Capítulo 3

Combinaciones y números combinatorios

No siempre interesa el orden en el que se distribuyen los elementos. Cuando el orden no interesa en la distribución sino únicamente la composición de la misma se dice que se trata de una combinación.

3.1. Combinaciones simples

Se llaman combinaciones de n elementos, tomados de k en k, a las distribuciones posibles integradas por k elementos de los n dados y de modo que dos combinaciones cualesquiera (dos de esas distribuciones) se diferencian por la naturaleza de algún elemento (pero no por el orden de los elementos en la distribución).

Si un elemento no puede repetirse estamos ante las combinaciones simples, que se denotarán por C_n^k o $C_{n,k}$.

3.1.1. Número de las combinaciones simples y obtención de las mismas

Teorema 3.1 *Para $n, k \in \mathbb{Z}^+$, con $k \leq n$ se tiene que el número de combinaciones simples de n objetos tomados de k en k es:*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

<u>Demostración</u>.

El número total de listas u ordenaciones posibles será V_n^k. Para cada grupo de k elementos de estas variaciones el orden no influye; es decir, hay $k!$ ordenaciones que son una misma combinación. Luego

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{k!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

□

Es interesante observar que la fórmula anterior coincide con la de permutaciones con repetición de n elementos en los que se repiten k de un mismo tipo y $n-k$ de otro tipo:

$$PR_n^{k,n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

A la igualdad $C_n^k = PR_n^{k,n-k}$ se puede llegar también sin recurrir a las variaciones V_n^k. En efecto, consideremos los n elementos ordenadamente. Cada combinación que se pueda formar la identificamos mediante una n-upla de ceros y unos, de modo que si el elemento está en la combinación escribimos un 1 y si no está un 0. Por ejemplo, si se trata de $\{a, b, c, \ldots, i, j\}$ y consideremos la combinación de ellos de clase 5 siguiente: a, c, f, h, i. Le corresponde la 10-upla (1,0,1,0,0,1,0,1,1,0). Y recíprocamente, a una cierta distribución de ceros y unos en una 10-upla, por ejemplo a $(0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)$ le corresponde una combinación, en este caso b, c, d, g, j. Vemos que a cada combinación simple C_n^k le corresponde una distribución (n-upla) de k unos y $n-k$ ceros. Y que a cada n-upla de este tipo le corresponde una combinación de C_n^k.

Ahora bien, el número de n-uplas de k unos y $n-k$ ceros es $PR_n^{k,n-k}$, luego:

$$C_n^k = PR_n^{k,n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

3.1.2. Obtención de todas las combinaciones simples

Observemos en primer lugar que las combinaciones están relacionadas con el número de subconjuntos de un conjunto dado como se vio con anterioridad. Si A es un conjunto con cardinal finito n, se tiene que existen 2^n subconjuntos suyos, por lo que el cardinal del conjunto potencia es $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$. ¿Cuántos subconjuntos tienen un único elemento?, pues $n = C_n^1$. ¿Cuántos subconjuntos hay de 2 elementos?, claramente C_n^2. Y así sucesivamente, resultando que el número de subconjuntos con un determinado número de elementos k, con $k \leq n$, es C_n^k, y así

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_{n-1}^n + C_n^n = 2^n.$$

Veamos ahora cómo obtener todas las combinaciones de un cierto conjunto de elementos. Por simplicidad, consideremos las combinaciones de los elementos del conjunto $\{a, b, c, d\}$.. El procedimiento a seguir es ir construyendo las sucesivas combinaciones k-arias con $k = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{array}{lcccc}
k=1 & a & b & c & d \\
k=2 & ab & ac & ad & \\
 & & bc & bd & \\
 & & & cd & \\
k=3 & abc & abd & acd & \\
 & & bcd & & \\
k=4 & abcd & & &
\end{array}$$

El mismo procedimiento se seguiría para cualquier número n de elementos que tuviese el conjunto.

