Tema 2. Potencial eléctrico.

Problemas resueltos.

Problema 1.- En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno el electrón se mueve en una órbita circular de radio r alrededor del protón fijo.
a) Hallar una expresión de la energía cinética del electrón en función de r. Demostrar que para cualquier valor de r la energía cinética es la mitad de la energía potencial.
b) Calcular los valores de las energías cinética y total del electrón para $r = 0,529 \times 10^{-10}$ m (Datos: $q_e = 1,602 \times 10^{-19}$ Culombios, $m_e = 9,11 \times 10^{-31}$ Kg.)
c) ¿Cuánta energía debe suministrarse al átomo de hidrógeno para ionizarlo, es decir, para llevar el electrón al infinito con energía cinética nula?

Solución:

a) Primeramente escribiremos la condición de estabilidad de la órbita, que es el equilibrio entre fuerza de atracción electrostática y fuerza centrífuga:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}.$$

De ahí se puede despejar v^2 y sustituir posteriormente en la expresión para la energía cinética, para obtener:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_o r}$$

Por otra parte la energía potencial del electrón es:

$$V = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_o r}$$

con lo que se demuestra lo que se pedía.

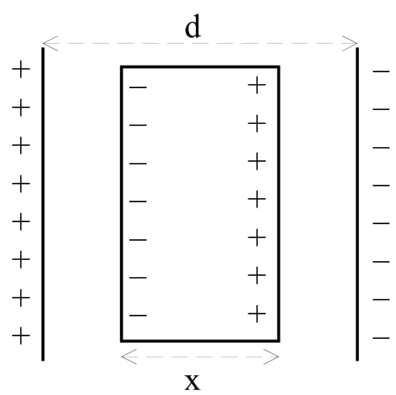
b) Para la energía total tenemos:

$$E = E_c + V = E_c - 2E_c = -E_c = -1,07 \times 10^{-18} \text{ J}$$

mientras que $E_c = 2,14 \times 10^{-18}$ J

c) Para ionizar un átomo de hidrógeno es necesario aportar una energía E^* igual o superior al módulo de su energía total E, ya que en el infinito su energía potencial es nula y como la cinética también debe serlo, basta con llevarlo a un estado de energía total nula. Por tanto: $E^* = -E = 1,07 \times 10^{-18}$ J.

Problema 2.- Las placas de un condensador plano tienen un área A y están separadas una distancia d, estableciéndose entre ellas una diferencia de potencial V.
a) Si introducimos entre las placas (véase figura) una lámina metálica de espesor x, ¿cuál es la nueva capacidad del condensador?
b) ¿Cuál es la nueva diferencia de potencial entre las placas?
c) Si $A = 30$ cm^2, $d = 5$ mm, $V = 1{,}000$ V, $x = 3$ mm y $\epsilon_o = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m ¿cuáles son los valores numéricos de la capacidad y la diferencia de potencial después de introducir la lámina?



Solución:

a) Supongamos que la carga de las placas del condensador antes de introducir la lámina metálica es q. Al colocar la lámina metálica, aparece en ella una carga $+q$ frente a la placa cargada negativamente y una carga $-q$ frente a la placa cargada positivamente. Por lo tanto, es como si tuviéramos dos condensadores iguales en serie, cada uno de ellos son una capacidad

$$C_1 = C_2 = \frac{q}{V} = \frac{\epsilon_o A}{(d-x)/2}.$$

Esto significa que la capacidad del nuevo condensador será la capacidad equivalente a la combinación en serie de los dos nuevos condensadores:

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{2}{C_1},$$

esto es,

$$C' = \frac{\epsilon_o A}{d-x}$$

b) La nueva diferencia de potencial entre las placas será la suma de las que hay en los condensadores que hemos caracterizado por C_1 y C_2:

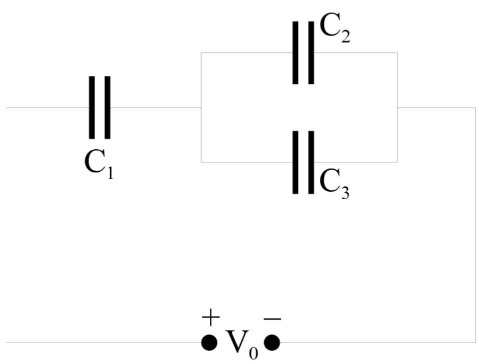
$$V' = \frac{2q}{C_1} = \frac{V(d-x)}{d}$$

c) $C' = 3,98 \times 10^{-12}$ Faradios; $V' = 400$ Voltios.

