))$, no está el 1, por lo tanto, cada coordenada de la k-upla puede tomar un máximo de $n-1$ valores. Concluimos que $|A_1| = (n-1)^k$. Este razonamiento es válido para el resto de conjuntos A_i; es decir, para cualquier $i \in \{1, \dots, n\}$ de modo que $|A_i| = (n-1)^k$ en cada caso. Naturalmente hay aplicaciones que están en $A_1 \cap A_2$ y, en general, existen aplicaciones que están en $A_i \cap A_j$, con $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Veamos el cardinal de estas intersecciones.

Lo vemos para A_1 y A_2. Si $f \in A_1 \cap A_2$ entonces no tomará como imagen ni el 1 ni el 2, luego $|A_1 \cap A_2| = (n-2)^k$. El razonamiento sigue siendo el mismo para cualesquiera dos conjuntos A_i y A_j considerados, con $i \neq j$; luego $|A_i \cap A_j| = (n-2)^k$ si $i \neq j$. Razonando del mismo modo, para las intersecciones de tres conjuntos tendremos $|A_i \cap A_j \cap A_q| = (n-3)^k$, si los tres conjuntos son distintos entre sí ($i \neq j, i \neq q, j \neq q$). Y así sucesivamente podemos seguir considerando las intersecciones de cuatro conjuntos, cinco, etc., hasta llegar a la intersección de todos, cuyo cardinal será $|A_1 \cap \ldots \cap A_n| = (n-n)^k$.

Ahora bien, ¿cuántos A_i hay?, pues $C_n^1 = \binom{n}{1}$, todos con cardinal $(n-1)^k$. ¿Cuántas intersecciones $A_i \cap A_j$?, pues $C_n^2 = \binom{n}{2}$, todas con cardinal $(n-2)^k$. ¿Cuántas intersecciones $A_i \cap A_j \cap A_q$?, pues $C_n^3 = \binom{n}{3}$, cada una con cardinal $(n-3)^k$. Y así sucesivamente, hasta llegar a C_n^{n-1} intersecciones de $n-1$ conjuntos A_i, cada uno con cardinal $(n-(n-1))^k$, pues para la intersección de todos los A_i se tendrá que su cardinal es $|A_1 \cap \ldots A_n| = 0$.

Por tanto, aplicando el principio de inclusión-exclusión se tiene que

$$\begin{aligned} |\{f : X \to Y / f \text{ es sobreyectiva}\}| &= n^k - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| \\ &= n^k - \left[C_n^1(n-1)^k - C_n^2(n-2)^k + \ldots \pm C_n^{n-1}(n-(n-1))^k\right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i C_n^i (n-i)^k. \end{aligned}$$

Consecuentemente, el número de aplicaciones sobreyectivas de manera extendida es

$$n^k - C_n^1(n-1)^k + C_n^2(n-2)^k - C_n^3(n-3)^k + \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}(1)^k.$$

□

4.1.2. Objetos diferentes en cajas diferentes no vacías

Ya hemos visto, en el tema anterior, que un problema general de distribución de k objetos diferentes entre n destinatarios o cajas diferentes se resuelve con el uso de las variaciones con repetición (VR_n^k). Y observemos que acabamos de ver que este número es también el de aplicaciones entre dos conjuntos finitos X e Y, $f : X \to Y$, donde $|X| = k$ e $|Y| = n$. Ello tiene sentido, pues cada posible distribución de k objetos en n cajas se corresponde con una aplicación de X en Y, aquella que a cada objeto de X le asigna una caja de Y. El lenguaje y técnica de las aplicaciones nos servirá para analizar problemas de distribución de objetos diferentes en cajas diferentes en los que introducimos una restricción adicional, la de que cada caja contenga al menos un objeto.

Veamos antes de formalizar la cuestión algunos ejemplos.

Ejemplo 4.2 *¿De cuántas formas pueden ponerse tres anuncios diferentes en dos tablones diferentes?*

El primer anuncio puede ponerse en el tablón 1 o en el tablón 2. El segundo cartel, análogamente, puede ponerse en cualquiera de los dos tablones y lo mismo ocurre para el tercer anuncio; por tanto, en total hay $VR_2^3 = 2^3$ formas.

Podemos observar que estamos asignando a cada anuncio un tablón; es decir, estamos construyendo una aplicación $f : A \to T$, que va del conjunto A de los anuncios al conjunto T de los tablones, siendo $A = \{1, 2, 3\}$ y $T = \{1, 2\}$. cada colocación es una aplicación concreta entre A y T, así $(1, 2, 1)$ indicaría que los anuncios primero y tercero están en el tablón 1 y que el anuncio segundo está en el tablón 2, escrito de otra manera: $(f(1), f(2), f(3)) = (1, 2, 1)$. El número de aplicaciones posibles es igual al número de formas de colocar los anuncios y es, como ya hemos dicho, $VR_2^3 = 2^3$. $\square$

Ejemplo 4.3 *¿De cuántas maneras pueden colocarse tres anuncios diferentes en dos tablones diferentes si en los dos tablones debe haber algún anuncio?*

Como antes, las distintas posibilidades las codificamos en ternas, donde la primera coordenada hace referencia al primer anuncio, la segunda al segundo anuncio y la tercera al tercer anuncio. Los valores posibles para coordenada son 1 para el tablón 1 o 2 para el tablón 2; de este modo $(1, 1, 2)$ indicaría que los anuncios primero y segundo están en el tablón 1 y que el anuncio tercero está en el tablón 2. Pero ahora no pueden salir ocho posibilidades porque no puede darse la terna $(1, 1, 1)$ pues entonces no habría anuncios en el tablón 2, ni puede darse la terna $(2, 2, 2)$ porque entonces no habría anuncios en el tablón 1. Consecuentemente hay 6 formas. $\square$

Ejemplo 4.4 *¿Cuántas formas hay de colocar* 10 *anuncios diferentes en* 7 *tablones diferentes si todos los tablones deben tener al menos un anuncio?*

Si no hubiese ninguna restricción sobre no dejar ningún tablón sin anuncio (tablón vacío), el número total de formas posibles sería $VR_7^{10} = 7^{10}$. Cada una de estas variaciones es una 10-upla donde cada coordenada puede tomar 7 valores diferentes (el del número del tablón al que va ese anuncio). Pero ahora, ningún tablón puede quedar sin anuncio; es decir, ha de existir al menos un anuncio en cada tablón o, lo que es lo mismo, la aplicación debe ser sobreyectiva. Tras haber analizado anteriormente la situación del número de aplicaciones sobreyectivas podríamos aplicar directamente la fórmula que nos da el número. En su lugar, vamos a desarrollar para este ejemplo concreto el procedimiento realizado antes en general para los conjuntos X e Y de cardinales k y n respectivamente.

En el caso de que el primer tablón se quedara sin anuncios consideremos el conjunto $A_1 = \{(\overbrace{\_, \_, \ldots, \_}^{10})$ / las coordenadas no pueden tomar el valor 1 del primer tablón$\}$.

Análogamente, sean:

$A_2 = \{(\overbrace{\_,\_,\ldots,\_}^{10})$ / las coordenadas no pueden tomar el valor 2 del segundo tablón$\}$.

$A_3 = \{(\overbrace{\_,\_,\ldots,\_}^{10})$ / las coordenadas no pueden tomar el valor 3 del tercer tablón$\}$.

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$A_7 = \{(\overbrace{\_,\_,\ldots,\_}^{10})$ / las coordenadas no pueden tomar el valor 7 del séptimo tablón$\}$.

Es decir, en A_i están las formas en las que el tablón i no tiene anuncio, para $i \in \{1,\ldots,7\}$. En $A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_7$ están aquellas variaciones para las que hay algún tablón sin anuncio. Por tanto, la respuesta a la pregunta será $7^{10} - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_7$. Ahora bien,

$$|A_1| = |A_2| = \ldots = |A_7| = 6^{10}.$$

Por otra parte, $A_1 \cap A_2$ será el conjunto de las formas (variaciones) en las que los dos primeros tablones no tienen anuncios; luego las coordenadas no pueden tomar ni el valor 1 ni el valor 2 de los dos primeros tablones, por lo que las coordenadas solo pueden tomar los cinco valores del 3 al 7 y, de este modo, $|A_1 \cap A_2| = 5^{10}$ que es el número de distribuciones de los 10 carteles entre los 5 tablones restantes.

