

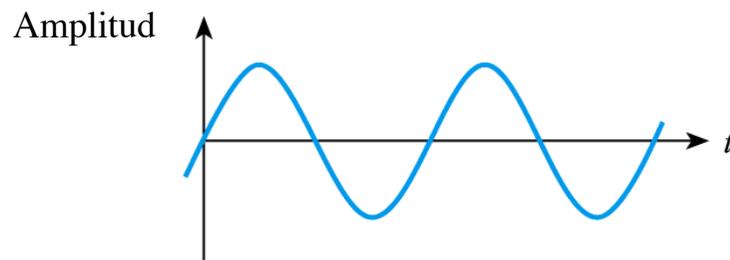
Tema 3. Corriente alterna

Índice

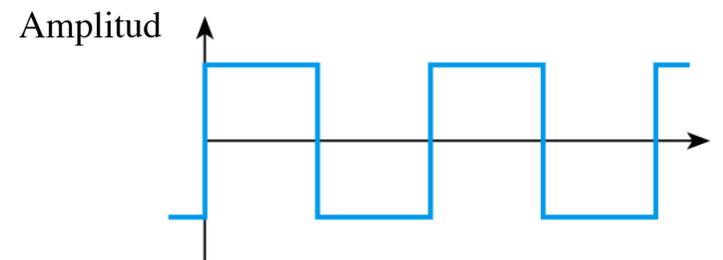
- 01 Señales variables con el tiempo. Ondas senoidales
- 02 Régimen senoidal permanente
- 03 Circuitos de 1^{er} orden. Respuesta en frecuencia
- 04 Potencia activa y reactiva. Factor de potencia

Señales variables en el tiempo

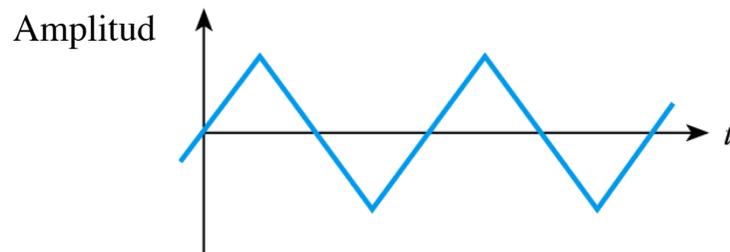
- La corriente y la tensión en los circuitos puede ser constante (CC) o variable con el tiempo (CA)
- Escalón y rampa. Formas de onda periódicas



