Tema 3. Trabajo y Energía

Problemas resueltos.

Problema 1.- ¿Cuál es la fuerza media que ha sido necesaria para parar una bala de masa 20 g y velocidad 250 m/s cuando penetra en un bloque de madera una distancia de 12 cm?

Solución:

Cuando penetra dentro del bloque, la bala experimenta una fuerza media, $\vec{F}_{med}$, que la frena. El trabajo hecho por la fuerza neta sobre la bala es igual a la variación de energía cinética.

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_0^2.$$

Sabiendo que $\vec{F}$ tiene un valor medio:

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{s} \simeq \vec{F}_{med} \cdot \Delta\vec{s} = \vec{F}_{med} \Delta\vec{s} \cos\theta,$$

en donde θ es el ángulo, en éste caso π radianes, que forman $\vec{F}_{med}$ y $\overrightarrow{\Delta s}$. En consecuencia,

$$\vec{F}_{med} = \frac{m}{2} \frac{v_0^2 - v_f^2}{\overrightarrow{\Delta s}}.$$

Sustituyendo los valores numéricos obtenemos $\vec{F}_{med} = 5,2 \times 10^3$ Newtons. Esta fuerza es 30.000 veces mayor que el peso de la bala.

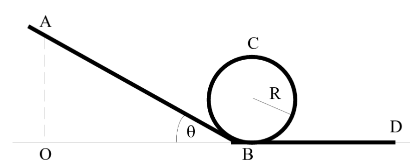
Problema 2.- Un cuerpo de masa m y pequeñas dimensiones desliza sin rozamiento por el raíl de la figura, partiendo desde el punto A en reposo. Si $\mathrm{OA} = 3R$, hallar:

a) el módulo de la velocidad del cuerpo en B, en C, y en D, siendo $\mathrm{BD} = 5R$,

b) el módulo de la fuerza que el cuerpo ejerce sobre el raíl en C,

c) ¿cuánto debe valer OA para que dicha fuerza sea nula?

Solución:



a) En el sistema se conserva la energía total. Por lo tanto, tomando como origen de energía potencial el plano inferior, tenemos:

$$mgh_A = \frac{1}{2} m V_B^2 \Longrightarrow V_B = \sqrt{6gR}$$

$$mgh_C + \frac{1}{2} m V_C^2 = \frac{1}{2} m V_B^2 \Longrightarrow V_C = \sqrt{2gR}$$

$$mgh_A = \frac{1}{2} m V_D^2 \Longrightarrow V_D = V_B = \sqrt{6gR}$$

b) El módulo de la fuerza que el cuerpo ejerce sobre el raíl es el mismo que el módulo de la fuerza que el raíl ejerce sobre el cuerpo (tercera ley de Newton). En el punto C, la segunda ley de Newton aplicada al cuerpo nos da:

$$F_C + mg = m \frac{V_C^2}{R}$$

donde F_C es la fuerza (normal) que el raíl ejerce sobre el cuerpo. Por lo tanto:

$$F_C = m\frac{V_C^2}{R} - mg = mg$$

que es el módulo de la fuerza que el raíl ejerce sobre el cuerpo y, por lo tanto, también el módulo de la fuerza que el cuerpo ejerce sobre el raíl.

c) Del apartado anterior se deduce que para que F_C sea nula, la velocidad en C tiene que ser $V_C = \sqrt{gR}$. Por tanto, basta aplicar otra vez la conservación de la energía para obtener h_A:

$$mgh_A = mgh_C + \frac{1}{2}mV_C^2 \Longrightarrow h_A = \frac{5}{2}R.$$

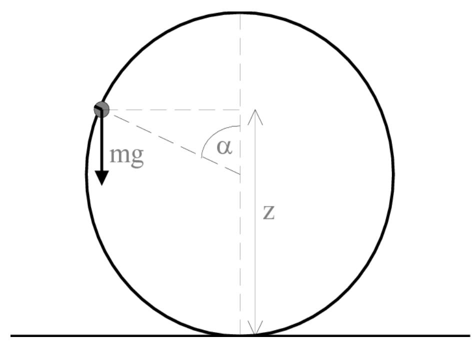
Problema 3.- En una montaña rusa hay un tramo formado por un círculo vertical de radio $R = 5$ m. Se pide:

a) ¿cuál es la velocidad mínima con la que ha de llegar la vagoneta a la parte inferior para que no se caiga de la pista?