3.2. Números combinatorios

Definición 3.2 *Dados n y k enteros no nulos, con $0 \leq k \leq n$, se define número combinatorio de* **orden** *n e* **índice** *k, se escribe como $\binom{n}{k}$, y se lee "n sobre k" a la expresión:*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Observemos que $\binom{n}{k}$ coincide con el número C_n^k de combinaciones simples de n elementos tomados de k en k.

Algunas propiedades inmediatas son las siguientes.

Proposición 3.3 *Dados n y k enteros no nulos, con $0 \leq k \leq n$, los números combinatorios verifican:*

1. $\binom{n}{0} = 1$.
2. $\binom{n}{n} = 1$.
3. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
4. *Fórmula de recurrencia de Pascal:* $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$, *para* $n \geq 2$ *y* $1 \leq k \leq n-1$.

Demostración. Las dos primeras propiedades son inmediatas, pues $\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!0!} = 1$ y $\binom{n}{n} = \frac{n!}{0!n!} = 1$.

Como $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ y $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ se sigue que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, resultando que los números combinatorios equidistantes de los extremos (0 y n) son iguales.

La fórmula de recurrencia de Pascal es de especial utilidad. Podemos demostrarla aritméticamente y también con un razonamiento combinatorio. Lo vamos a ver de las dos maneras.

$$
\begin{aligned}
\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!}+\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-k)}{(n-k)!k!}+\frac{(n-1)!k}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{n(n-1)!(n-k)}{n(n-k)!k!}+\frac{n(n-1)!k}{n(n-k)!k!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!}\left[\frac{n-k}{n}+\frac{k}{n}\right] \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!}=\binom{n}{k}.
\end{aligned}
$$

Veamos ahora la demostración a partir de un razonamiento combinatorio. La fórmula de Pascal, en términos de combinaciones simples, se corresponde con

$$C_{n-1}^{k}+C_{n-1}^{k-1}=C_{n}^{k}.$$

Consideremos los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ y sus combinaciones de k elementos. Dividimos estas combinaciones en dos clases:

1. Las combinaciones que contengan al elemento a_n.
2. Las combinaciones que no contengan a a_n.

Si en la primera clase eliminamos a_n de todas las combinaciones que pertenecen a dicha clase, tendremos combinaciones de los elementos $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ tomados de $k-1$ en $k-1$, cuyo número es C_{n-1}^{k-1}; por lo tanto, en la primera clase hay C_{n-1}^{k-1} combinaciones de $a_1, \ldots, a_n$.

En la segunda clase lo que tenemos son combinaciones de k elementos de $a_1, \ldots, a_{n-1}$, cuyo número es C_{n-1}^{k}.

Como las dos clases son disjuntas, es claro que $C_n^k = C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^{k}$y así que

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}.$$

□

3.2.1. Triángulo de Tartaglia. Cuadrado aritmético

Los números combinatorios aparecen en múltiples y variadas situaciones. A continuación veremos la presencia de los números combinatorios en algunas situaciones con una cierta característica geométrica.

Si escribimos, sucesivamente en filas de orden creciente, en cada caso, todos los números combinatorios desde índice 0 hasta índice n, obtenemos la siguiente distribución.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ - & - & - & - & - & - & - \; - \; - \; - \end{array}$$

cuyos valores son:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ - & - & - & - & - & - & - \; - \; - \; - \end{array}$$

que por su disposición en forma de triángulo se trata de un ”triángulo aritmético” conocido como triángulo de Pascal o triángulo de Tartaglia.

Observemos que los números de cada fila se obtienen de sumar los números de la fila inmediatamente anterior que se encuentran a su izquierda y derecha; así el segundo 3 de la tercera fila es el resultado de la suma $1 + 2 = 3$ de los números 1 y 2, respectivamente a izquierda y derecha del 3 en la segunda fila. Y ello se corresponde con la Fórmula de Pascal.