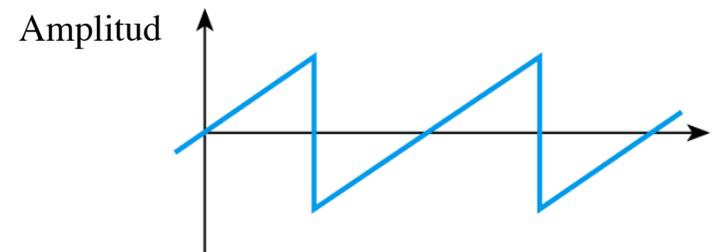
Onda sinusoidal



Onda cuadrada



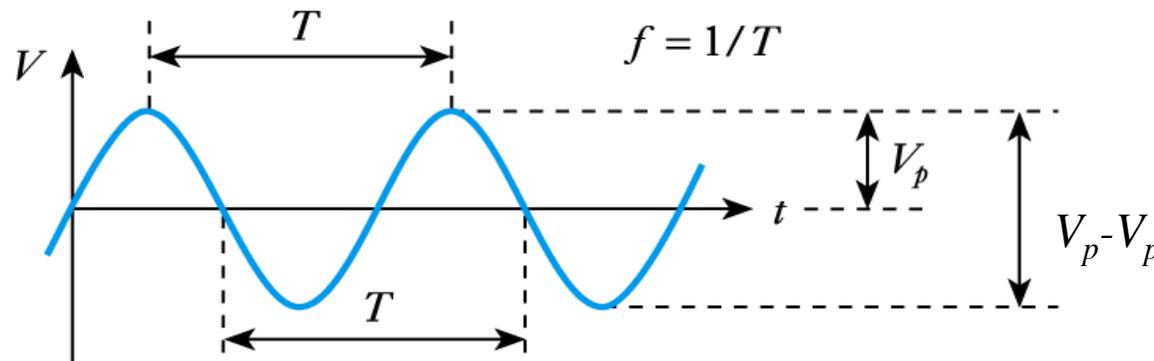
Onda triangular



Diente de sierra

Forma de onda senoidal

- Período T (s), frecuencia f (Hz), amplitud o valor de pico V_p , ω (rad), frecuencia angular, ϕ fase (grados o rad)

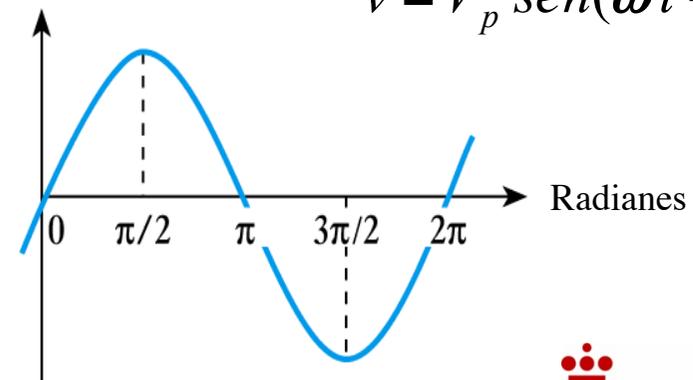
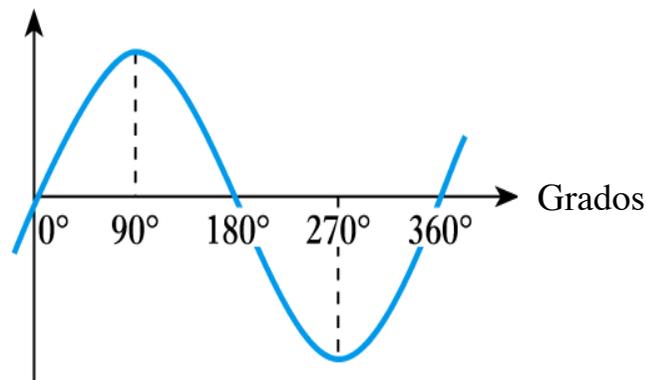


$$v = V_p \text{sen}(\phi) = V_p \text{sen}(\omega t)$$

$$\omega = 2\pi f \text{ rad/s}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$v = V_p \text{sen}(\omega t + \phi)$$



Forma de onda senoidal. Características

- La respuesta en régimen permanente de un circuito lineal con excitación senoidal es una función senoidal de igual frecuencia. La amplitud y la fase puede variar.
- La suma de funciones senoidales de igual frecuencia es una función senoidal de igual frecuencia. La amplitud y la fase puede variar.
- La derivada de una senoide es de forma senoidal, y su integral también.

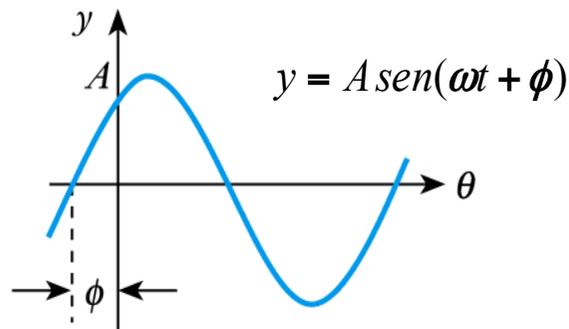
Forma de onda senoidal. Características

- Mediante la descomposición en serie de Fourier cualquier función periódica puede representarse como una combinación lineal de un número finito de funciones senoidales
- Los alternadores generan tensión con forma senoidales. Es una forma de onda fácil de obtener
- La respuesta de un sistema ante funciones senoidales de distinta frecuencia nos da información del sistema.

Respuesta en frecuencia.