Análogamente pasa para el resto de intersecciones dos a dos. Para las intersecciones tres a tres quedan cuatro tablones para distribuir los diez carteles, luego $|A_i \cap A_j \cap A_q| = 4^{10}$, siendo $i, j, q \in \{1,\ldots,7\}$, $i \neq j$, $i \neq q$, $j \neq q$.

Y así sucesivamente se van considerando las intersecciones de cuatro, etc. Para las intersecciones seis a seis tendremos que sus cardinales son iguales a 1^{10}. Y finalmente $|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_7| = 0$, porque no pueden estar todos los tablones vacíos (sin carteles).

La solución la obtendremos por el complementario, pero hay que determinar cuántas intersecciones hay de cada tipo. Intersecciones dos a dos hay C_7^2. Intersecciones tres a tres hay C_7^3. Y así sucesivamente hasta seis conjuntos que habrán C_7^6. Por supuesto, con un solo conjunto hay $C_7^1 = 7$ (los conjuntos $A_1, \ldots, A_7$).

Por tanto, la solución es

$$7^{10} - C_7^1 6^{10} + C_7^2 5^{10} - C_7^3 4^{10} + \ldots + (-1)^6 C_7^6 1^{10}.$$

Podemos observar que coincide con el número de aplicaciones sobreyectivas de

$$\{1,2,\ldots,10\} \text{ en } \{1,2,\ldots,7\},$$

como era de esperar.

$\square$

Podemos generalizar y preguntarnos por el número de formas de poner k objetos diferentes en n cajas diferentes sin dejar ninguna caja vacía, que denotaremos por $f(k,n)$.

Desde luego $k \geq n$, pues cada caja debe recibir al menos un objeto. Convenimos en que $f(k,n) = 0$ si $k < n$.

Teorema 4.5 *Dados k objetos diferentes y n cajas (o destinatarios) diferentes, el número de formas de distribuir los objetos en las cajas, de modo que ninguna caja quede vacía, es*

$$f(k,n) = n^k - C_n^1(n-1)^k + C_n^2(n-2)^k - C_n^3(n-3)^k + \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}(1)^k.$$

Demostración. Basta observar que las formas de distribución de k objetos en n cajas diferentes sin dejar ninguna caja vacía se corresponden con las aplicaciones sobreyectivas de $X = \{1, 2, \ldots, k\}$ en $Y = \{1, 2, \ldots, n\}$. En efecto, para una distribución dada, le hacemos corresponder la aplicación que queda identificada por las imágenes de los elementos de X de modo que en la k-upla $(f(1), f(2), \ldots, f(k))$ cada $f(i)$ es el número de la caja en la que se coloca el objeto i, por lo que en dicha k-upla están todos los valores desde 1 hasta n; es decir, la aplicación construida es sobreyectiva. Recíprocamente, dada una cierta aplicación sobreyectiva $f : X \to Y$ definida por $(f(1), f(2), \ldots, f(k))$, le hacemos corresponder la distribución de los k objetos en las n cajas dada de la siguiente manera: el objeto 1 lo colocamos en la caja cuyo valor sea $f(1)$, el objeto 2 en la caja cuyo número sea el valor de $f(2)$, etc. Por tanto, como hay tantas distribuciones posibles como aplicaciones sobreyectivas, en virtud del Teorema 4.1.1 concluimos que $f(k,n) = n^k - C_n^1(n-1)^k + C_n^2(n-2)^k - C_n^3(n-3)^k + \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}(1)^k$.

□

Nota 6 También podríamos haber hecho la demostración directamente, siguiendo los pasos del Ejemplo 4.4. Y es lo que te proponemos que hagas. □

4.2. Número de Stirling de segundo tipo. Distribución de objetos diferentes en cajas iguales no vacías

Vamos a recordar las particiones de un conjunto.

Definición 4.7 *Dado un conjunto X, una familia $\{X_i : i \in I\}$ de subconjuntos de X se dice que es una partición de X si verifica que:*

1. *Cada subconjunto de la familia es no vacío: $X_i \neq \emptyset$, para cada $i \in I$.*
2. *Los subconjuntos de la familia son disjuntos entre sí: $X_i \cap X_j = \emptyset$, para $i, j \in I$, con $i \neq j$.*
3. *La unión de los elementos de la familia es X; es decir, $\cup_{i \in I} X_i = X$.*

Ejemplo 4.8 *Sea $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. La familia $\mathcal{V} = \{\{a, b, c\}, \{d\}, \{e, f, g\}\}$ es una partición de X es una partición de X. Indica otras particiones posibles.*

En el caso de un conjunto finito, las particiones que se puedan considerar también son obviamente finitas. Aquí nos interesaremos en conjuntos finitos X con cardinal k. Evidentemente para un conjunto X dado se pueden definir distintas particiones. Y obsérvese que, para cada partición, cada elemento del conjunto X solo pertenece a un subconjunto de los que forman la partición.

Dado un conjunto X con cardinal $|X| = k$, queremos saber cuántas particiones podemos hacer teniendo en cuenta el número de subconjuntos de la partición pero sin tener en cuenta el cardinal de cada subconjunto de la partición.

Para razonamientos combinatorios a veces se consideran separaciones de un conjunto en subconjuntos donde se agrupan sus elementos, pudiendo estar alguno vacío. Por ejemplo, para un conjunto de objetos $X = \{a, b, c\}$ se contabiliza $\{a, b, c\}$ y $\emptyset$ como una de las separaciones posibles, junto a las que conforman la partición conjuntista de X en dos subconjuntos, que son: $\{\{a\}, \{b, c\}\}$, $\{\{b\}, \{a, c\}\}$ y $\{\{c\}, \{a, b\}\}$. Estas separaciones ("particiones") significan que: en la primera, todos los objetos están en una caja y la otra queda vacía; la segunda que en una caja está el objeto a y en la otra los objetos b y c y análogamente con las otras dos separaciones. De este modo, el número de distribuciones posibles de los tres objetos (elementos) en dos cajas es 4, mientras que el número de particiones en dos subconjuntos de X es 3, porque la partición $\{\{a, b, c\}\}$ es la partición de un solo elemento del conjunto X.

Dado un conjunto X con k elementos. El número de formas en que estos k objetos diferentes pueden distribuirse en n cajas iguales es el mismo que el número de particiones del conjunto de k elementos en n subconjuntos si ninguna caja puede quedar vacía.

Definición 4.9 *Sea X un conjunto finito, $|X| = k$. El número de particiones de X en $n \in \mathbb{N}$ partes (no vacías) $X_1, X_2, \ldots, X_n$, con $1 \leq n \leq k$, se denomina número de Sitirling de segundo tipo y lo denotamos por $S(k, n)$.*

El número de Stirling verifica la siguiente ecuación de recurrencia:

$$S(k, n) = S(k-1, n-1) + nS(k-1, n), \qquad 2 \leq n \leq k-1,$$

con valores iniciales $S(k, 1) = 1$ y $S(k, k) = 1$, para todo k.

Ejemplo 4.10 *Para $X = \{a, b, c\}$, las particiones de X en dos subconjuntos, son tres:*

$$\{\{a\}, \{b, c\}\}, \{\{b\}, \{a, c\}\}, \ y, \ \{\{c\}, \{a, b\}\},$$

luego el número de Stirling $S(3, 2) = 3$ que coincide con su expresión a través de la ecuación de recurrencia:

$$S(3, 2) = S(2, 1) + 2S(2, 2) = 1 + 2 \cdot 1 = 3.$$

En términos de distribuciones, el número de Stirling, $S(k, n)$, es el número de formas de separar k objetos diferentes en n cajas iguales, de modo que no quede ninguna caja vacía.