Caminando por Manhattan

Manhattan, en New York, está urbanizado como una cuadrícula rectangular de $n \times k$ manzanas (siendo n el indicador de las filas horizontales y k el de las verticales), de modo que entre n filas de manzanas en horizontal hay $n - 1$ calles horizontales y entre k filas de manzanas miradas en vertical hay $k - 1$ calles.

$$\begin{array}{cccccc} \boxed{\text{A}} & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \boxed{\text{B}} \end{array}$$

Supongamos que un ciudadano quiere ir caminando desde el punto A de la figura anterior hasta el punto B por el camino más corto (desplazandose siempre de izquierda a derecha o de arriba hacia abajo). ¿Por cuántos caminos puede llegar desde A hasta B?

Convenimos en codificar los desplazamientos como sigue. Si se desplaza hacia la derecha lo anotamos con un 0 y si va hacia abajo lo codificamos con un 1. En cada cruce puede ir a la derecha o hacia abajo, luego en cada cruce debemos asignar un 0 o un 1. El número de veces que gira a la derecha debe ser k (en el caso del dibujo de la figura es 5) y el número de veces que debe ir hacia abajo debe ser n (en el caso de la figura 4), pues de lo contrario no llegaría al punto B. Por tanto, con esta codificación, tendremos una lista de k ceros y n unos. Cada permutación de estos $k+n$ elementos con k ceros y n unos se corresponde con un camino posible y, recíprocamente, cualquier camino posible tendrá una correspondencia con una lista de $n+k$ elementos de los que k son ceros y n son unos. Luego, el número de caminos posibles de A a B será

$$PR_{n+k}^{n,k} = \frac{(n+k)!}{n!k!} = C_{n+k}^{n} = C_{n+k}^{k}.$$

En el caso de la figura habría $C_9^4 = C_9^5$ caminos posibles desde A hasta B.

Cuadrado aritmético

Observemos que si consideramos la intersección de la fila 4 y la columna 5, contando en A la fila y columnas cero, es decir $(0,0)$, tendremos que podemos llegar a B de C_{7+6}^{6} formas. Pongamos en esa intersección el valor numérico C_{7+6}^{6} y, del mismo modo, en cada intersección de cada fila n y columna k pongamos el valor numérico de C_{n+k}^{k}; es decir, el número de caminos que llegan a ese punto intersección desde A. Tendremos:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \dots \\
 & \square & & \square & & \square & & \square & & \square & & \dots \\
1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & \dots \\
 & \square & & \square & & \square & & \square & & \square & & \dots \\
1 & & 3 & & 6 & & 10 & & 15 & & 21 & \dots \\
 & \square & & \square & & \square & & \square & & \square & & \dots \\
1 & & 4 & & 10 & & 20 & & 35 & & 56 & \dots \\
 & \square & & \square & & \square & & \square & & \square & & \dots \\
1 & & 5 & & 15 & & 35 & & 70 & & 126 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Denominamos a esta tabla cuadrado aritmético y en él cada número se corresponde con las combinaciones C_{n+k}^{k}, para la intersección de la fila n y la columna k.

Observemos que cada número se obtiene sumando el de su izquierda con el que está arriba; de modo que

$$C_{n+k}^{k} = C_{n+k-1}^{k-1} + C_{n+k-1}^{k};$$

es decir, la relación de recurrencia que obtuvimos anteriormente, que se corresponde con la Fórmula de Pascal. Y, a su vez, esta relación es deducible directamente desde el razonamiento de nuestro propio problema. En efecto, para llegar por ejemplo a B (casilla $(5,4)$) puede hacerse viniendo desde las casillas $(4,4)$ y $(5,3)$, luego los caminos finales serán la suma de los unos y los otros. En general, para llegar a la casilla (n,k) podemos hacerlo viniendo desde las casillas $(n-1,k)$ y $(n,k-1)$, luego el número de caminos que llegan a (n,k) es la suma de ambos; es decir $C_{n+k}^{k} = C_{n+k-1}^{k} + C_{n+k-1}^{k-1}$.

