Tema 2. Leyes de Newton

Métodos de resolución de ecuaciones de Newton en una dimensión.

Estudiaremos sucintamente los casos más usuales que se pueden presentar.

• **Caso en que la fuerza depende solamente de la posición.**

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$$

En este caso, como en todos los que veremos más adelante, nos interesa reducir la ecuación de segundo orden a una ecuación de primer orden, más sencilla de resolver. Una vez hecho esto podremos intentar el procedimiento más usual de separación de variables que nos permitirá una integración inmediata; en definitiva:

$$m\frac{dv}{dt} = F(x)dx.$$

Teniendo en cuenta que $dx/dt = v$, podemos reescribir la ecuación anterior

$$mvdv = F(x)dx.$$

Integrando en ambos miembros de la ecuación se obtiene:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \int F(x)dx + C;$$

$$v = \left[\frac{2}{m}\int F(x)dx + C_1\right]^{1/2};$$

que, con $dx/dt = v$ se transforma en:

$$t = \int \frac{dx}{\left[\frac{2}{m}\int F(x)dx + C_1\right]^{1/2}} + C_2.$$

• **Caso en que la fuerza depende solamente de la velocidad.**

$$m\frac{dv}{dt} = F(v).$$

En este caso la ecuación está ya escrita en formato de ecuación de primer orden y la separación de variables es inmediata:

$$m\frac{dv}{F(v)} = dt \Rightarrow t = m\int \frac{dv}{F(v)} + C$$

• **Caso en que la fuerza depende solamente del tiempo.**

$$m\frac{dv}{dt} = F(t).$$

En este caso la integración es inmediata:

$$m\int dv = \int F(t)dt + C_1.$$

Una segunda integración nos lleva a:

$$m\int dx = \int \left[\int F(t)dt + C_1\right] dt + C_2.$$

Fuerzas reales y "seudofuerzas".

Los físicos clasifican las fuerzas en "fuerzas realesz "seudofuerzas". En el grupo de las fuerzas reales se incluyen aquéllas que surgen de las interacciones elementales (gravitatorias electromagnéticas, fuertes y débiles). También lo están las fuerzas generales de contacto tales como el rozamiento, las derivadas de la ley de Hooke y las que intervienen en la colisión de masas.

Las seudofuerzas surgen cuando el sistema de coordenadas utilizado está acelerado con respecto a un sistema de coordenadas inercial. Si solamente se utilizasen sistemas de coordenadas inerciales, las seudofuerzas no aparecerían. Sin embargo, muchos problemas son más fáciles de resolver en sistemas de referencia no inerciales.

Las seudofuerzas no son reales puesto que no pueden derivarse de la existencia de alguna forma de interacción entre cuerpos. Sin embargo, no hemos de dudar de su existencia en sistemas no inerciales. La clave para entender este punto está en: 1) el agente de la fuerza; 2) los puntos de vista que proporcionan distintos observadores.

Como hemos dicho, las fuerzas reales son observables para cualquier observador en cualquier sistema de referencia y son debidas a interacciones. Su existencia no es debida a propiedades inerciales.

Por el contrario, las seudofuerzas son observables sólo para observadores que acompañan un sistema de referencia no inercial, y surgen como una reacción inercial a la aceleración del sistema de referencia en el que está el observador. Es decir, surgen como complemento a la primera ley de Newton para poder describir el movimiento de los cuerpos en sistemas de referencia no inerciales. Según esta ley, si un cuerpo que es observado desde un sistema de referencia inercial no está sujeto a ninguna fuerza externa, se moverá siguiendo una trayectoria rectilínea y con una velocidad de módulo constante. Sin embargo, en sistemas de referencia no inerciales (acelerados), parece que este objeto cambia su estado de movimiento y por ello deben incluirse en la descrpción de su dinámica fuerzas externas adicionales (las pseudofuerzas) para poder describir ese cambio de estado del movimiento. La existencia de estas pseudofuerzas se justifica en base a que puesto que el estado de movimiento del cuerpo cambia, debe haber una fuerza responsable del cambio; esta fuerza que se introduce es la pseudofuerza. De esta manera, el observador inercial ve el objeto moverse en línea recta con velocidad constante, mientras que el observador acelerado lo ve cambiar su estado de movimiento, y considera este cambio debido a la presencia de una pseudofuerza.