Ejemplo 4.11 *Dado* $X = \{a,b,c,d\}$*, el número de particiones en dos subconjuntos será* $S(4,2) = S(3,1) + 2 \cdot S(3,2) = 1 + 2 \cdot 3 = 7$ *que se corresponde con las particiones:*

- *Formadas por dos subconjuntos de dos elementos cada uno: que son en número* $C_4^2/2 = 3$*, ya que si formamos, por ejemplo* $\{a,b\}$ *el otro subconjunto ha de ser* $\{c,d\}$ *y cuando en las* C_4^2 *tenemos a* $\{c,d\}$ *la otra parte es* $\{a,b\}$ *y son:*

$$\{a,b\}, \quad \{c,d\}$$
$$\{a,c\}, \quad \{b,d\}$$
$$\{b,c\}, \quad \{a,d\}$$

- *Formadas por dos subconjuntos, uno de cardinal* 1 *y otro de cardinal* 3*, que son:*

$$\{a\}, \quad \{b,c,d\}$$
$$\{b\}, \quad \{a,c,d\}$$
$$\{c\}, \quad \{a,b,d\}$$
$$\{d\}, \quad \{a,b,c\}$$

Ejemplo 4.12 *Si queremos saber el número de particiones de un conjunto de* 4 *elementos en* 3 *partes,* $S(4,3)$*, tendremos que* $S(4,3) = S(3,2) + 3 \cdot S(3,3) = 3 + 3 \cdot 1 = 6$*. Es decir, hay seis particiones, de tres partres cada una, de un conjunto* X *cuyo cardinal es* 4*. Y son:*

$$\{a,b\}, \quad \{c\}, \quad \{d\}$$
$$\{a,c\}, \quad \{b\}, \quad \{d\}$$
$$\{b,c\}, \quad \{a\}, \quad \{d\}$$
$$\{c,d\}, \quad \{a\}, \quad \{b\}$$
$$\{b,d\}, \quad \{a\}, \quad \{c\}$$
$$\{a,d\}, \quad \{b\}, \quad \{c\}$$

Definición 4.13 *Sea* X *un conjunto finito,* $|X| = k$*. El número total de particiones de* X *lo denominamos número de Bell de orden* k *y lo denotamos por* B_k*.*

Se verifica obviamente que $B_k = \sum_{n=1}^{k} S(k,n)$*.*

Ejemplo 4.14 *El número total de particiones que admite el conjunto* $X = \{a,b,c,d\}$ *será*

$$B_4 = S(4,1) + S(4,2) + S(4,3) + S(4,4) = 1 + 7 + 6 + 1 = 15.$$

Es decir, $\{a,b,c,d\}$ *admite un total de* 15 *particiones.*

En general, no es sencillo calcular los números de Stirling y Bell. Vamos ahora a determinar una fórmula explícita para el cálculo de $S(k,n)$, fórmula que evidentemente nos proporcionará el número de particiones de un conjunto$X$ de k elementos en n subconjuntos no vacíos y que, por tanto, nos proporciona el número de formas de separar k objetos diferentes en n cajas iguales, de modo que ninguna caja quede vacía.

Proposición 4.15 *El número de formas de separar k objetos diferentes en n cajas iguales, de modo que no quede ninguna caja vacía, es*

$$S(k,n) = \frac{1}{n!}\left[n^k - C_n^1(n-1)^k + C_n^2(n-2)^k - C_n^3(n-3)^k + \ldots + (-1)^{(n-1)}C_n^{n-1}1^k\right]$$

Demostración. Hay una relación entre $f(k,n)$ y $S(k,n)$ que se corresponde con la relación entre permutaciones y combinaciones en la teoría elemental de Combinatoria. Consideremos una distribución (partición) de las que son contadas por $S(k,n)$, que es una partición del conjunto X, con $|X| = k$, en n subconjuntos distintos. Hay $n!$ maneras de numerar las n cajas iguales para cambiarlas a cajas distintas. Por tanto, cada distribución (partición) considerada en $S(k,n)$ da lugar a $n!$ distribuciones (particiones) del tipo $f(k,n)$. Luego

$$f(k,n) = n!S(k,n)$$

o bien $S(k,n) = \frac{1}{n!}f(k,n)$. Y teniendo en cuenta la expresión de $f(k,n)$ dada en el Teorema 4.5 obtenemos

$$S(k,n) = \frac{1}{n!}\left[n^k - C_n^1(n-1)^k + C_n^2(n-2)^k - C_n^3(n-3)^k + \ldots + (-1)^{(n-1)}C_n^{n-1}1^k\right].$$

$\square$

4.3. Números multinomiales. Distribución de objetos diferentes en cajas con restricciones sobre el número de objetos por caja

Los números multinomiales son una generalización de los números combinatorios o números binomiales y tienen utilidad en la resolución de problemas combinatorios. En particular, veremos problemas de distribución relacionados con particiones ordenadas.

Recordemos que un número combinatorio $\binom{m}{p}$ puede interpretarse como el número de subconjuntos de p elementos que se pueden formar con un conjunto de m elementos distinguibles. Desde un punto de vista de distribuciones de objetos, $\binom{m}{p}$ representa el número de formas de distribuir p objetos idénticos (indistinguibles) en m lugares diferentes (distinguibles), $m \geq p$, poniendo como máximo un objeto en cada lugar. La equivalencia es clara pues en cada distribución se trata de escoger un subconjunto de p lugares de los m posibles, luego se trata de $C_m^p = \binom{m}{p}$.

Ejemplo 4.16 *La cantidad de comités distintos de* 3 *personas (las tres con la misma categoría) que se pueden hacer en un grupo de* 10 *personas es* $\binom{10}{3} = 120$.

Ejemplo 4.17 *La cantidad de formas en que se pueden distribuir tres cuchillos de cocina iguales (objetos iguales) en un cajón con diez posiciones vacías para cuchillos (cajas o destinatarios diferentes) es* $C^3_{10} = \binom{10}{3} = 120$.

Vamos ahora a complicar un poco la situación permitiendo la repetición de objetos. Analizamos, en primer lugar, un caso particular.

Ejemplo 4.18 *Tenemos* 10 *lugares diferentes para colocar* 10 *objetos, pero se repiten en tres grupos distintos entre ellos pero iguales los objetos de un mismo grupo. Sean estas repeticiones:*

4 *se repiten entre sí* *(por ejemplo,* 4 *cuchillos de carne)*

3 *se repiten entre sí* *(por ejemplo,* 3 *palas de pescado)*

3 *se repiten entre sí* *(por ejemplo,* 3 *cuchillos de postre)*

Si los 10 *cuchillos fueran distintos tendríamos* $P_{10} = 10!$ *posibilidades. En este caso, sabemos que tenemos* $PR^{4,3,3}_{10} = \frac{10!}{4!3!3!} = 4200$.

De manera general, si tenemos n lugares (n cajas distintas) donde se pueden colocar n objetos distinguibles de los que se repiten n_1 entre sí, otros n_2 también entre sí, y así sucesivamente hasta otros n_k entre sí, tal que $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, el número de formas de colocar estos n objetos en los n lugares es, como sabemos a través de las permutaciones con repetición $\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$. Número que denotaremos por $\binom{n}{n_1 n_2 \cdots n_k}$ y que denominamos *número multinomial*:

$$\binom{n}{n_1 n_2 \cdots n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Ejemplo 4.19 *Queremos conocer el número de formas en que se pueden colocar* 90 *estudiantes en* 7 *aulas distintas, de forma que:*

El Aula	tenga n_i estudiantes
	n_i
1	10
2	10
3	12
4	12
5	12
6	14
7	20

Imaginemos que tenemos 7 *etiquetas con el número de cada aula. Lo que tenemos que hacer es asignar etiquetas a cada uno de los* 90 *alumnos de forma que se use* 10 *veces la etiqueta aula* 1*,* 10 *la etiqueta aula* 2*, etc. hasta* 20 *veces la etiqueta aula* 7*. Luego se trata del número de distribuciones ordenadas de* 7 *etiquetas que se repiten* $10, 10, 12, 12, 12, 14, 20$ *veces. Por tanto, el número de formas será*

$$\binom{90}{10, 10, 12, 12, 12, 14, 20} = \frac{90!}{(10!)^2(12!)^3 14! 20!}.$$

Vemos que el número multinomial tiene la interpretación de ser el número de formas de colocar n objetos en cajas diferentes (distinguibles); es decir, el número de particiones ordenadas en conjuntos distinguibles (las aulas) de un conjunto X (los alumnos).