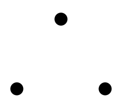
Por otra parte, debemos observar que de la relación $C_{n+k}^{k} = C_{n+k}^{n}$ se deduce que el cuadrado aritmético obtenido anteriormente es simétrico con respecto a la diagonal principal.

También cabe observar que si giramos el Triángulo de Tartaglia obtenemos el cuadrado aritmético, de modo que las filas del cuadrado se corresponden con las líneas paralelas a los lados del Triángulo y la propiedad anterior se corresponde con la ya observada en el triángulo.

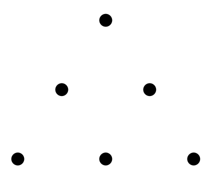
Números figurados

Si observamos la tercera fila del cuadrado aritmético o, equivalentemente, la tercera paralela a los lados del Triángulo de Tartaglia, tenemos la sucesión $1, 3, 6, 10, \ldots$. Números que se conocen como números triangulares. La razón de esta denominación se hace evidente tras observar la siguiente figura

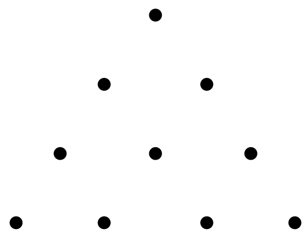
1



3



6



10

Cada número, con la disposición dada, se corresponde con un triángulo de puntos. El enésimo número triangular lo denotamos por T_n. Cada número es el resultado de la suma de los puntos de cada fila; así: $T_1 = 1$, $T_2 = 1 + 2 = 3$, $T_3 = 1 + 2 + 3 = 6$, $T_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, etc. Así, $T_n = 1 + \ldots + n$ es la suma de los primeros n números naturales, luego es $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ y a su vez está en la tercera paralela del lado del triángulo de Tartaglia, luego es $T_n = C^2_{n+1}$ y también está en la tercera fila del cuadrado aritmético ocupando la posición (columna) $n - 1$ (porque en el cuadrado empezamos contando filas y columnas a partir de 0, mientras que con T_n estamos contando a partir de 1, por lo que será C^{n-1}_{n+1}. Así:

$$T_n = C^2_{n+1} = C^{n-1}_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Podemos generalizar esta forma geométrica de determinar números. Así, los triángulos de puntos se pueden superponer como capas consecutivas formando tretraedros. Si consideramos una primera capa tendríamos un solo punto, correspondiente a T_1. Si consideramos dos capas, podemos poner en la superior a T_1 (un punto) y en la inferior a T_2 (un triángulo de tres puntos) obteniendo un tretaedro que tiene en total 4 puntos. Podemos considerar un tretaedro de tres capas: en la superior T_1, después T_2 y finalmente la inferior T_3, tendremos un tretaedro con 10 de puntos, resultado de sumar los correspondientes a T_1, T_2 y T_3. Y así sucesivamente. Una visión dinámica puede verse en `https://www.geogebra.org/m/mNjemk33`.

Cada número obtenido de esta forma lo denominamos número tretaédrico y al enésimo número tretaédrico lo denotaremos por P_n. tenemos que $P_n = T_1 + T_2 + \ldots + T_n$. Si vamos construyendo la sucesión de los números tretaédricos, paso a paso, observemos que obtenemos $1, 4, 10, 20, 35, 56, \ldots$ que se corresponde con la fila tres del cuadrado aritmético (recordemos que se empezaba a contar en la cero) y, lógicamente, con la tercera paralela al lado del triángulo de Tartaglia. Por tanto, la expresión general de un número tretaédrico será

$$P_n = C^3_{n+2} = C^{n-1}_{n+2} = \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

3.2.2. El binomio de Newton

Los números combinatorios también están presentes en el desarrollo de expresiones algebraicas.