Fuerzas no conservativas y conservación de la energía.

Sabemos que en un sistema con fuerzas conservativas la energía total se conserva. ¿Qué pasa cuando las fuerzas no son conservativas? El siguiente ejemplo con un oscilador armónico amortiguado nos ilustra el caso. Supongamos un oscilador bajo la acción de una fuerza disipativa dependiente de la velocidad:

$$m\frac{dv}{dt} = -kx - \gamma v.$$

Multiplicamos por v ambos miembros de la expresión anterior,

$$v\left(\frac{d\,(mv)}{dt} + kx\right) = -\gamma v^2,$$

o bien, rescribiendo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = -\gamma v^2.$$

El término de la izquierda nos da la variación de la energía total con respecto al tiempo, y el término de la derecha nos dice que es negativa. En consecuencia el sistema pierde energía mecánica, como era de esperar.

Nota: en un nivel má avanzado se verá cómo cuando forzamos este oscilador la pérdida de energía queda compensada por el aporte exterior, pudiendo mantenerse el sistema en un régimen oscilatorio no amortiguado.

Leyes de Newton. Problemas resueltos.

Problema 1.- Una persona sostiene, colgando de su mano, un objeto en un ascensor con una aceleración $\vec{a}$ (positiva en el movimiento de subida). ¿Como describiría Vd. el movimiento del objeto?

Solución:

Aquí distinguimos claramente entre dos sistemas de referencia. Uno (S), inercial, fijo con respecto al suelo; el otro (A), no inercial, acompañando al ascensor. Ambos tendrán, como veremos, dos puntos de vista distintos.

Para el observador S el objeto, la persona que lo sostiene y el ascensor, se mueven y están acelerados, y la fuerza neta de interacción, $F - mg$ (fuerza de contacto, ejercida por el ascensor, y gravedad), debe ser igual a la tasa de variación de la cantidad de movimiento, ma.

$$F - mg = ma.$$

Si a es positiva (ascensor subiendo) la fuerza de contacto sobre el objeto es simplemente mayor que el peso de éste y, al contrario, cuando $a < 0$, la fuerza de contacto es menor, pudiendo llegar a ser nula (cuando $a = -g$), en cuyo caso tenemos una caída libre del objeto.

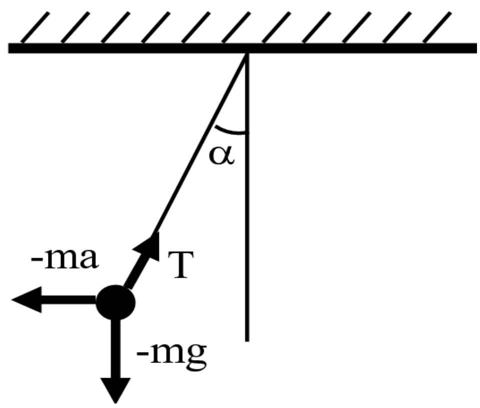
Para un observador acompañando al ascensor (digamos la persona que sostiene el objeto) el objeto está en equilibrio (no se mueve con respecto a su sistema de referencia que es el ascensor). Tiene que ejercer una tensión para compensar lo que cree ser una fuerza hacia abajo; tensión que medirá y que verá ser igual a $mg + ma$. Su descripción del sistema será una descripción estática (no habla ni de movimiento ni de aceleraciones) en la que el peso aparente del objeto es $m(g + a)$. En definitiva, para este observador no inercial .ªpareceüna nueva fuerza hacia abajo, $-ma$, fuerza con la que no cuenta en su descripción el observador ligado al suelo.

Problema 2.- Colgamos del techo de un vagón una masa por medio de una cuerda. Encontrar el ángulo α que forma la cuerda con la vertical, y su tensión T, cuando el vagón se mueve sobre raíles horizontales con:

a) Un movimiento uniforme con velocidad v.

b) Un movimiento uniformemente acelerado con aceleración a.