Problema 3.- Calcular la capacidad equivalente del circuito de la figura, con $C_1 = C_2 = 2\ \mu$F, y $C_3 = 6\ \mu$F. Si se aplica al conjunto una diferencia de potencial $V_0 = 10$ V, calcular:
a) la carga de C_1,
b) la diferencia de potencial a través de C_1,
c) la carga de C_2 y C_3.

Solución:

Se trata de una asociación de condensadores en la que dos (C_2 y C_3) se encuentran en paralelo, mientras que el tercero (C_1) está en serie con el condensador equivalente de los dos anteriores. La capacidad de este último será



$$C'_e = C_2 + C_3 = 8\ \mu\text{F}.$$

Por lo tanto, la capacidad equivalente total

$$C_{e,T} = \frac{C'_e C_1}{C'_e + C_1} = 1,6\ \mu\text{F}.$$

a) Una vez que los condensadores se han cargado hasta el valor que pueden cargarse para una determinada diferencia de potencial (es decir, cuando el circuito ha adquirido su régimen estacionario) tenemos que:

$$Q_1 = Q'_e.$$

Por otra parte, al estar en serie,

$$V_0 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q'_e}{C'_e} = Q_1\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C'_e}\right) = Q_1 \frac{C'_e + C - 1}{C_1 C'_e}$$

donde hemos hecho uso de la descomposición de V_0 como una suma de la diferencia de potencial existente entre los extremos de C_1 y de la que hay entre los de C'_e.

Al aplicar una diferencia de potencial de 10 V, obtenemos: $Q_1 = 16\ \mu$C.

b) La diferencia de potencial a través de C_1 vale:

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = 8 \text{ V}.$$

c) La suma de cargas de C_2 y C_3 es igual a 16 μC. Ambos condensadores tienen entre sus placas la misma diferencia de potencial, ya que están conectados en paralelo; por consiguiente,

$$Q_2 + Q_3 = Q_2/C_2 = Q_3/C_3 \qquad \Longrightarrow \qquad Q_2 = 4\ \mu\text{C} \qquad\qquad Q_3 = 12\ \mu\text{C}.$$

Problema 4.- Se elimina del circuito del problema anterior el condensador C_2, quedando C_1 y C_3 en serie, a los que se le aplica una diferencia de potencial $V_0 = 10$ V.
a) ¿Qué energía se almacena en cada condensador?
Supongamos que se desconectan de la fuente V_0 y se vuelven a conectar los condensadores en paralelo,
b) ¿Qué carga final adquiere cada uno de ellos?
c) ¿Qué energía está almacenada, en estas circunstancias, en cada condensador?

Solución:
a) Al eliminar del circuito el condensador C_2, se tendrá que $Q_1 = Q_3$, de manera que la energía almacenada en cada condensador valdrá

$$U_1 = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} \quad , \qquad U_3 = \frac{1}{2}\frac{Q_3^2}{C_3}.$$

Para calcular Q_1 y Q_3 vamos a determinar la capacidad equivalente en cada caso:

$$C^*_{\text{equiv}} = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} = 1,5\ \mu\text{F} \qquad \Longrightarrow \qquad Q_1 = C^*_{\text{equiv}}\, V_0 = 15\ \mu\text{C}.$$

Por lo tanto,

$$U_1 = 56,25 \times 10^{-6} \text{ J} \quad , \qquad U_3 = 18,75 \times 10^{-6} \text{ J}$$

b) Al desconectar los condensadores de la fuente, y conectarlos entre sí en paralelo, lo que hemos hecho es unir las placas del mismo signo de cada uno de ellos entre sí, más que conectarlos en paralelo o en serie (medite el estudiante el por qué esto es así). Al hacer esta nueva conexión, es evidente que la diferencia de potencial entre los extremos de uno es igual a la que existe entre las placas del otro, y por tanto

$$\frac{Q_1^*}{C_1} = \frac{Q_3^*}{C_3}. \quad , \qquad \frac{Q_1^*}{Q_3^*} = 1/3.$$

Además, la carga que tiene el sistema ha de ser la misma que en la situación anterior:

$$Q_1^* + Q_3^* = 2Q_1 = 30\ \mu\text{C}.$$

Como consecuencia, $Q_1^* = 7,5\ \mu$C y $Q_3^* = 22,5\ \mu$C.
c) La energía almacenada en cada uno de los condensadores se puede calcular fácilmente utilizando las fórmulas que ya se han utilizado en el apartado (a), y viene dada por $U_1^* = 14,06 \times 10^{-6}$ J, $U_3^* = 14,06 \times 10^{-6}$ J.