Teorema 3.4 Teorema del binomio

Sea $m \in \mathbb{Z}^+$, se verifica que:

$$\begin{aligned}(x+a)^m &= \binom{m}{0}x^m + \binom{m}{1}x^{m-1}a + \binom{m}{2}x^{m-2}a^{m-2} + \ldots \\ &+ \binom{m}{m-2}x^2a^{m-2} + \binom{m}{m-1}xa^{m-1} + \binom{m}{m}a^m.\end{aligned}$$

Demostración. Lo vemos por inducción sobre m. Para $m = 1$ se verifica, de forma obvia, que $(x+a)^1 = \binom{1}{0}x + \binom{1}{1}a$. Supongamos que es cierto para $m = p$, lo vemos para $m = p+1$.

$$\begin{aligned}(x+a)^{p+1} &= (x+a)(x+a)^p \\ &= (x+a)\left[\binom{p}{0}x^p + \binom{p}{1}x^{p-1}a + \ldots + \binom{p}{p-1}xa^{p-1} + \binom{p}{p}a^p\right] \\ &= \binom{p}{0}x^{p+1} + \binom{p}{1}x^pa + \ldots + \binom{p}{p-1}x^2a^{p-1} + \binom{p}{p}xa^p \\ &\quad + \binom{p}{0}x^pa + \binom{p}{1}x^{p-1}a^2 + \ldots + \binom{p}{p-1}xa^p + \binom{p}{p}a^{p+1} \\ &= \binom{p+1}{0}x^{p+1} + \binom{p+1}{1}x^pa + \ldots + \binom{p+1}{p}xa^p + \binom{p+1}{p+1}a^{p+1}.\end{aligned}$$

Donde la última igualdad se obtiene de aplicar las propiedades de los números combinatorios al sumar los términos de la misma potencia en x y a.

□

Observemos que en particular se tiene que

$$\begin{aligned}(x+1)^m &= \binom{m}{0}x^m + \binom{m}{1}x^{m-1} + \binom{m}{2}x^{m-2} + \ldots \\ &+ \binom{m}{m-2}x^2 + \binom{m}{m-1}x + \binom{m}{m}.\end{aligned}$$

Si $x = 1$ se tiene el resultado ya conocido:

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \ldots + \binom{m}{m-2} + \binom{m}{m-1} + \binom{m}{m} = 2^m,$$

que nos indica que el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto A con $|A| = m$, tiene 2^m elementos. En la expresión anterior el total de subconjuntos se obtiene como suma del número de subconjuntos: sin elementos ($\emptyset$), con un elemento, con dos, con tres, etc., hasta llegar al número de subconjuntos con m elementos que es solo uno (el propio conjunto A).

3.3. Combinaciones con repetición

En las combinaciones con repetición los elementos pueden repetirse dentro de una misma distribución. Vamos a obtener su número, para ello necesitaremos previamente de un resultado que lo analizaremos en un caso particular y luego lo veremos como una proposición de carácter general.

Queremos saber cuántas soluciones enteras no negativas tiene la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ o, lo que es lo mismo, ¿de cuántas formas podemos colocar los números en tres posiciones de forma que sumen 5?

Podemos descomponer cada número en suma de unos. El número de unos nos da el número correspondiente a esa solución en cada incógnita x_i. Por ejemplo 11/11/1 o 1/1/111. Luego la cuestión reside en saber ¿de cuántas formas se pueden colocar cinco unos entre siete posiciones posibles, donde las otras dos las ocuparán dos barras /. Consecuentemente el número de soluciones enteras no negativas es $C_7^5 = 21$.

Esto mismo puede formularse como un resultado general.

Lema 3.5 *Sean k y n números naturales, $n \geq 1$. El número de soluciones enteras no negativas de*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k \tag{3.1}$$

es C_{n+k-1}^k.