Si las cajas fuesen indistinguibles (iguales) también puede usarse el número multinomial en la forma que ilustramos seguidamente.

Ejemplo 4.20 *Queremos conocer el número de formas en que se pueden colocar* 90 *estudiantes en* 7 *grupos, de modo que dos tengan* 10 *alumnos, tres tengan* 12 *alumnos, uno tenga* 14 *alumnos y uno tenga* 20 *alumnos.*

El problema es muy parecido al del ejemplo anterior, pero antes teníamos 7 *aulas diferentes y ahora tenemos* 7 *grupos que no son distinguibles (no están numerados). Así, al hacer un grupo de* 10 *estudiantes no nos importa si es el grupo uno o el grupo dos, mientras que antes no era lo mismo que* 10 *estudiantes estuviesen en el aula* 1 *o en el aula* 2*. Por tanto, ahora hay que dividir por las permutaciones del número de grupos que se repiten, y así tendremos que el número de formas solicitado es:*

$$\frac{1}{2!3!}\binom{90}{10, 10, 12, 12, 12, 14, 20}.$$

4.3.1. Teorema multinomial

Terminamos esta sección generalizando el teorema del binomio de Newton. En lugar de limitarnos a un binomio $(x+y)^n$, ahora consideraremos mas sumandos.

Teorema 4.21

$$(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n} \binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k} x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}.$$

Demostración. Tenemos que

$$(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n = \underbrace{(x_1+x_2+\ldots+x_k)\cdot(x_1+x_2+\ldots+x_k)\cdots(x_1+x_2+\ldots+x_k)}_{n}.$$

Desarrollando el producto se obtiene una serie de sumandos, cada uno de los cuales es un producto donde hay n_1 veces x_1, n_2 veces x_2, ..., n_k veces x_k, con $n_1+n_2+\ldots+n_k = n$, pues la suma de los exponentes de las indeterminadas debe ser n. Naturalmente uno o más de un n_i puede ser 0, lo que significa que en ese sumando no estarán los x_i correspondientes a los $n_i=0$; es decir, cada sumando tiene la forma:

$$x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}, \quad \text{siendo } n_1+n_2+\ldots+n_k=n.$$

Ahora bien, el coeficiente de cada $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$ es el número de veces que aparece $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$, que a su vez es el número de formas de escoger n_1 veces x_1, n_2 veces x_2, ..., n_k veces x_k cuando se hace la multiplicación; es decir $\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_k}$.

Por tanto,

$$(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n} \binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k} x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}.$$

□

Ejemplo 4.22 *El coeficiente de $x^3y^2z^2$ en $(x+y+z)^7$ es $\binom{7}{3,2,2} = \frac{7!}{3!2!2!} = 210$. Y el número de términos (sumandos) es $CR_3^7 = \binom{9}{7} = 36$.*

Ejemplo 4.23 *Desarrollo de $(x+y+z)^2$.*

El número de sumandos lo constituye las combinaciones con repetición de tres objetos (x,y,z) tomados de dos en dos; es decir, $CR_3^2 = \binom{4}{2} = 6$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
(x+y+z)^2 &= \sum_{n_1+n_2+n_3=2} \binom{2}{n_1,n_2,n_3} x^{n_1}x^{n_2}x^{n_3} \\
&= \binom{2}{2,0,0}x^2 + \binom{2}{0,2,0}y^2 + \binom{2}{0,0,2}z^2 \\
&\quad + \binom{2}{1,1,0}xy + \binom{2}{1,0,1}xz + \binom{2}{0,1,1}yz.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.24 *El coeficiente de x^2yz^3t en el desarrollo de $(x+y+z+t)^7$ en el desarrollo de $(x+y+z+t)^7$ es $\binom{7}{2,1,3,1} = \frac{7!}{2!3!} = 420$.*

Ejemplo 4.25 *Desarrollo de $(x+y+z)^4$.*

El número de sumandos será $CR_3^4 = \binom{6}{4} = 15$. Tenemos:

$$\begin{aligned}(x+y+z)^4 &= \sum_{n_1+n_2+n_3=4} \binom{4}{n_1, n_2, n_3} x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3} \\ &= \binom{4}{4,0,0} x^4 + \binom{4}{0,4,0} y^4 + \binom{4}{0,0,4} z^4 \\ &\quad + \binom{4}{3,1,0} x^3 y + \binom{4}{1,3,0} x y^3 + \ldots + \binom{4}{2,1,1} x^2 yz.\end{aligned}$$

4.4. Funciones generadoras. Distribución de objetos iguales sometidos a ciertas restricciones

Las funciones generadoras (ordinarias) nos servirán para resolver ciertos problemas de distribuciones cuando los objetos a distribuir son iguales o indistinguibles y están sometidos a algunas restricciones. Hay dos tipos de funciones generadoras, las ordinarias que estudiaremos aquí y las funciones generadoras exponenciales que no estudiaremos.

Definición 4.26 *Dada una sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ de números reales se le asocia la expresión:*

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

que se denomina función generadora ordinaria asociada a los a_i.

Una función generadora se expresa como una serie de potencias, o como un polinomio si la sucesión tiene un número finito de términos no nulos o, equivalentemente, son todos ceros a partir de un cierto a_n.

Una función generadora no **debe entenderse** como una función que da un resultado, $g(x)$, para cada valor de x que se considere en su dominio sino **como una representación de los coeficientes, donde el significado de cada a_i viene expresado por la potencia x^i de la que es coeficiente**.

Hay problemas combinatorios a los que se le puede asociar una función generadora y **resolver el problema es equivalente a calcular un cierto coeficiente de esta función generadora**. Las funciones generadoras son útiles cuando el problema no es sencillo de resolver usando las técnicas de la Combinatoria básica. Lo ilustramos con dos ejemplos, uno donde es más fácil resolverlo sin el uso de funciones generadoras y un segundo donde el uso de las funciones generadoras permite resolver con comodidad un problema que de otro modo sería mucho más complicado.

Ejemplo 4.27 *Supongamos que queremos distribuir siete bolas iguales en dos cajas distintas.*

La situación se puede traducir en resolver la ecuación $x + y = 7$ con soluciones enteras no negativas; por tanto, el número de posibles formas de efectuar la distribución es $CR_2^7 = \binom{8}{7} = 8$.

Pero también podemos resolverlo haciendo uso de la técnica de asociar una función generadora.

A la caja 1 le asignamos el polinomio: $g_1(x) = 1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^7$, donde los exponentes de cada término del polinomio van a identificar a través del coeficiente el número de bolas que puede haber en la primera caja; es decir en x^0 identificamos que la caja 1 está vacía, con x^1 que hay una bola en la caja 1, con x^2 una bola en la caja 1, etc. Análogamente hacemos con la caja 2, asignándole el polinomio $g_2(x) = 1 + x^1 + x^2 + \ldots + x^7$ con la misma interpretación entre exponentes y número de bolas en la caja 2.

La función generadora del problema es:

$$\begin{aligned} g(x) = g_1(x)g_2(x) &= (1 + x + x^2 + \ldots + x^7)^2 \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + 8x^7 + \ldots + x^{14}. \end{aligned}$$

Al calcular el producto $g_1(x)g_2(x)$ obtenemos el monomio x^7 varias veces. Cada vez que obtenemos x^7 será el resultado de multiplicar un sumando de $g_1(x)$ donde aparece x^p por otro de $g_2(x)$ donde aparece x^{7-p} (por ejemplo, x en $g_1(x)$ y x^6 en $g_2(x)$). Por ello, el coeficiente a_7 del término x^7 de $g(x)$ es el número de formas que podemos distribuir las 7 bolas entre las dos cajas. De ese modo, el coeficiente $a_7 = 8$ de $g(x)$ nos da el resultado del problema.