b) ¿a qué altura se soltará la vagoneta si la velocidad de entrada es un 25 % inferior a la del aparatado (a)?

Solución:

a) Para que no se caiga de la pista, en la parte superior del círculo de la figura habrá de cumplirse que, al menos, la velocidad sea tal que la fuerza normal ejercida por el raíl sobre la vagoneta sea cero, de forma que la segunda ley de Newton aplicada a la vagoneta nos da:



$$mg = m\frac{v^2}{r} \Longrightarrow v^2 = gR.$$

Por lo tanto, la velocidad en el punto más alto del círculo habrá de ser, como mínimo, $v = \sqrt{gR} = 7$ m/s. La velocidad mínima de entrada en el círculo, v_{min}, se obtiene de la conservación de la energía mecánica:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_{min}^2 \Longrightarrow v_{min}^2 = 5gR.$$

b) Por el mismo razonamiento anterior, la vagoneta se saldrá de la pista a partir del momento en el que la fuerza normal que ejerce el raíl sobre la vagoneta sea cero. Supongamos que ese punto de la trayectoria está situado a una altura z sobre la horizontal, según se indica en la figura (se supone que la vagoneta entra en el círculo viniendo desde la derecha y comienza a subir por la pared izquierda del círculo).

Para una velocidad inicial v_0, a una altura z la vagoneta llevará una velocidad determinada por la conservación de la energía mecánica, por lo que tendremos:

$$v_0^2 = v^2 + 2gz$$

Por otra parte, si la vagoneta empieza a separarse de los raíles justo en la posición fijada por z (o por el valor del ángulo α, véase la figura), por la segunda ley de Newton se cumple que

$$m\frac{v^2}{R} = mg\cos\alpha \Longrightarrow v^2 = gR\cos\alpha.$$

donde hemos tenido en cuenta que la única fuerza que actúa sobre la vagoneta es su peso, por lo que su componente radial es la que da lugar a la aceleración centrípeta.

Usando ambas ecuaciones podemos obtener el valor de α para el que la vagoneta se separa de los raíles si llega al círculo con velocidad v_0:

$$\cos\alpha = \frac{v_0^2 - 2gz}{gR}.$$

De la geometría de la figura se deduce de inmediato que

$$\cos\alpha = \frac{z - R}{R}.$$

Al igualar ambas expresiones para $\cos\alpha$ obtenemos que :

$$z = \frac{v_0^2}{3g} + \frac{R}{3}.$$

Si $v_0 = (3/4)v_{min}$ la altura z resulta ser

$$z = \frac{61}{48}R,$$

que es un valor menor que $2R$, como debe ser (nótese que si hubiéramos sustituido v_0 por $v_{min} = \sqrt{5gR}$, habríamos encontrado el resultado esperado de que $z = 2R$).

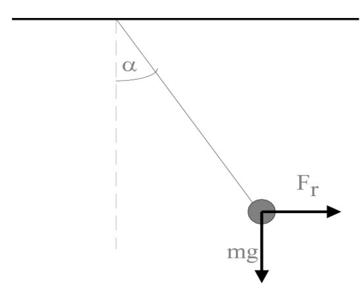
Problema 4.- Del techo de un vagón de 10 Tm pende una esfera colgada de un hilo. El conductor aplica el freno durante tres segundos, cambiando la velocidad uniformemente de 18 km/hora a 6 km/hora. Hallar:

a) el trabajo realizado por la fuerza de frenado durante ese tiempo;

b) el ángulo máximo de desviación del hilo que soporta la esfera.