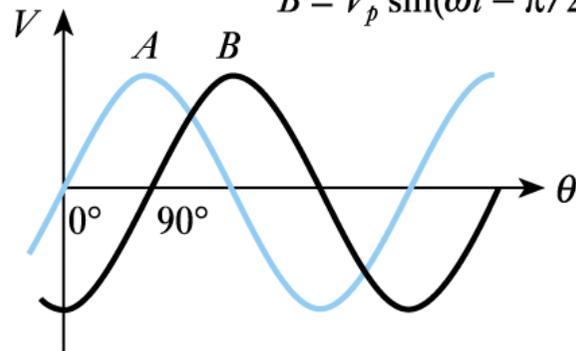
Forma de onda senoidal. Fase

- Período (ángulo) desde un valor de referencia

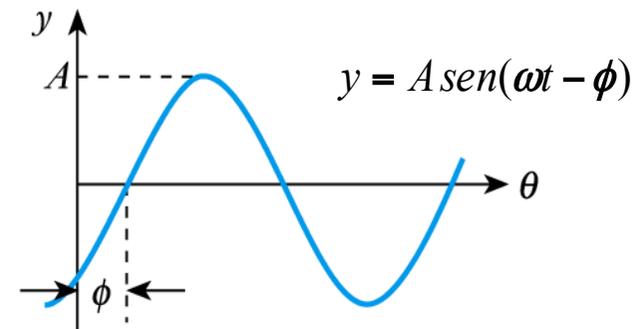


$$A = V_p \sin(\omega t)$$

$$B = V_p \sin(\omega t - \pi/2)$$

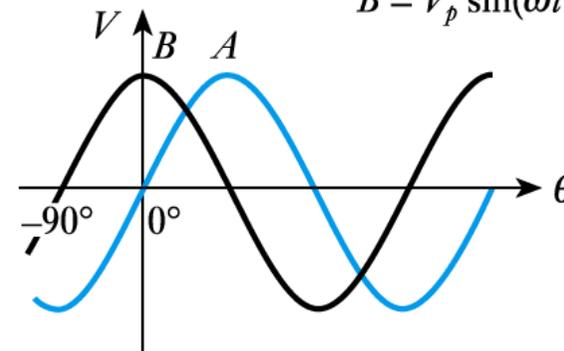


B va retrasada 90° respecto de A



$$A = V_p \sin(\omega t)$$

$$B = V_p \sin(\omega t + \pi/2)$$

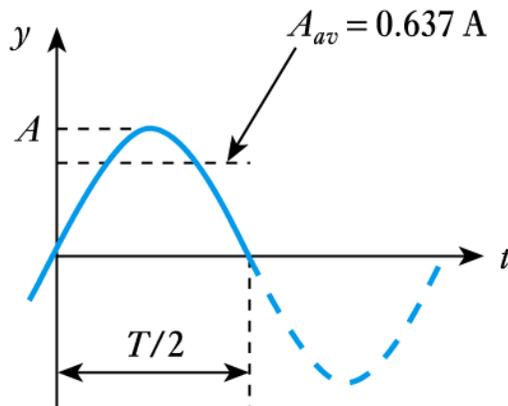


B va adelantada 90° respecto de A

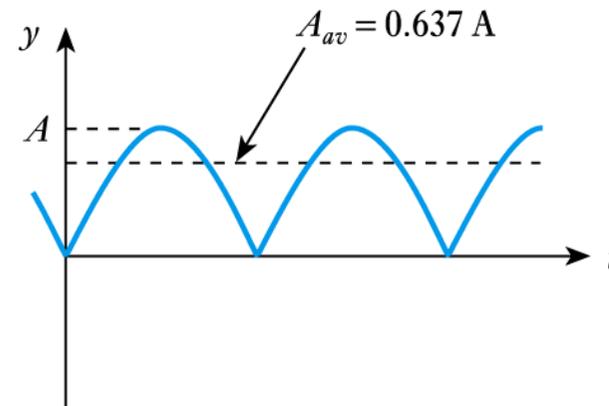
Forma de onda senoidal. Valor medio

- El valor medio en un ciclo es 0
- Suponiendo medio ciclo u onda rectificada:

$$V_{m(av)} = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} V_p \text{sen}(\phi) d\phi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} V_p \text{sen}(\phi) d\phi = \frac{V_p}{\pi} [-\cos(\phi)]_0^{\pi} = \frac{2V_p}{\pi} = 0.637 \times V_p$$