Las funciones generadoras ordinarias son útiles para resolver problemas de distribución de objetos iguales en cajas (sean indistinguibles o diferentes), pero especialmente está aconsejado su uso cuando hay restricciones relativas a los objetos.

Ejemplo 4.28 *Lanzamos tres dados diferentes (rojo, azul y verde), ¿de cuántas formas la suma de los puntos obtenidos es 13?*

Observemos que es un problema de distribución de 13 objetos iguales en tres cajas diferentes (los dados) con las restricciones de que ninguna caja puede quedar vacía (cada dado al menos puntuará un 1) y que en ninguna caja puede entrar más de 6 (la puntuación máxima de cada dado). Podemos resolverlo con las técnicas de la combinatoria básica y también con el uso de funciones generadoras. Lo vemos de ambas formas.

El problema consiste en resolver la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 13$ con la restricción $1 \leq x_i \leq 6$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Como las soluciones buscadas han de ser enteras positivas, el número total de soluciones posibles es $\binom{12}{2} = 66$. De estas debemos eliminar aquellas para las que $x_i > 6$

con $i \in \{1,2,3\}$; es decir, la solución será 66 menos estas últimas. Sean $A_i = \{x_i > 6\}$ para $i \in \{1,2,3\}$, la solución será $66 - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$. Observemos que no es posible $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, $i \neq j$ e $i, j \in \{1,2,3\}$, porque en ese caso se tendría una suma superior a 13; por tanto, se trata de resolver estas tres ecuaciones: $y_1 + x_2 + x_3 = 7$ con $y_1 = x_1 - 6 \geq 1$, $x_2 \geq 1$, $x_3 \geq 1$; $x_1 + y_2 + x_3 = 7$ con $y_2 = x_2 - 6 \geq 1$, $x_1 \geq 1$, $x_3 \geq 1$; y $x_1 + x_2 + y_3 = 7$ con $y_3 = x_3 - 6 \geq 1$, $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 1$. En cada caso, el número de soluciones es $\binom{6}{2} = 15$. Luego la solución es finalmente $66 - 3 \cdot 15 = 66 - 45 = 21$.

Lo resolvemos ahora mediante función generadora. A cada dado le asignamos la misma función

$$g_1(x) = g_2(x) = g_3(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6,$$

donde los exponentes de cada término del polinomio se corresponden con la puntuación que puede salir al lanzar el correspondiente dado. La función generadora será $g(x) = (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3$, desarrollando obtenemos:

$$\begin{aligned} g(x) &= x^{18} + 3x^{17} + 6x^{16} + 10x^{15} + 15x^{14} + 21x^{13} + 25x^{12} + 27x^{11} + \\ &\quad +27x^{10} + 25x^9 + 21x^8 + 15x^7 + 10x^6 + 6x^5 + 3x^4 + x^3. \end{aligned}$$

El producto de los tres polinomios da x^{13} cuando $x^p x^q x^r = x^{13}$ o lo que es lo mismo, cuando $p + q + r = 13$; es decir, cada vez que la suma de los puntos de los tres dados es 13, luego $a_{13} = 21$ es el número de formas posibles preguntado.

4.4.1. Cálculo de los coeficientes de las funciones generadoras

Calcular los coeficientes de la función generadora es engorroso, por ello veremos ahora cómo calcular explícitamente estos coeficientes sin necesidad de tener que hacer, de manera extensiva, los productos indicados. Veremos algunos casos particulares de ecuaciones combinatorias que son más frecuentes en el cálculo de los coeficientes concretos de una función generadora.

Proposición 4.29 *Se verifica que:*

1. $(1 + ax^p)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (ax^p)^i$.
2. $\frac{1}{(1+x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{n+i-1}{i} x^i$.
3. $\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} x^i$.
4. $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Demostración.

El primer apartado es inmediato pues se trata de la aplicación inmediata del Teorema del binomio de Newton. Para el segundo y tercero, basta considerar las expresiones como potencias de exponentes negativos (por ejemplo, $\frac{1}{(1+x)^n} = (1+x)^{-n}$) y hacer el desarrollo de McLaurin. El cuarto apartado se trata de la suma de una progresión geométrica de razón x. $\square$

Ejemplo 4.30 *vemos algunos ejemplos del uso de los resultados anteriores.*

1. $(1-x^8)^4 = \sum_{i=0}^4 \binom{4}{i}(-x^8)^i = 1 - 4x^8 + 6x^{16} - 4x^{24} + x^{32}$.
2. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^i + \ldots$.
3. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^i x^i + \ldots$.
4. $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (i+1)x^i + \ldots$.
5. *Desarrollo de* $\frac{1}{(1-x)^4}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^4} &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{4+i-1}{i} x^i \\ &= \binom{3}{0} + \binom{4}{1}x + \binom{5}{2}x^2 + \binom{6}{3}x^3 + \ldots \end{aligned}$$

6. *Desarrollo de* $\frac{1}{(1+x)^4}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^4} &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{4+i-1}{i} x^i \\ &= \binom{3}{0} - \binom{4}{1}x + \binom{5}{2}x^2 - \binom{6}{3}x^3 + \ldots \end{aligned}$$

7. *El coeficiente de* x^{21} *en el desarrollo de* $\frac{1}{(1+x)^7}$ *es* $(-1)^7\binom{7+21-1}{21}x^{21} = -\binom{27}{21} = -296010$.

4.5. Particiones de un entero. Objetos iguales en cajas iguales

Sea $n \in \mathbb{Z}^+$, vamos a considerar el número de formas de escribir n como suma de enteros, sin considerar el orden de los sumandos. Cada una de estas formas la denominaremos una partición del entero n. Por ejemplo, 3 lo podemos escribir como 3 pero también como $2+1$ y como $1+1+1$. El 4 podemos considerarlo como él mismo 4 pero también como $3+1$, $2+2$, $2+1+1$ y $1+1+1+1$.

Definición 4.31 *Dado* $n \in \mathbb{Z}^+$ *una partición de* n *es una sucesión finita de números enteros positivos* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$, *con* $k, \lambda_i \in \mathbb{Z}^+$ *para* $i \in \{1, \ldots, k\}$, *tal que*

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k \text{ y } \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = n.$$

Si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k)$ *es una partición de* n, *se denota por* $\lambda \vdash n$.

La condición $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k$ nos permite garantizar que el orden no se considera; es decir, que dos sumas que solo difieran en el orden de los sumandos se considera una misma partición.

4.5.1. Diagrama de Ferrers

El diagrama de Ferrers se utiliza para representar una partición de un entero. Dado que una partición $\lambda \vdash n$ es una sucesión decreciente de enteros positivos $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k$, con $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = n$, el diagrama de Ferrers representa cada sumando λ_i, en orden decreciente, como una fila de puntos con tantos puntos como sea el valor del sumando en cuestión. Así, la partición de 6 dada por $(3, 2, 1), 3 + 2 + 1 = 6$ se representaría como se indica en la siguiente figura.

$$\begin{array}{lll} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \\ \bullet & & \end{array}$$

Como podemos ver, cada sumando de la partición queda representada por una fila de puntos, con tantos puntos como valor tiene el sumando. Las filas se colocan sucesivamente de la de mayor sumando a la de menor sumando.