Solución:

a) La aceleración de frenada al pasar de v_0 a v_t en $t = 3$ seg. es:



$$a = \frac{v_t - v_0}{t} = 1,1 \text{ m/s}^2$$

y que el espacio recorrido durante la frenada es:

$$x = \frac{v_t + v_0}{2}t = 10 \text{ m}.$$

El trabajo efectuado durante la frenada es:

$$W = F_r \cdot x = Max = \frac{1}{2}M\left(v_t^2 - v_0^2\right)$$

en donde M es la masa del vagón.

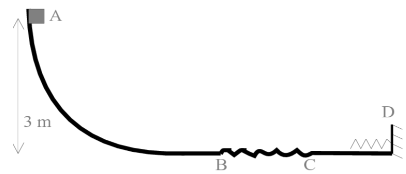
b) Siendo F_i la fuerza de inercia, debida al frenado, que actua sobre la esfera y mg es el peso de ésta, igualamos las componentes de ambas en la dirección perpendicular al hilo:

$$mg\sin\alpha = ma\cos\alpha; \qquad \tan\alpha = \frac{a}{g} = \frac{1,1}{9,8} \Rightarrow \alpha = 6,4^o$$

Problema 5.- Un bloque de 10 kg se suelta desde el punto A sobre un carril ABCD como se ve en la figura. El carril no presenta fricción en ninguna parte excepto en la parte BC en la figura, de longitud 6 m (representamos exageradamente esa fricción con las ondulaciones del carril). El bloque viaja hacia abajo del carril hasta chocar con un resorte cuya constante de fuerza es k = 2,250 N/m y lo comprime una distancia de 0,3 m desde su posición de equilibrio antes de llegar al reposo momentáneamente. Determine el coeficiente de fricción cinético en la parte BC del carril y el bloque.

Solución:

Por conservación de la energía mecánica tendremos que la energía potencial gravitatoria en el punto A, más el trabajo producido por la fuerza de rozamiento entre B y C será igual a la energía potencial elástica adquirida por el muelle en D: $V_A + W_R = V_D$, por lo tanto



$$mgh - \mu mgBC = \frac{1}{2}kx^2$$

con lo que:

$$\mu = \frac{1}{mgBC}(mgh - \frac{1}{2}kx^2) = 0,3278$$

Problema 6.- Se empuja un bloque de masa $m = 0,5$ kg contra un resorte horizontal de masa despreciable, comprimiendo el resorte una distancia Δx (véase figura). La constante del resorte es 450 N/m. Cuando se suelta el bloque viaja a lo largo de una superficie horizontal y sin fricción hasta el punto B, en el que empieza a moverse hacia arriba por la parte interior de un carril circular vertical de radio $R = 1$ m. La velocidad del bloque en la parte inferior del carril es $v_B = 12$ m/s, y el bloque experimenta una fuerza de rozamiento mientras se desliza a lo largo del carril circular, que podemos considerar constante, y que es de 7 N. Se pide:

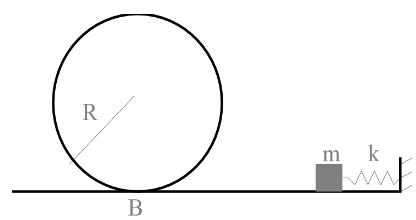
a) ¿Cuál fue la compresión inicial del resorte?

b) ¿Cuál será la velocidad del bloque en el punto más alto del carril circular?

c) ¿Alcanzará el bloque el punto más alto del carril o caerá antes de alcanzarlo?.