Solución:



a) Cuando el vagón se mueve con velocidad uniforme, la única fuerza externa que actúa sobre la masa m es la gravitacional $m\vec{g}$. Está equilibrada por la tensión de la cuerda $\vec{T}$ al estar la masa en equilibrio: la cuerda está en posición vertical, $\alpha = 0$.

b) Sin embargo, cuando el vagón tiene una aceleración a el efecto de esta aceleración se transmite a la masa a través de la cuerda y la situación será la que se representa en la figura. La inercia, $m\vec{a}$, de la masa mantiene la cuerda con una inclinación α (un observador dentro del vagón, y que no sabe que el vagón está acelerado, deducirá que existe una fuerza, de inercia, $\vec{f} = -m\vec{a}$ que tira de la masa en sentido horizontal y hacia atrás). La tensión de la cuerda equilibrará esta fuerza de inercia y la fuerza gravitatoria vertical. Por lo tanto,

$$T \sin\alpha = ma$$

$$T \cos\alpha = mg$$

Dividiendo ambas expresiones, obtenemos

$$\alpha = \arctan\frac{a}{g}$$

Problema 3.- En una prueba de tiro con la cuerda se enfrentan dos equipos de cinco hombres cada uno. Cada hombre pesa 80 kg y la fuerza (en Newtons) que ejerce cada individuo sobre la cuerda puede describirse según la siguiente ecuación:

$$F = 100 \exp(-t/\tau),$$

en donde τ es el tiempo medio de esfuerzo por hombre (10 s para el equipo A y 20 s para el equipo B). Si la masa de la cuerda es de 25 kg, encontrar el movimiento; a saber, la velocidad de ambos equipos. ¿Qué comentario le merece el resultado y el método de resolución?

Solución:

Aplicando la ecuación de Newton

$$F_A - F_B = m_{cuerda}\frac{dv}{dt},$$

$$25dv = 5(100e^{-t/10} - 100e^{-t/20})dt.$$

Podemos suponer que la velocidad inicial es nula, con lo que integrando la ecuación anterior:

$$v(t) = 20(-10e^{-t/10} + 20e^{-t/20} - 10).$$

que integrada a su vez da:

$$x(t) = -200t + 2000(e^{-t/10} - 4e^{-t/20} + 3)$$

Como nos preguntan la velocidad final de la cuerda, para un tiempo largo ($t \to \infty$), obtendremos de la ecuación anterior:

$$v_{final} = -200m/s.$$

El signo menos indica que el movimiento es en la dirección del equipo B; resultado esperable a la luz del mayor tiempo medio de esfuerzo de éste. Sin embargo, la magnitud de la velocidad es un resultado obviamente absurdo. Una razón estriba en que hemos supuesto una fuerza independiente de la velocidad. Otra está en que hemos despreciado la masa de los equipos cuando éstos están en movimiento. Este ejemplo muestra la importancia del análisis crítico del orden de magnitud de los resultados a la hora de juzgar si hemos utilizado un buen modelo o no.

Problema 4.- Un proyectil de masa m es lanzado al aire en dirección vertical con una velocidad v_0. La resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad. Determínese el movimiento durante la subida del cuerpo. ¿Qué diferencias existen cuando hacemos lo mismo para el correspondiente movimiento de bajada? ¿Son simétricos ambos movimientos, como en el caso de ausencia de resistencia?

Solución:

Podemos escribir la ecuación de Newton para este caso como

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - c^2v^2, \tag{1}$$

en donde hemos tomado como origen de coordenadas el punto de lanzamiento y el sentido de alturas crecientes como semieje positivo. La constante en el término de fricción se ha escrito como un cuadrado para resaltar su carácter estrictamente positivo. Separando variables,

$$\frac{mdv}{mg + c^2v^2} = -dt,$$

que reescribimos como:

$$\frac{dv}{\mu^2 + v^2} = -k^2dt,$$

con $k^2 = c^2/m$ y $\mu^2 = g/k^2$. Integrando,

$$\frac{1}{\mu} \arctan \frac{v}{\mu} = -k^2 t + C_1,$$

que, con la condición inicial, $v(0) = v_0$, resulta:

$$\frac{1}{\mu} \left(\arctan \frac{v}{\mu} - \arctan \frac{v_0}{\mu} \right) = -k^2 t.$$