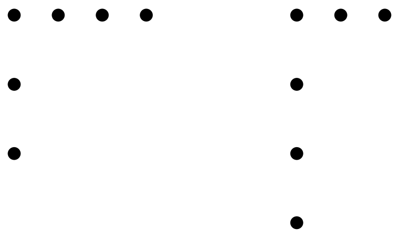
Ejemplo 4.32 *Vamos a representar, mediante el diagrama de Ferrers, otras dos particiones de* 6 *dadas por:* $6 = 4 + 1 + 1, 6 = 2 + 2 + 2$

$$\begin{array}{llll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & & & \\ \bullet & & & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{array}$$

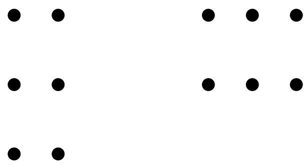
Para una partición dada de un entero $n \in \mathbb{Z}^+$, si en su diagrama de Ferrers intercambiamos filas por columnas obtenemos una nueva partición de ese entero n que denominaremos partición conjugada de la primera.

Ejemplo 4.33 *Vemos tres ejemplos de particiones conjugadas.*

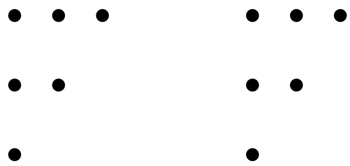
1. *La conjugada de la partición de* 6 *dada por* $6 = 4 + 1 + 1$ *es la partición de* 6 *dada por* $6 = 3 + 1 + 1 + 1$ *como apreciamos en sus diagramas:*



2. *La conjugada de la partición de* 6 *dada por* $6 = 2 + 2 + 2$ *es la partición de* 6 *dada por* $6 = 3 + 3$ *como se aprecia en sus diagramas:*



3. *La conjugada de la partición de* 6 *dada por* $6 = 3 + 2 + 1$ *es ella misma. En los casos en los que una partición coincide con su conjugada a la partición se le llama autoconjugada.*



4.5.2. Función de partición

Definición 4.34 *Para cada* $n \in \mathbb{Z}^+$ *se considera el número de posibles particiones de* n *y se representa por* $p(n)$*, Se conviene en que* $p(0) = 1$ *y que si* $n \in \mathbb{Z}^-$ *entonces* $P(n) = 0$*. De este modo se obtiene la función partición.*

Ejemplo 4.35 *Es fácil observar que:*

1. $p(1) = 1$.
2. $p(2) = 2$*; que se corresponde con las particiones:* 2 *y* $1 + 1$.
3. $p(3) = 3$*; que se corresponde con las particiones:* 3*;* $2 + 1$ *y* $1 + 1 + 1$.
4. $p(4) = 5$*; que se corresponde con las particiones:*

$$\begin{array}{llll} 4; & 3+1; & 2+1+1; & 1+1+1+1 \\ & 2+2; & & \end{array}$$

5. *$p(5) = 7$; que se corresponde con las particiones:*

$$5;\quad 4+1;\quad 3+1+1;\quad 2+1+1+1\quad 1+1+1+1+1$$
$$3+2;\quad 2+2+1;$$

Definición 4.36 *Para $n \in \mathbb{Z}^+$ se define $p_k(n)$ como el número de particiones de n que tienen k sumandos. Y se tiene que*

$$p(n) = p_1(n) + p_2(n) + \ldots + p_n(n) = \sum_{k=1}^{n} p_k(n).$$

Ejemplo 4.37 *Para el número 5 tenemos que:*

k	$p_k(5)$	*particiones con k sumandos*
1	$p_1(5) = 1$	5
2	$p_2(5) = 2$	$4+1$ $3+2$
3	$p_3(5) = 2$	$3+1+1$ $2+2+1$
4	$p_4(5) = 1$	$2+1+1+1$
5	$p_5(5) = 1$	$1+1+1+1+1$

Y $p(5) = p_1(5) + p_2(5) + p_3(5) + p_4(5) + p_5(5) = 1+2+2+1+1 = 7.$

Notemos que, para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$ se tiene que $p_1(n) = 1$ pues la partición es el propio n, que $p_n(n) = 1$ pues se trata de la partición $\overbrace{1+1+\ldots+1}^{n}$ y que también $p_{n-1}(n) = 1$ pues al tener $n-1$ sumandos todos han de ser unos salvo el primero que ha de ser 2.

Definición 4.38 *Para $n \in \mathbb{Z}^+$ se define $q_k(n)$ como el número de particiones de n cuyo sumando mayor es k. Y se tiene que*

$$p(n) = q_1(n) + q_2(n) + \ldots + q_n(n) = \sum_{k=1}^{n} q_k(n).$$

Ejemplo 4.39 *Para el número 5 tenemos que:*

k	$q_k(5)$	*particiones cuyo sumando mayor es k*
1	$q_1(5) = 1$	$1+1+1+1+1$
2	$q_2(5) = 2$	$2+2++1$ $2+1+1+1$
3	$q_3(5) = 2$	$3+2$ $3+1+1$
4	$q_4(5) = 1$	$4+1$
5	$q_5(5) = 1$	5

Y $p(5) = q_1(5) + q_2(5) + q_3(5) + q_4(5) + q_5(5) = 1 + 2 + 2 + 1 + 1 = 7$.

Observemos que existe una biyección entre particiones y particiones conjugadas y que fijandonos en los diagramas de Ferrers tenemos que $p_k(n) = q_k(n)$.

Teorema 4.40 *Sea* $n \in \mathbb{Z}^+$ *y* $k \in \mathbb{Z}^+$ *con* $1 < k < n$. *Se verifica que* $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$.

Demostración. Dividimos las particiones de n con k sumandos en dos clases, las que tienen 1 como sumando y las que no tienen a 1 como sumando. Sean así:

$$A = \{\text{particiones de } n \text{ con } k \text{ sumandos que contienen al 1 como sumando}\}$$

y

$$B = \{\text{particiones de } n \text{ con } k \text{ sumandos que no tienen al 1 como sumando}\},$$

luego $p_k(n) = |A| + |B|$.

Veamos que $|A| = p_{k-1}(n-1)$.

En efecto, si tenemos una partición contada en $p_{k-1}(n-1)$ y le sumamos 1, tendremos entonces una partición de n con k sumandos que tiene al 1 como sumando, luego estará en A. Recíprocamente, si tenemos una partición de A y le restamos un 1 nos queda una partición con $k-1$ sumandos que suman $n-1$, luego es una de las particiones contadas en $p_{k-1}(n-1)$.

Veamos ahora que $|B| = p_k(n-k)$.

En efecto, si tenemos una partición con k sumandos de $n-k$: $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = n-k$ con $\alpha_i \geq 1$ y sumamos k a ambos lados tendremos

$$(\alpha_1 + 1) + \ldots + (\alpha_k + 1) = n, \qquad \text{con } \alpha_i + 1 \geq 2, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Obtenemos una partición de n con k sumandos que no tiene a 1 como sumando, luego está en B. Recíprocamente, si $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = n$, con $\lambda_i > 1$, restando k en ambos lados se tiene $(\lambda_1 - 1) + \ldots + (\lambda_k - 1) = n-k$ y $\lambda_i - 1 \geq 1$, luego es una de las particiones contadas en $p_k(n-k)$.

Concluimos, por tanto, que $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$. □

Definición 4.41 *Para $n \in \mathbb{Z}^+$ se define:*

1. $\overline{p_k}(n)$ *como el número de particiones de n con k o menos sumandos; es decir,*

$$\overline{p_k}(n) = p_1(n) + p_2(n) + \ldots + p_k(n)$$

2. $\overline{q_k}(n)$ *como el número de particiones de n cuyos sumandos son menores o iguales que k; es decir,*

$$\overline{q_k}(n) = q_1(n) + q_2(n) + \ldots + q_k(n).$$

Ejemplo 4.42 *Para 6 tenemos que $p(6) = 11$ que se corresponde con las siguientes particones:*

$$\begin{array}{llllll} 6 & 5+1 & 4+1+1 & 3+1+1+1 & 2+1+1+1+1 & 1+1+1+1+1+1 \\ & 4+2 & 3+2+1 & 2+2+1+1 & & \\ & 3+3 & 2+2+2 & & & \end{array}$$

Y se tiene que:

k	$\overline{p_k}(6)$	$\overline{q_k}(6)$
1	$\overline{p_1}(6) = 1$	$\overline{q_1}(6) = 1$
2	$\overline{p_2}(6) = 4$	$\overline{q_2}(6) = 4$
3	$\overline{p_3}(6) = 7$	$\overline{q_3}(6) = 7$
4	$\overline{p_4}(6) = 9$	$\overline{q_4}(6) = 9$
5	$\overline{p_5}(6) = 10$	$\overline{q_5}(6) = 10$
6	$\overline{p_6}(6) = 11$	$\overline{q_6}(6) = 11$

Nota 43 Es interesante resaltar las siguientes propiedades:

1. Si $k \geq n$, entonces $\overline{p_k}(n) = p_n(n)$.
2. $p_1(1) = p_2(1) = p_3(1) = \ldots = 1$.
3. $\overline{p_k}(n) = \overline{q_k}(n)$.