<u>Demostración</u>. Existe una correspondencia biunívoca entre las soluciones enteras no negativas de (3.1) y las cadenas de $n + k - 1$ elementos compuestas por k unos y $n - 1$ barras. En efecto, a una solución $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = k$ le asignamos la cadena $\underbrace{11\ldots1}_{a_1} / \underbrace{1\ldots1}_{a_2} / \ldots / \underbrace{1\ldots1}_{a_n}$ tal que la suma de todos los unos es k. Recíprocamente, dada una cadena de k unos y $n - 1$ barras, /, le hacemos corresponder la solución $b_1 + b_2 + \ldots + b_n = k$ de (3.1), donde cada b_i es igual al número de unos delante de la barra iésima, con $i = 1, \ldots, n$. Por tanto, el número de soluciones enteras no negativas de (3.1) es igual al número de cadenas de $n + k - 1$ elementos formadas por k unos y $n - 1$ barras.

La cuestión es, entonces, ¿cuántas cadenas existen de ese tipo? o, equivalentemente, ¿de cuántas formas se pueden colocar k unos entre $n + k - 1$ posiciones posibles? y la respuesta, evidentemente, es C_{n+k-1}^k.

□

Teorema 3.6 *El número de combinaciones con repetición de n elementos, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tomados de k en k, CR_n^k, es igual al número de soluciones enteras no negativas de la ecuación*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k \tag{3.2}$$

Demostración. Sea $a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}$ una combinación con repetición de $a_1 a_2 \ldots a_n$ con k elementos. Llamemos

y_1 al número de veces que aparece a_1 en $a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}$

y_2 al número de veces que aparece a_2 en $a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}$

....

y_n al número de veces que aparece a_n en $a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}$

Como $a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}$ tiene k elementos, entonces $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = k$ que es una solución entera no negativa de (3.2).

Recíprocamente, a una solución entera no negativa cualquiera $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = k$ de (3.2) le hacemos corresponder una combinación con repetición de $a_1 a_2 \ldots a_n$, dada por

$$\overbrace{a_1 \ldots a_1}^{y_1}, \overbrace{a_2 \ldots a_2}^{y_2}, \ldots, \overbrace{a_n \ldots a_n}^{y_n};$$

es decir, con y_i veces a_i para $i = 1, \ldots, n$. Esta combinación con repetición tiene obviamente k elementos.

□

Del Lema y Teorema previos, podemos concluir inmediatamente que:

Corolario 3.7 *Se tiene que $CR_n^k = C_{n+k-1}^k$.*

3.3.1. Observaciones

Observemos algunos de los ejemplos, una vez resueltos los ejercicios **34.**, **35.**, **38.**, **39.** y **40.** de este capítulo.

Problema	**n destinatarios diferentes**	**k objetos idénticos**	**ecuación**	**CR**
34.	4 hijos	10 billetes	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$	CR_4^{10}
35.	4 personas	3 billetes de 10	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$	CR_4^3
		4 billetes de 5	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$	CR_4^4
38.	4 colores	9 pelotas	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$	CR_4^9
39.	5 cajas	10 bolas	$x_1 + \ldots + x_5 = 10$	CR_5^{10}
40.	4 dedos	7 anillos	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$	CR_4^7

Estos ejemplos nos ilustran de manera práctica sobre los resultados teóricos previamente obtenidos; en particular, de que son equivalentes:

1. El número de selecciones, con repetición, de tamaño k en una colección de tamaño n.
2. El número de maneras de distribuir k **objetos idénticos** entre n **destinatarios distintos**.
3. El número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots x_n = k$.

Equivalencias que es importantes tener presentes en la resolución de problemas. Es importante hacer notar que estas equivalencias son solo válidas si los k objetos son idénticos y los n destinatarios son distintos.