Si definimos $\gamma = \arctan(v_0/\mu)$ y $\lambda = g/\mu$, obtenemos de la ecuación anterior:

$$v = \tan(\gamma - \lambda t). \tag{2}$$

Una segunda integración, con $y(0) = 0$, lleva a:

$$y = \frac{\mu}{\lambda} \ln \left[\frac{\cos(\gamma - \lambda t)}{\cos(\gamma)} \right]. \tag{3}$$

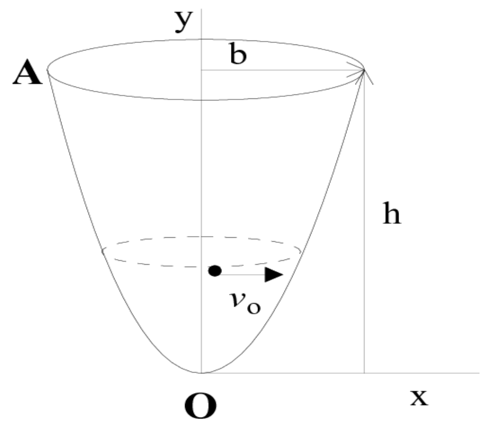
Las ecuaciones (2) y (3) describen el movimiento ascendente del móvil. De la ec. (2) obtenemos que la velocidad se anula cuando $t = \gamma/\lambda$, alcanzando el cuerpo su máxima altura. Sustituyendo en la ec. (3) encontramos esta última cómo $\mu/\lambda \ln \sec \gamma$. Nótese que cuando se alcanza esta altura las ecuaciones anteriores dejan de ser válidas. Cuando el móvil empieza a bajar, la resistencia del aire cambia de signo en la ecuación (1), con lo cual debemos resolver de nuevo el problema. No lo haremos aquí por ser el proceso muy parecido. Únicamente haremos hincapié en dos consecuencias. Una es que el tiempo de caída es mayor que el de subida. El otro es que la velocidad con la que alcanza el punto de partida es menor que v_0.

¿Podríamos haber llegado a conocer estas dos últimas características del movimiento sin necesidad de resolver las ecuaciones? ¿Podría Vd. dar un argumento que lleve a estas conclusiones?

Problema 5.- Una pequeña bola se mueve en un círculo con velocidad v_0 sobre un plano horizontal dentro de una taza. La superficie interior de la taza se obtiene girando la curva OA alrededor del eje y. Suponiendo que la velocidad de la bola v_0 es proporcional a la distancia x del eje y determínese la curva OA (véase figura).

Solución:

Al rodar la bola en un círculo horizontal la fuerza que ejerce la taza sobre ella debe ser perpendicular a la superficie. No debe haber componente vertical, ya que en caso contrario la bola subiría o bajaría. La reacción de la taza ($\vec{N}$) debe equilibrar la fuerza de gravedad sobre la bola y también proporcionar la necesaria fuerza centrípeta que le permita rodar sobre el círculo anterior. Si queremos obtener la ecuación de la curva podemos partir de la relación que nos da su pendiente:



$$\frac{dy}{dx} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}, \tag{4}$$

siendo

$$\tan\theta = \frac{mg}{mv_0^2/r} = \frac{gr}{v_0^2}.$$

Teniendo en cuenta que $r = x$ y que la velocidad es proporcional a x, $v_0^2 = kx^2$, obtendremos:

$$\tan\theta = \frac{g}{kx} \tag{5}$$

Combinando las ecuaciones (4) y (5), e integrando,

$$\frac{kx^2}{2} = gy + C,$$

en donde C es una constante de integración (que es nula ya que la curva pasa por $x = y = 0$). Nótese que la curva obtenida es una parábola. Este resultado nos explica la razón por la cual un líquido que gira uniformemente (que tiene su velocidad proporcional a la distancia al eje de rotación) genera una superficie paraboloidal.