   Si $\lambda \vdash n$ es tal que está contada en $\overline{p_k}(n)$, como $\overline{p_k}(n) = p_1(n) + p_2(n) + \ldots + p_k(n)$, entonces λ tendrá r sumandos con $r \leq k$. Sea F_λ su diagrama de Ferrers. Le corresponde por biyección $F_{\lambda'}$, diagrama de Ferrers de $\lambda' \vdash n$. Como λ tiene r sumandos, para su conjugada en $F_{\lambda'}$ se ha cambiado filas por columnas, luego la primera fila de $F_{\lambda'}$ tiene r puntos; es decir, su sumando mayor es r, por lo que $p_k(n) = q_k(n)$. Como ello es cierto para todo $r = 1, \ldots, k$, tendremos que

$$\overline{p_k}(n) = p_1(n) + p_2(n) + \ldots + p_k(n) = q_1(n) + q_2(n) + \ldots + q_k(n) = \overline{q_k}(n).$$

4. $\overline{q_n}(n) = \overline{q_{n-1}}(n) + 1$.

   Es inmediato pues solo hay una partición que tenga a n como sumando.

□

4.5.3. Objetos iguales en cajas iguales

Si tenemos n objetos iguales, podemos identificarlos con n unos. Si tenemos k cajas iguales para colocarlos y no puede quedar ninguna caja vacía, tendremos una distribución del tipo $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = n$, con $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k \geq 1$. Podemos considerar que en cada caja se coloca un 1 (o un objeto) al menos, luego la solución es $p_k(n)$. Por ejemplo, si queremos colcar 5 bolas iguales en 4 urnas iguales sin que ninguna urna quede vacía, tendremos que hay $p_4(5) = 1$ sola forma posible que se corresponde con la partición $2 + 1 + 1 + 1$. Del mismo modo, si queremos colocar 6 bolas iguales en tres urnas iguales sin que quede ninguna urna vacía, tendremos que hay $p_3(6) = 3$ formas posibles, que se corresponde con las particiones de seis siguientes: $4 + 1 + 1$, $3 + 2 + 1$ y $2 + 2 + 2$.

Por otra parte, hemos visto que $p(n) = \sum_{k=1}^{n} p_k(n)$; es decir, el número de particiones de n es la suma del número de particiones de n con un sumando más el número de los que tienen dos sumandos, etc., hasta llegar a la partición con n sumandos. Cada partición de n se puede considerar como una distribución de n objetos iguales en n cajas iguales. Así, por ejemplo, $p(5) = 7 = p_1(5) + p_2(5) + p_3(5) + p_4(5) + p_5(5) = 1 + 2 + 2 + 1 + 1$, donde con $p_1(5)$ indicamos que solo hay una distribución de 5 de la forma $1 + 1 + 1 + 1 + 1$, que representaría que habría una bola en cada caja. Del mismo modo con $p_2(5)$ estamos indicando que hay dos descomposiciones de 5 en dos sumandos, que son: $4 + 1$ y $3 + 2$, que se corresponden, respectivamente, con que: 1) en una caja hay dos objetos, en otra caja hay uno y el resto está vacía; 2) en una caja hay tres objetos, en otra hay dos y el resto de cajas está vacía. En definitiva, $p(n)$ es igual al número de formas de colocar n objetos iguales en n cajas iguales. Hemos visto como las funciones generadoras son útiles para este tipo de problemas y con las particiones de enteros tenemos otra forma de abordar este tipo de problemas.

4.6. Distribución de k objetos en n cajas

Existen diversos tipos de estructuras de problemas de distribución. Con la finalidad de clasificar los los problemas de distribución que hemos ido viendo se recogen en la tabla siguiente algunas técnicas útiles para su resolución según la tipología. No obstante, hay que aclarar que para un mismo tipo de problema de distribución existen distintas vías de resolución y que, por tanto, la tabla siguiente es solo orientativa. Por otra parte, la tabla tampoco recoge todas las posibilidades, particularmente porque el apartado de restricciones al número de objetos por cada caja (destinatario) queda abierto.

Cajas (n) / Objetos (k)	restricciones	diferentes	iguales
diferentes	Sin restricción	VR_n^k	$S(k,n)$
	Ninguna caja vacía	Apl. sobreyectivas	$S(k,n)$
	Al número de objetos por cada caja	Coef. Multin.	Coef. Mult.
iguales	Sin restricción	CR_n^k/func. gen.	func. gen./$p(n)$
	Ninguna caja vacía	$\binom{k-1}{n-1}$	func. gen./$p_k(n)$
	Al número de objetos por cada caja	func. gen.	func. gen.

4.6.1. Ejemplos

Ejemplo 4.44 *Si queremos saber el número de formas en las que podemos poner tres carteles diferentes en dos tablones diferentes, estamos ante un problema de distribución de tres objetos diferentes en dos cajas diferentes y no existe ninguna restricción relativa a los objetos; por tanto, el número es* $VR_2^3 = 8$. *Si quisiéramos que ninguno de los dos tablones quedase vacío, el número será entonces* $f(3,2) = 2^3 - C_2^1 1^3 = 6$.

Ejemplo 4.45 *Supongamos que ahora que deseamos colocar* 12 *carteles diferentes en* 5 *tablones diferentes y que todos los tablones debe tener al menos un cartel. En este caso, el número de formas será* $f(12,5)$; *en general para* k *carteles diferentes y cinco tablones diferentes el número será* $f(k,5)$, *pero con la condición de que* $k \geq 5$.

Ejemplo 4.46 *Si tenemos* 5 *tablones diferentes para colocar* 12 *carteles pero que se repiten en tres grupos distintos entre ellos, de modo que hay del modelo* 1 *tres carteles, del modelo* 2 *hay cinco carteles y del modelo* 3 *hay cuatro carteles. En este caso el número de formas distintas para colocar los carteles es* $\binom{12}{3,5,4}$.

Ejemplo 4.47 *Supongamos que ahora queremos distribuir* 12 *carteles iguales en* 5 *tablones diferentes, el número de formas será igual al de soluciones no negativas de la ecuación*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_5 = 12,$$

que es $CR_5^{12} = C_{16}^{12}$.

También podemos abordarlo haciendo uso de las funciones generadoras. La función generadora asociada es

$$\begin{aligned} g(x) &= (1 + x + x^2 + \ldots)^5 \\ &= \frac{1}{(1-x)^5} \\ &= \binom{4}{0}x^0 + \binom{5}{1}x + \binom{6}{2}x^2 + \binom{7}{3}x^3 + \ldots \end{aligned}$$

El coeficiente a_{12} *de* x^{12} *es* $\binom{16}{12} = C_{16}^{12}$.

Ejemplo 4.48 *Si quisiéramos que al distribuir los* 12 *carteles iguales entre los* 5 *tablones diferentes, ningún tablón quedara sin algún cartel, entonces el número de formas posibles sería* $\binom{11}{4}$.