Valor medio calculado sobre medio ciclo de onda



Valor medio calculado sobre la onda rectificada

Forma de onda senoidal. Valor eficaz

- El valor eficaz es la raíz cuadrada del valor cuadrático medio (r.m.s.)
- Su utilidad deriva de que la potencia medida mediante valores eficaces es equivalente a la de los valores de CC

$$P_{m.c.c.(av)} = I_{CC} \cdot V_{CC}$$

$$P_{m.c.a.(av)} = I_{ef} \cdot V_{ef}$$

$$V_{ef(rms)} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_a^{a+T} [V_p \text{sen}(\phi)]^2 d\phi} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^\pi [V_p \text{sen}(\phi)]^2 d\phi} = \frac{V_p}{\sqrt{2}}$$

Régimen senoidal permanente

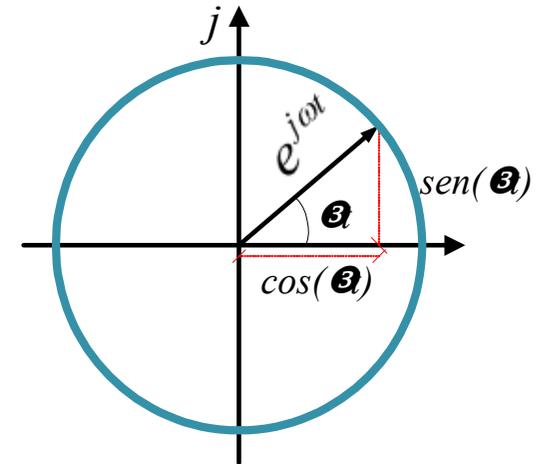
- Notación compleja. Euler

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$\cos(\omega t) = \operatorname{Re}\left[e^{j\omega t}\right]$$

$$\operatorname{sen}(\omega t) = \operatorname{Im}\left[e^{j\omega t}\right]$$



$$v(t) = V_p \cdot \cos(\omega t + \phi_v) = V_p \cdot \operatorname{Re}\left[e^{j(\omega t + \phi_v)}\right] = V_p \cdot \operatorname{Re}\left[e^{j\phi_v} \cdot e^{j\omega t}\right]$$

$$v(t) = V_p \cdot e^{j\phi_v} e^{j\omega t}; \quad i(t) = I_p \cdot e^{j\phi_i} e^{j\omega t}$$

Resistencias

$$v(t) = R \cdot i(t)$$

Bobinas

$$v(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$$

Condensadores

$$i(t) = C \cdot \frac{dv}{dt}$$

Elementos pasivos. Módulo y fase

- Respuesta de los elementos pasivos básicos. Impedancia

$$v(t) = R \cdot i(t)$$



$$V_p \cdot e^{j\phi_V} e^{j\omega t} = R \cdot I_p \cdot e^{j\phi_i} e^{j\omega t}$$



$$R = \frac{V_p}{I_p}$$

$$\phi_V = \phi_i$$

La corriente está en fase con la tensión

$$v(t) = L \cdot \frac{di}{dt}$$



$$V_p \cdot e^{j\phi_V} e^{j\omega t} = j\omega L \cdot I_p \cdot e^{j\phi_i} e^{j\omega t}$$

$$V_p \cdot e^{j\phi_V} = \omega L \cdot I_p \cdot e^{j\phi_i + \pi/2}$$



$$V_p = \omega L \cdot I_p$$

$$Z_L = j\omega L$$

$$\phi_V = \phi_i + \pi/2$$

$$\phi_i = \phi_V - \pi/2$$

La corriente retrasa 90° a la tensión

$$i(t) = C \cdot \frac{dv}{dt}$$



$$I_p \cdot e^{j\phi_i} e^{j\omega t} = j\omega C \cdot V_p \cdot e^{j\phi_V} e^{j\omega t}$$