Problema 6.- Se tienen dos bloques en un plano horizontal que pueden deslizar sobre el mismo sin rozamiento. Los dos bloques están unidos por una cuerda inextensible de masa despreciable. Sobre el bloque, m_1, de la derecha se ejerce una fuerza F_1 hacia la derecha, mientras que sobre el otro bloque de masa m_2, se ejerce una fuerza F_2 dirigida hacia la izquierda. Determínense la tensión de la cuerda que une los dos bloques y la aceleración de los mismos.

Solución:

El peso de los dos bloques es equilibrado en cada caso por la reacción normal de la superficie horizontal, de forma que para estudiar el movimiento de los bloque basta estudiar las componentes horizontales de las fuerzas y la aceleración. Para escribir la ecuación del movimiento del bloque m_1 hay que considerar únicamente que sobre él se ejercen la fuerza externa F_1 y la tensión de la cuerda, T, que está dirigida hacia la izquierda. Si suponemos que el movimiento del sistema será en la dirección positiva del eje horizontal y denominamos a a la aceleración, la ecuación de Newton para el bloque m_1 será:

$$F_1 - T = m_1 a$$

Razonando de igual manera para el bloque m_2, y teniendo en cuenta que la tensión de la cuerda sobre este bloque actúa en el sentido hacia la derecha, tenemos:

$$T - F_2 = m_2 a.$$

Por lo tanto, tenemos planteado un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (a y T). Para resolverlo basta sumar las dos ecuaciones y obtenemos

$$a = \frac{F_1 - F_2}{m_1 + m_2}$$

Sustituyendo la expresión obtenida en cualquiera de las dos ecuaciones de partida, tenemos:

$$T = F_2 + m_2 \frac{F_1 - F_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 F_2 + m_2 F_1}{m_1 + m_2}.$$

Problema 7.- En el dispositivo de la figura la masa m_1 desliza sobre un plano con rozamiento siendo el coeficiente de rozamiento μ, mientras que la masa m_2 desliza sin rozamientos a lo largo del bloque soporte. Teniendo en cuenta que la masa del bloque que pende de la cuerda es m_2 y que la cuerda es inextensible, se pide:

a) ¿Cuál debe ser la relación entre el coeficiente de rozamiento y las masas para que el sistema comience a moverse?

b) ¿Cuál será la tensión de la cuerda si el sistema se mantiene en reposo?

Solución:

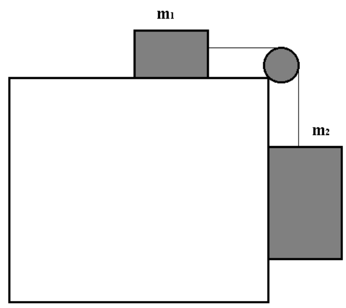
a) Sobre el primer bloque actúan el peso $P = m_1 g$ en dirección hacia abajo que es compensada por la reacción normal de la superficie sobre la que se apoya el bloque, $N = m_1 g$. En la dirección horizontal actúan, por un lado, la tensión T de la cuerda y, por otro, el rozamiento oponiéndose al movimiento con una fuerza de rozamiento $F_R = \mu N = \mu m_1 g$. Sobre el segundo bloque actúan también oponiéndose la tensión T de la cuerda, hacia arriba, y el peso del bloque, hacia abajo. Como la cuerda no es elástica sino inextensible, la aceleración deberá ser la misma para los dos bloques por lo que aplicando la segunda ley de Newton a ambos bloques obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} T - \mu m_1 g &= m_1 a \\ m_2 g - T &= m_2 a. \end{aligned}$$

Sumando las dos ecuaciones obtenemos:

$$m_2 g - \mu m_1 g = (m_1 + m_2)\, a.$$

Tengamos en cuenta que la fuerza de rozamiento siempre se opone al movimiento, luego la solución a esta ecuación que produce aceleraciones negativas carece de sentido físico. El sistema se moverá sólo si existe una aceleración positiva, esto es, si el primer miembro es mayor que cero. Por tanto la condición que debe cumplir el sistema para comenzar a moverse es que:



$$m_2 > \mu m_1.$$

b) Si el sistema esta parado, la tensión de la cuerda tiene que compensar el peso del segundo bloque, por lo que la tensión será:

$$T = m_2 g.$$

En esta situación la fuerza de rozamiento sobre el primer bloque es también igual a la tensión para mantener el sistema en reposo.