En un problema de distribución de k objetos entre n destinatarios se pueden presentar cuatro grandes casos:

1. Los k objetos son iguales y los n destinatarios son diferentes. Estaremos ante CR_n^k.
2. Los k objetos son diferentes y los n destinatarios también. Estaremos ante $VR_n^k = n^k$.
3. Los k objetos son iguales y los n destinatarios son iguales. Estudiaremos mas adelante técnicas para su resolución, a través de funciones generadoras y la teoría de partición de enteros.
4. Los k objetos son diferentes y los n destinatarios iguales. Estudiaremos más adelante los números de Stirling de segundo tipo que nos servirán para resolver problemas de este tipo.

Sintetizamos estas cuatro grandes tipos en un cuadro de distribución de k objetos entre n destinatarios:

Objetos (k) \ Destinatarios (n)	diferentes	iguales
diferentes	VR_n^k	$S(k,n)$
iguales	CR_n^k	func. gen./Partición enteros

La situación se hará más compleja porque dentro de cada uno de estos grandes tipos se pueden presentar diversos tipos de restricciones relativas a los objetos, lo que conllevará el uso de técnicas particulares para la resolución de los problemas. Este asunto será tratado en el tema de *Distribución de objetos en cajas*.

3.3.2. Restricciones sobre las soluciones de la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$

En el Teorema 3.6 vimos el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$. Vamos a ver el número de soluciones enteras de dicha ecuación que verifican algunas restricciones.

Teorema 3.8 *El número de soluciones enteras positivas de la ecuación $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$, con $n, k \in \mathbb{N}$ y $k \geq n$, es $C_{k-1}^{n-1} = \binom{k-1}{n-1}$.*

Demostración. Tenemos la ecuación

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k, \quad \text{siendo } x_i \geq 1, \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, n\} \tag{3.3}$$

Restamos n a cada lado de la ecuación del modo siguiente

$$x_1 - 1 + x_2 - 1 + \ldots + x_n - 1 = k - n.$$

Hacemos el cambio $y_i = x_i - 1 \geq 0$, para $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $r = k - n$, resultando la ecuación

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = r. \tag{3.4}$$

El número de soluciones enteras positivas de la ecuación (3.3) es igual al número de soluciones no negativas de la ecuación (3.4). Ahora bien, el número de estas últimas es:

$$CR_n^r = C_{n+r-1}^r = C_{k-1}^{k-n} = \binom{k-1}{k-n} = \binom{k-1}{n-1},$$

la última igualdad como consecuencia de ser números combinatorios complementarios. $\square$

Un tratamiento análogo podemos dar al problema de soluciones enteras mayores que un cierto $m \in \mathbb{Z}^+$. Y el procedimiento sigue siendo válido en el caso en que cada incógnita esté sujeta a una condición distinta. Por ejemplo, si tenemos la ecuación

$$x_1 + x' + x_3 + x_4 = 48$$

tal que $x_1 > 5$, $x_2 > 6$, $x_3 > 7$, $x_4 > 8$, hacemos el cambio

$$y_1 = x_1 - 5,\ y_2 = x_2 - 6,\ y_3 = x_3 - 7,\ y_4 = x_4 - 8,$$

así cada $y_i \geq 1$, para $i \in \{1,2,3,4\}$, y llamando $r = 48 - 26 = 22$, siendo $26 = 5 + 6 + 7 + 8$, resulta la ecuación $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 22$, donde las soluciones deben ser enteras positivas. Por el Teorema 3.8 el número de soluciones es $C_{21}^3 = \binom{21}{3} = 1330$.

Podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 3.9 *El número de soluciones enteras positivas de la ecuación*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k,$$

sometidas a las restricciones

$$x_1 > c_1,\ x_2 > c_2,\ \ldots\ x_n > c_n \quad y \quad k \geq n + c_1 + c_2 + \ldots + c_n,$$

es $C^{n-1}_{k-c_1-c_2-\cdots-c_n-1}$.