$$I_p \cdot e^{j\phi_i} = \omega C \cdot V_p \cdot e^{j\phi_V + \pi/2}$$



$$I_p = \omega C \cdot V_p$$

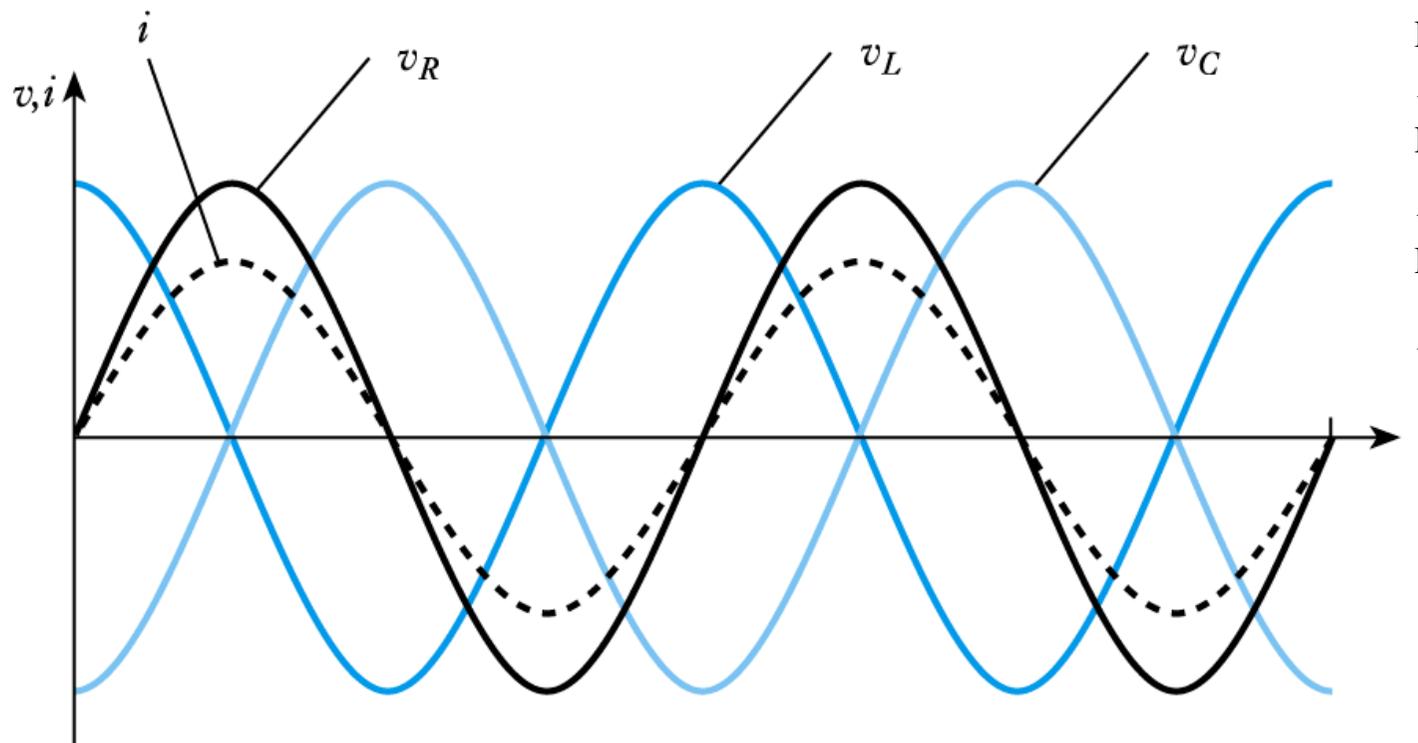
$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

$$\phi_i = \phi_V + \pi/2$$

La corriente adelanta 90° a la tensión

Elementos pasivos

- Formas de onda de la tensión y la corriente en los elementos pasivos básicos. Reactancia