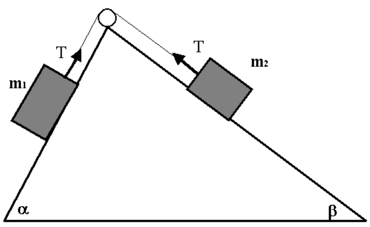
Problema 8.- En el dispositivo de la figura dos masas m_1 y m_2 están unidas por una cuerda inextensible y reposan sobre caras opuestas de una cuña, sobre las que pueden deslizar sin rozamiento. Se pide:

a) Resolver el sistema, es decir, calcular la aceleración de los bloques y la tensión de la cuerda, usando las leyes de Newton.

b) ¿Para qué relación entre las masas el sistema se mantendrá en equilibrio estático?

Solución:

a) Sobre cada una de las masas actúan la fuerza de la gravedad, la tensión de la cuerda y la reacción normal de la superficie respectiva de apoyo sobre la cuña. Estas reacciones normales se equilibran en cada caso con las componentes del peso perpendiculares a las superficies de la cuña, por lo que basta fijarse en lo que ocurre con las componentes de las fuerzas paralelas a las superficies de la cuña. Los pesos de los bloques son :



$$\begin{aligned} P_1 &= m_1 g \\ P_2 &= m_2 g. \end{aligned}$$

Por lo tanto, las componentes de los pesos de los bloques en las direcciones paralelas a las superficies de apoyo sobre la cuña son, respectivamente,

$$\begin{aligned} P_\alpha &= m_1 g \sin\alpha \\ P_\beta &= m_2 g \sin\beta. \end{aligned}$$

Así, en las direcciones del movimiento de cada uno de los bloques podemos aplicar la segunda ley de Newton para cada una de las dos masas, obteniendo:

$$\begin{aligned} m_1 g \sin\alpha - T &= m_1 a \\ T - m_2 g \sin\beta &= m_2 a. \end{aligned}$$

En este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, podemos despejar tanto la tensión como la aceleración del sistema de ecuaciones. Sumando las dos ecuaciones:

$$m_1 g \sin\alpha - m_2 g \sin\beta = m_1 a + m_2 a$$

Despejamos la aceleración:

$$a = \frac{m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta}{m_1 + m_2} g.$$

Despejamos la tensión restando las ecuaciones

$$2T - m_1 g \sin\alpha - m_2 g \sin\beta = (m_2 - m_1)\, a$$

y sustituyendo la expresión encontrada para la aceleración obtenemos

$$T = \frac{m_1 m_2 (\sin\alpha + \sin\beta)}{m_1 + m_2} g.$$

b) El sistema se mantendrá en equilibrio estático siempre que la aceleración sea igual a 0, es decir, cuando se cumpla la siguiente relación entre las masas y los ángulos:

$$m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta = 0$$

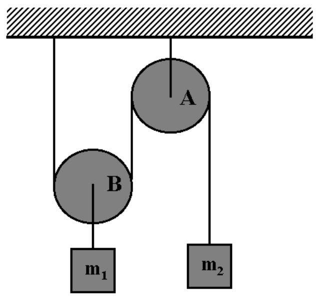
es decir,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Problema 9.- En el sistema de la figura se tienen dos masas que penden, por medio de cuerdas inextensibles de una polea fija y una polea móvil, respectivamente. Se pide hallar las tensiones en las cuerdas y las aceleraciones de las dos masas.

Solución:

De nuevo, hay que recordar que las tensiones a lo largo de una misma cuerda son iguales, de modo que hay dos tensiones en este problema: la de la cuerda de la que cuelga m_1 (que llamaremos T_1) y la de la cuerda de la que cuelga m_2 (que llamaremos T_2). Además hay que tener en cuenta que dada la configuración de las cuerdas, el espacio recorrido por m_2 en su movimiento es el doble del que recorre m_1. Por lo tanto, la aceleración de m_2 es también el doble que la de m_1. Dicho esto, ya podemos escribir las ecuaciones de Newton para las dos masas:



$$\begin{aligned} T_1 - m_1 g &= m_1 \frac{a}{2} \\ m_2 g - T_2 &= m_2 a. \end{aligned}$$