Problema 5.- Cuatro cargas iguales Q se encuentran en los vértices de un cuadrado de lado L. Las cargas se van dejando en libertad una a una, siguiendo el sentido de las agujas del reloj y de manera que se espera a que cada carga alcance su velocidad final a una gran distancia del cuadrado antes de liberar la siguiente.
¿Cuál será la energía cinética final de
(a) la primera carga liberada,
(b) la segunda,

(c) la tercera y
(d) la cuarta?

Solución:

Como el campo electrostático es conservativo, en el proceso de liberación y alejamiento de cada una de las cargas la energía total se conserva, por lo que cada carga que liberamos adquiere una energía cinética

$$\Delta E_c = -\Delta E_{pot} = -q\,\Delta V = q(V_i - V_f).$$

Además, si tomamos el origen de la energía potencial a una gran distancia del cuadrado inicial, y como la energía cinética inicial de cada carga es nula, podemos escribir que la energía cinética final de cada carga que liberamos viene dada por

$$E_{cf} = qV_i,$$

donde V_i es la suma de los potenciales electrostáticos creados en esa carga que se libera por las otras cargas que aón no se han liberado. De este modo obtenemos:

a)

$$E_{ci} = qV_i = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{2q}{L} + \frac{q}{\sqrt{2}L}\right) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L}\left(\frac{4+\sqrt{2}}{2}\right)$$

b)

$$E_{ci} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L}\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$$

c)

$$E_{ci} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L}$$

d) La cuarta carga no se ve sometida a potencial alguno, por lo que permanecerá en reposo: su energía cinética final será nula.

Problema 6.- En un condensador cargado, de placas plano-paralelas, un electrón abandona la placa cargada negativamente y acaba chocando con la placa positiva. Se sabe que el electrón ha partido del reposo, que choca con la placa cargada positivamente después de $1,4 \times 10^{-8}$ s, y que la distancia entre las placas es $d = 2$ cm. Calcular:
(a) la diferencia de potencial entre las placas del condensador.
(b) la densidad superficial de carga del condensador.
Dato: $e/m_e = 1,76 \times 10^{11}$ C/kg.

Solución:

Este problema es equivalente a otro que se ha resuelto en un tema anterior, pero aquí se usa el potencial en vez del campo.

(a) El potencial eléctrico en un condensador de placas plano-paralelas se puede escribir como

$$V_+ - V_- = \frac{\sigma d}{\epsilon_0}.$$

El movimiento del electrón se realiza bajo los efectos de un campo eléctrico, que es un campo conservativo. Por lo tanto, la energía total del electrón,

$$E = E_{cin} + U = \frac{1}{2}m_e v^2 + qV$$

se conserva. Por consiguiente, si llamamos V_+ y V_-, v_+ y v_-, a los potenciales y velocidades del electrón en las placa positiva y negativa, respectivamente, podemos escribir.

$$\frac{1}{2}m_e\left(v_+^2 - v_-^2\right) = q\left(V_- - V_+\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2}m_e v_+^2 = e\left(V_+ - V_-\right),$$

ya que el electrón parte del reposo y tiene carga negativa.

Por otro lado, dado que el campo es constante en el interior del condensador, el movimiento del electrón será uniformemente acelerado. Utilizando los conocimientos de cinemática que ya tenemos, calculamos la velocidad con la que alcanza la placa positiva

$$v_+ = at = \frac{2d}{t^2}t = \frac{2d}{t}$$

y obtenemos

$$V_+ - V_- = \frac{m_e v_+^2}{2e} = \frac{2m_e d^2}{et^2} = 20,2 \text{ V}.$$

(b) Para calcular la densidad superficial de carga del condensador utilizamos la fórmula de la diferencia de potencial en un condensador de placas plano-paralelas:

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 \left(V_+ - V_-\right)}{d}.$$