<u>Demostración</u>. Se hace el cambio $y_i = x_i - c_i$, para cada $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, $r = k - (c_1 + c_2 + \ldots + c_n)$ y obtenemos la ecuación

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = r, \qquad \text{con } y_i \geq 1, \text{ para cada } i \in \{1,2,\ldots n\}.$$

Por el Teorema 3.8 el número de soluciones es $C^{n-1}_{r-1} = C^{n-1}_{k-c_1-c_2-\ldots-c_n-1}$.

$\square$

Este resultado sigue siendo válido si los c_i son enteros positivos, negativos o nulos.

3.4. Combinatoria y probabilidad

En el segundo curso del Grado en Matemáticas el alumno tendrá oportunidad de estudiar el Cálculo de Probabilidades y de aplicar conceptos y técnicas de la Combinatoria para resolver problemas de probabilidad. Esta sección, por tanto, no pretende entrar en una temática que tiene su lugar y extensiones propios, solo una brevísima iniciación a problemas de esta naturaleza, apoyándonos en conceptos que el alumno pudiera tener de la enseñanza secundaria.

Consideramos la probabilidad definida como la razón entre el número de casos favorables y el número total de casos posibles:

$$\frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}.$$

Imponemos la condición de que los casos que entran en el cálculo sean igualmente probables. Hay que insistir en la importancia de esta condición de que los casos sean igualmente probables pues es una situación que no tiene por qué verificarse.

Ejemplo 3.10 *Si queremos saber cuál es la probabilidad de obtener* 12 *como suma cuando se arrojan dos dados, tenemos que la suma puede ser:* $2, 3, 4, \ldots, 12$*; en total* 11 *casos y podríamos pensar que la probabilidad de obtener* 12 *fuera* $\frac{1}{11}$*. Pero ello es falso. porque los* 11 *casos no son igualmente probables. En efecto, para obtener* 12 *solo puede ser con un* 6 *en cada dado, mientras que por ejemplo para obtener* 8 *puede hacerse como* $4+4$*,* $3+5$ *y* $2+6$*.*

Para considerar, en esta situación, casos igualmente probables debemos considerar los dados como objetos distintos e independientes (por ejemplo, dados de colores distintos). Por el Principio de la Multiplicación hay 6 *posibilidades para cada dado y en total resultarán* 36 *casos igualmente probables. De los* 36 *hay solo uno que sea* $6+6$*, luego la probabilidad de obtener un* 12 *es* $\frac{1}{36}$*, mientras que para obtener un* 8 *los casos favorables son* $2+6$*,* $3+5$*,* $4+4$*,* $5+3$ *y* $6+2$*, por lo que la probabilidad será* $\frac{5}{36}$*.*

Ejemplo 3.11 *Si* 10 *monedas caen al piso, ¿cuál es la probabilidad que haya cinco caras y cinco cruces?*

Consideramos las monedas distintas. Por el Principio de la Multiplicación, hay 2^{10} *resultados posibles. Un resultado podemos denotarlocomo poniendo C o X por cada moneda según el resultado de la tirada; así, por ejemplo, una situación posible es* $CXXXCCCXCX$*. Tendremos una lista con diez posiciones donde colocar C o X. El número de casos favorables será igual al número de formas de colocar* 5 *C y* 5 *X en la lista de* 10 *lugares, que son* $PR_{10}^{5,5} = \frac{10!}{5!5!}$*. También podríamos habernos centrados en calcular el número de formas de colocar las cinco C (o las cinco X), porque las otras quedan automáticamente determinadas, y en ese caso el número de casos favorables habría aparecido como* C_{10}^{5}*, naturalmente* $C_{10}^{5} = PR_{10}^{5,5}$*.*

Luego la probabilidad de obtener cinco caras y cinco cruces es $\frac{PR_{10}^{5,5}}{2^{10}}$*.*