Solución:

a) Por conservación de la energía mecánica, la energía potencial elástica inicial del muelle será igual a la energía cinética del bloque en B, por lo que:



$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_B^2; \quad x = \sqrt{\frac{m}{k}}v_B = 0{,}4 \text{ m}$$

a) Por conservación de la energía mecánica, la energía cinética en B, más el trabajo de rozamiento será igual a la suma de las energías cinética y potencial del bloque en el punto más alto del carril que llamaremos C; por lo tanto:

$$E_B^{cin} + W_R = E_C^{cin} + E_C^{pot}$$

Como nos dicen que la fuerza de rozamiento es constante, W_R será igual al producto del valor de la fuerza de rozamiento F_R por la distancia recorrida sobre el carril circular (πR), con signo negativo, ya que la fuerza y el desplazamiento tienen sentidos contrarios. Por lo tanto,

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \pi RF_R = \frac{1}{2}mv_C^2 + mg2R$$

por lo tanto,

$$v_C = \sqrt{v_B^2 - \frac{2\pi RF_R}{m} - 4gR} = 4 \text{ m/s}$$

c) Para que el bloque llegue al punto C, su velocidad tiene que ser, como mínimo, tal que en ese punto la fuerza normal del carril sobre el bloque sea cero. En ese caso, la segunda ley de Newton nos dice que:

$$m\frac{v^2}{R} = mg; \quad v = \sqrt{gR} = 3,1 \text{ m/s}$$

Por lo tanto, como la velocidad en C es mayor que 3,1 m/s, el bloque **sí** alcanzará el punto C.

Problema 7.- Un bloque de 5 kg se mantiene contra un muelle, cuya constante de fuerza es 20 N/cm, comprimiéndolo 3 cm. El bloque se libera y el muelle se extiende impulsando el bloque a lo largo de una superficie horizontal rugosa. El coeficiente de rozamiento entre la superficie y el bloque es 0,2. Se pide determinar:

a) el trabajo realizado sobre el bloque por el muelle al extenderse desde su posición comprimida a su posición de equilibrio,

b) el trabajo realizado por fricción sobre el bloque mientras se desplaza los 3 cm hasta la posición de equilibrio del muelle,

c) la velocidad del bloque al alcanzar el muelle su posición de equilibrio,

d) la distancia que recorrería el bloque sobre la superficie rugosa si no estuviera sujeto al muelle.

Solución:

a) El trabajo que puede realizar el muelle al extenderse hasta su posición de equilibrio se puede calcular de dos maneras: haciendo el cálculo a partir de la definición de trabajo, o dándose cuenta que dicho trabajo tiene que ser igual a la energía potencial almacenada en el muelle. Es decir:

$$W_m = \int_{x_0}^{x_t} \vec{F(x)} d\vec{x} = -\int_{-3}^{0} Kx dx = \left[\frac{1}{2}Kx^2\right]_{-3}^{0} = 0,9 \text{ julios}$$

b) Para calcular el trabajo realizado por fricción basta aplicar la definición de trabajo y darse cuenta que en este caso la fuerza de rozamiento no depende de la posición, por lo que tendremos:

$$W_r = -F_r \Delta x = -\mu mg \Delta x = -0,3 \text{ julios}$$

c) Basta aplicar el teorema de las fuerzas vivas, que en este caso equivale a decir que la energía potencial del muelle se tiene que invertir en vencer el trabajo de rozamiento y en proporcionar energía cinética al bloque, es decir:

$$W_m = Ec_b - W_r$$

de donde,

$$Ec_b = W_m + W_r \qquad \text{es decir,} \qquad Ec_b = 0,6 \text{ julios} \Longrightarrow v = \sqrt{\frac{2Ec_b}{m}} = 50 \text{ cm s}^{-1}$$

d) En este caso toda la energía cinética se tiene que consumir por rozamiento, por lo tanto

$$\frac{1}{2}mv^2 = F_r x, \qquad \text{de donde} \qquad x = \frac{v^2}{2\mu g} = 6 \text{ cm.}$$