Además, la polea B nos introduce una ligadura entre las tensiones:

$$T_1 = 2T_2.$$

El sistema de ecuaciones así planteado es fácil de resolver y se obtiene:

$$\begin{aligned} a &= \frac{4m_2 - 2m_1}{4m_2 + m_1} g \\ T_1 &= \frac{6 m_1 m_2}{4m_2 + m_1} g \\ T_2 &= \frac{1}{2} T_1. \end{aligned}$$

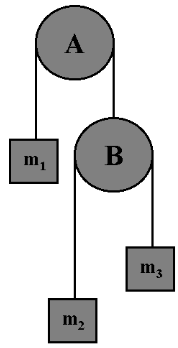
Problema 10.- En el sistema de la figura las poleas y las cuerdas tienen una masa despreciable y no hay fricción entre ellas; además, las cuerdas son inextensibles. Se pide:

a) Encontrar las tensiones en las dos cuerdas y las aceleraciones de las tres masas.

b) ¿Cuál es la relación que deben cumplir las masas para que la segunda masa no se mueva?

Solución:

a) Para hallar las ecuaciones de movimiento del sistema debemos tener en cuenta varias cosas.



En primer lugar, las cuerdas son inextensibles, por tanto la tensión será la misma a lo largo de cada cuerda. Es decir la tensión que actúa sobre la masa m_1 y la polea B es la misma y la denominaremos T_1, y la tensión que actúa sobre la masa m_2 será igual a la que actúa sobre m_3 y la denominaremos T_2. Por lo tanto, ya podemos escribir la ecuación del movimiento para la masa m_1:

$$T_1 - m_1 g = m_1 a_1$$

En segundo lugar, debemos tener en cuenta que el subsistema que pende de la polea B es no inercial, ya que la propia polea B está acelerada con respecto al sistema del laboratorio o la polea A. Esto implica que sobre esta parte del sistema actuará una fuerza ficticia de inercia. De modo que debemos incluir términos en las ecuaciones de movimiento de las masas m_2 y m_3 correspondientes al producto de dichas masas por la aceleración del s ubsistema. En términos más intuitivos esto es equivalente a decir que el subsistema formado por la polea B y las masas m_2 y m_3, se encuentra dentro de un ascensor acelerado: de esta manera, la fuerza de la gravedad a considerar no es g sino g menos la aceleración del subsistema.

Por lo tanto, las ecuaciones del movimiento para el susbsistema no inercial son:

$$T_2 - m_2 g = m_2 \left(a_2. - a_1\right)$$

$$m_3 g - T_2 = m_3 \left(a_2 + a_1\right).$$

Además, la ecuación para la polea B, que ha sido considerada de masa despreciable, debe, por lo tanto, reflejar el equilibrio entre las fuerzas sobre ella ejercidas, de modo que:

$$T_1 = 2T_2.$$

Tenemos por tanto un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas que podemos resolver. Este sistema se puede resolver simplemente despejando y sustituyendo variables en las cuatro ecuaciones y se obtienen finalmente los valores tanto de las tensiones como de las aceleraciones.

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{8m_1m_2m_3}{4m_2m_3 + m_1m_2 + m_1m_3} g \\
T_2 &= \frac{4m_1m_2m_3}{4m_2m_3 + m_1m_2 + m_1m_3} g \\
a_1 &= \frac{4m_2m_3 - m_1m_2 - m_1m_3}{4m_2m_3 + m_1m_2 + m_1m_3} g \\
a_2 &= \frac{2m_1(m_3 - m_2)}{4m_2m_3 + m_1m_2 + m_1m_3} g
\end{aligned}$$

b) Para que la segunda masa permanezca en su lugar — en el sistema laboratorio — lo que tiene que suceder es que la aceleración del subsistema de la polea B debe ser igual a lo que se acelera ella dentro del subsistema. Es decir, $a_1 = a_2$. Por tanto, igualando las expresiones de a_1 y a_2, y simplificando obtenemos:

$$m_1 = \frac{4m_2m_3}{(3m_3 - m_2)}.$$