Ejemplo 4.49 *Supongamos que ahora queremos distribuir* 12 *carteles idénticos en* 5 *tablones diferentes pero de modo que en el primer tablón haya entre* 2 *y* 4 *carteles, en el segundo y en el tercero haya entre* 1 *y* 3*, en el cuarto y quinto haya menos de* 3*. Se trataría de encontrar las soluciones enteras de* $x_1 + x_2 + \ldots + x_5 = 12$ *con las restricciones siguientes:* $2 \leq x_1 \leq 4$, $1 \leq x_2 \leq 3$, $1 \leq x_3 \leq 3$, $x_4 \leq 2$ *y* $x_5 \leq 2$*. Podemos considerar para cada tablón la función dada por* $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ *pero teniendo en cuenta las restricciones correspondientes, así tendremos las siguientes funciones:*

tablón	*función*
1	$g_1(x) = x^2 + x^3 + x^4$
2	$g_2(x) = x + x^2 + x^3$
3	$g_3(x) = x + x^2 + x^3$
4	$g_4(x) = 1 + x + x^2$
5	$g_5(x) = 1 + x + x^2$

Tendremos la función generadora $g(x) = (x^2 + x^3 + x^4) \cdot (x + x^2 + x^3)^2 \cdot (1 + x + x^2)^2$. *La solución será el coeficiente* a_{12} *de* x^{12} *de* $g(x)$.

Ejemplo 4.50 *Si queremos saber cuántas formas hay de empaquetar* 15 *CD's diferentes en* 3 *cajas idénticas, podemos pensar en el conjunto de los CD's,* A*, cuyo cardinal es* $|A| = 15$. *Lo que queremos es equivalente a conocer el número de formas de hacer una partición del conjunto* A *en tres clases disjuntas o bien en dos (quedaría una caja vacía) o bien en una sola caja (quedarían dos cajas vacías). Por tanto, la solución es* $S(15,1) + S(15,2) + S(15,3)$.

Ejemplo 4.51 *Si queremos embalar* 15 *CD's diferentes para lo que disponemos de tres cajas iguales, de modo que en cada caja haya al menos un juego, estaremos ante particiones del conjunto formados por los CD's en tres partes no vacías, por lo tanto se trata de* $S(15,3)$.

Ejemplo 4.52 *Si queremos embalar 15 CD's diferentes para lo que disponemos de tres cajas idénticas, de modo que en la primera caja haya cinco juegos, en la segunda siete juegos y en la tercera tres, se trata de ver cuántas particiones podemos hacer en un conjunto de* 15 *elementos en clases disjuntas de siete, cinco y tres elementos cada una. La estructura del problema es parecida a la del Ejemplo 4.46, pero ahora los destinatarios (las cajas en este caso) no son diferentes como lo eran los destinatarios (los tablones) en el otro ejemplo. Por tanto, ahora hay que dividir por las permutaciones.*

Ejemplo 4.53 *Si queremos distribuir* 12 *carteles iguales en* 5 *tablones idénticos, estaremos ante las soluciones enteras no negativas de la ecuación* $x_1 + x_2 + \ldots + x_5 = 12$. *Pero debemos tener cuidado porque hay una restricción no explícita. Al ser los tablones iguales, por ejemplo, la distribución* $1,3,4,2,2$ *es la misma que la distribución* $4,2,1,2,3$*, pues ambas nos indican que en un tablón hay un cartel, en otros dos hay dos carteles, otro más tiene tres carteles y el que queda tiene cuatro carteles. Como los tablones son idénticos no podemos distinguir el lugar de colocación. Para resolver este problema basta imponer para el cálculo un orden en los carteles por tablón; de modo que fijamos* $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$.

De aquí que $x_2 = x_1 + a$*, con* $a \geq 0$. *Tendremos que* $x_3 = x_2 + b = x_1 + a + b$*, con* $b \geq 0$. *Para* x_4 *tendremos* $x_4 = x_3 + c = x_1 + a + b + c$*, con* $c \geq 0$. *Finalmente*

$$x_5 = x_4 + d = x_1 + a + b + c + d,$$

con $d \geq 0$. *Por tanto, nos quedará*

$$\begin{aligned} x_1 + (x_1 + a) + (x_1 + a + b) + (x_1 + a + b + c) + (x_1 + a + b + c + d) &= \\ &= 5x_1 + 4a + 3b + 2c + d \\ &= 12. \end{aligned}$$

Se trata entonces de conocer las soluciones enteras no negativas de esta última ecuación, $5x_1 + 4a + 3b + 2c + d = 12$. *Le asociamos la función generadora*

$$\begin{aligned} g(x) &= \underbrace{(1+x^5+x^{10}+\ldots)}_{\text{van de 5 en 5}} \cdot \underbrace{(1+x^4+x^8+\ldots)}_{\text{van de 4 en 4}} \cdot \underbrace{(1+x^3+x^6+\ldots)}_{\text{van de 3 en 3}} \\ &\cdot \underbrace{(1+x^2+x^4+\ldots)}_{\text{van de 2 en 2}} \cdot (1+x+x^2+x^3+\ldots). \end{aligned}$$

El coeficiente a_{12} *de* x^{12} *en* $g(x)$ *es la solución.*

Ejemplo 4.54 *Supongamos que ahora tenemos* 15 *CD's iguales que queremos empaquetar en 3 cajas idénticas, de modo que en cada caja haya al menos un CD. La situación inicialmente es similar a la del Ejemplo 4.53. La ecuación ahora es* $x_1 + x_2 + x_3 = 15$. *Pero ahora tenemos la restricción adicional de que cada caja debe contener al menos un objeto (CD).*

Supongamos que tenemos ya un CD en cada caja. Para $i \in \{1, 2, 3\}$, *haciendo el cambio* $x_i = y_i + 1$ *tenemos la ecuación* $y_1 + y_2 + y_3 = 12$. *Como las cajas son idénticas, como en el Ejemplo 4.53 hemos de poner la restricción* $y_1 \leq y_2 \leq y_3$. *Por tanto,* $y_2 = y_1 + a$, *con* $a \geq 0$ *e* $y_3 = y_2 + b = y_1 + a + b$, *siendo* $b \geq 0$. *Tendremos*

$$y_1 + (y_1 + a) + (y_1 + a + b) = 3y_1 + 2a + b = 12 \qquad cony_1, a, b \geq 0.$$

Sea la función generatriz

$$g(x) = (1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots) \cdot (1 + x^2 + x^4 + \ldots) \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots).)$$

La solución es el coeficiente a_{12} *de* x^{12} *en* $g(x)$.

También podríamos haber aborrdado la cuestión haciendo uso de las particiones de un entero. Si tenemos 15 *objetos iguales (los CD's), podemos identificarlos con* 15 *unos. Si tenemos* 3 *cajas iguales para colocarlos y no puede quedar ninguna caja vacía, tendremos una distribución del tipo* $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 15$, *con* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq 1$. *Podemos considerar que en cada caja se coloca un* 1 *(o un objeto) al menos, luego la solución es* $p_3(15) = 19$.

Ejemplo 4.55 *Supongamos que queremos embalar* 15 *CD's iguales en* 3 *cajas idénticas de modo que en la primera caja haya entre* 5 *y* 9 *CD's, en la segunda entre* 3 *y* 5 *y que en la tercera caja haya menos de* 4. *Tendremos* $x_1 + x_2 + x_3 = 15$, *con* $5 \leq x_1 \leq 9$, $3 \leq x_2 \leq 5$ *y* $x_3 \leq 3$. *Tenemos como función generadora*

$$g(x) = (x^5 + x^6 + \ldots + x^9)(x^3 + x^4 + x^5)(1 + x + x^2 + x^3).$$

Si las cajas fueran diferentes la solución es

$$\text{el coeficiente } a_{15} \text{ de } x^{15} \text{ en } g(x). \tag{4.1}$$

Pero las cajas son idénticas, esta restricción podemos identificarla requiriendo que $x_1 \geq x_2 \geq x_3$*. Examinando las soluciones de (4.1) que verifican la restricción indicada. Obtendremos que en este caso son las mismas* 6 *posibilidades que en (4.1), que se corresponden con*

$$(7,5,3),(8,5,2),(8,4,3),(9,5,1),(9,4,2),(9,3,3).$$