Resistencia

$$R[\Omega]$$

Reactancia inductiva

$$X_L = \omega L[\Omega]$$

Reactancia capacitiva

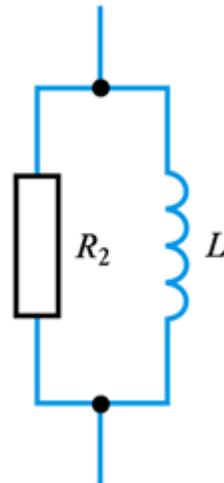
$$X_C = \frac{1}{\omega C}[\Omega]$$

Elementos pasivos. Serie y paralelo. Impedancias

- **Serie.** Todos los elementos recorridos por la misma corriente



- **Paralelo.** Todos los elementos sometidos a la misma tensión

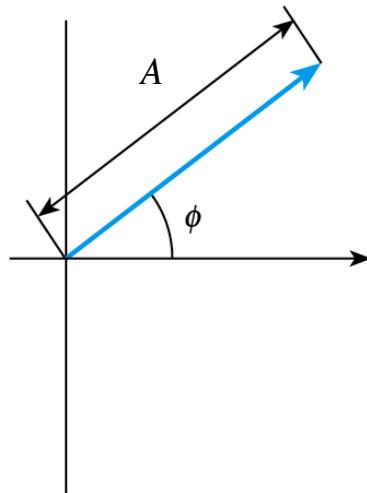


$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_{R_2}} + \frac{1}{Z_L}$$

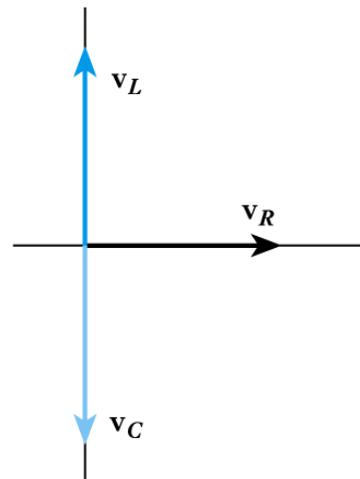
$$Z = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \dots}$$

Diagramas de fase o vectoriales

- En sistemas de frecuencia fija, una señal senoidal queda caracterizada por el módulo y la fase
- Un diagrama de fase permite representar módulo y fase en un único diagrama



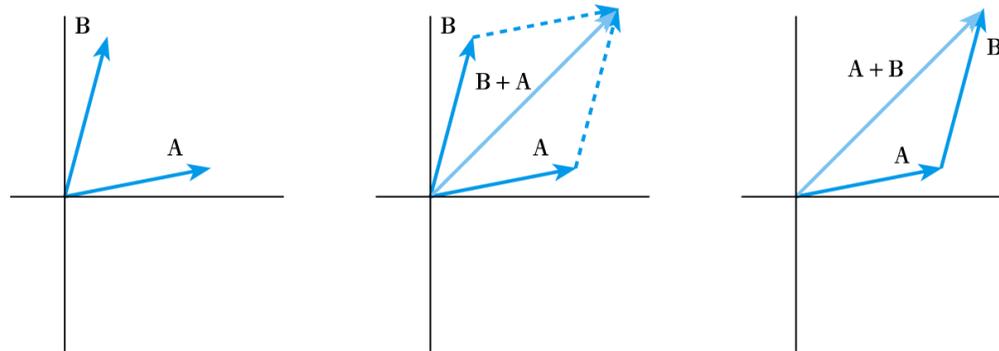
Representación fasorial de una señal de magnitud A y fase ϕ



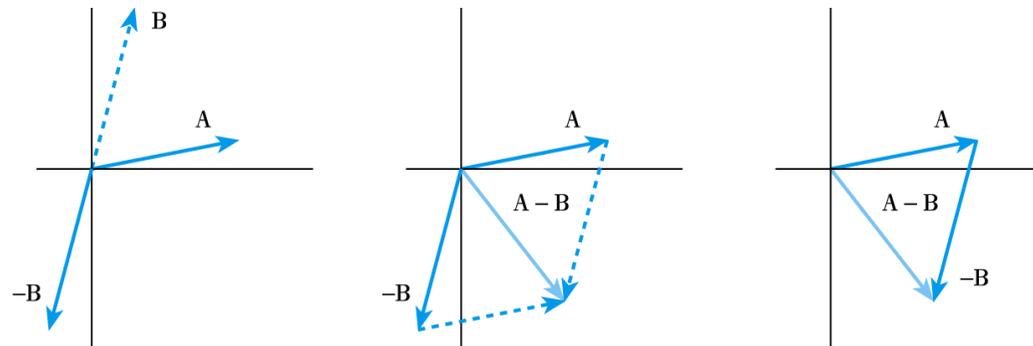
Representación fasorial de la tensión en una resistencia R , una inductancia L y un condensador C

Diagramas de fase o vectoriales

- Un diagrama de fase permite sumar y restar vectorialmente señales senoidales de igual frecuencia



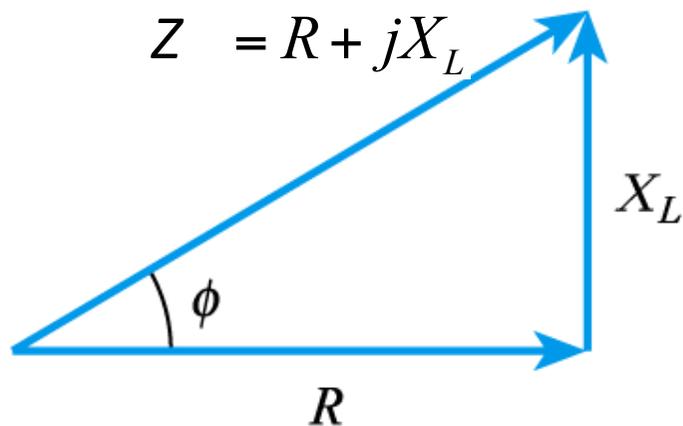
Suma fasorial o vectorial $A+B$



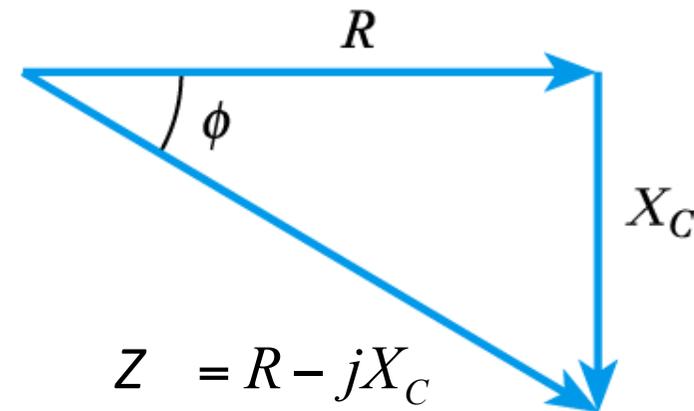
Resta fasorial o vectorial $A-B$

Diagramas de fase o vectoriales. Impedancias

- Un diagrama de fase permite representar impedancias complejas mediante su módulo y argumento (fase)



Representación gráfica de una impedancia RL



Representación gráfica de una impedancia RC

- Generalización de la Ley de Ohm. $V = Z \cdot I$

Circuitos de 1^{er} orden. RC

- Circuitos formados por resistencias, fuentes independientes y un solo elemento almacenador de energía (L ó C). Se caracterizan por una ecuación diferencial de primer orden

Resolución fasorial o vectorial

Módulo:

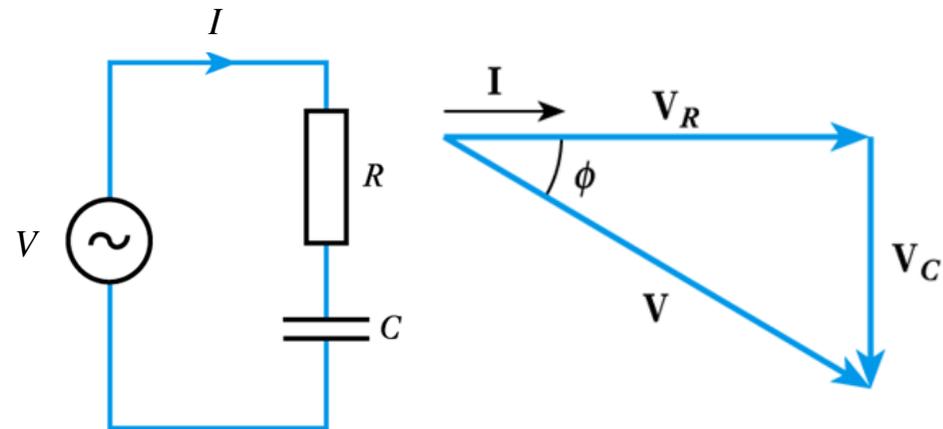
$$V = \sqrt{R^2 \cdot I^2 + \frac{I^2}{(\omega C)^2}} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}}$$

Argumento:

$$\phi_i = \phi - \phi_v; \quad \phi = \arctg \frac{1}{\omega RC}$$

Solución:

$$i(t) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} \cdot \cos(\omega t + \phi - \phi_v) \quad \Leftrightarrow \quad v_C(t) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}} \cdot \frac{1}{\omega C} \cdot \text{sen}(\omega t + \phi - \phi_v)$$



Método muy laborioso y difícil para circuitos más complicados

Circuitos de 1^{er} orden. RC

- Resolución directa al régimen senoidal permanente mediante complejos

Función de transferencia $H(j\omega)$

$$V_c = \frac{\frac{1}{j\omega C} V}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{V}{1 + j\omega RC} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{V_c}{V} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Módulo:

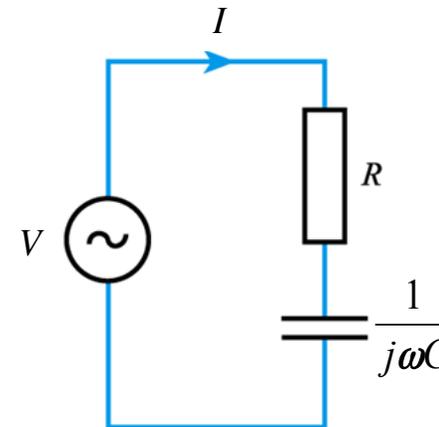
$$|H(j\omega)| = \left| \frac{V_c}{V} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

Argumento:

$$\angle H(j\omega) = \angle \frac{V_c}{V} = \phi = \arctg(0) - \arctg(\omega RC)$$

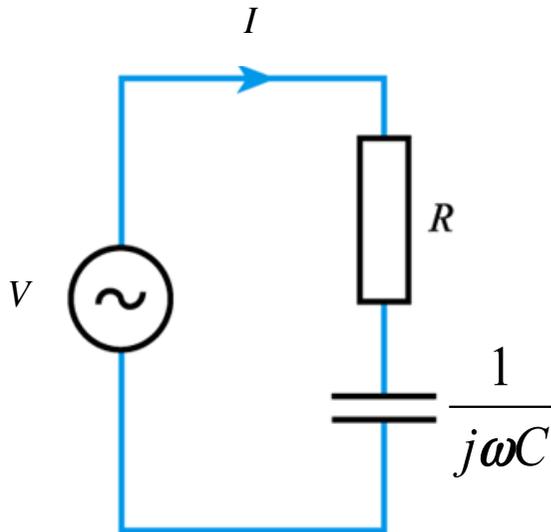
Siendo $v(t) = V \cdot \cos(\omega t) = V \cdot \operatorname{Re}[e^{j\omega t}]$

$$V_c = V \cdot \operatorname{Re}[e^{j\omega t}] |H(j\omega)| \cdot \operatorname{Re}[e^{j\phi}] = \frac{V}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \cdot \cos(\omega t + \phi)$$



Circuitos de 1^{er} orden. RC

- Divisor de impedancias



$$V_C = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} V$$

$$V_C = \frac{1}{1 + j\omega RC} V$$

Circuitos de 1^{er} orden. RL

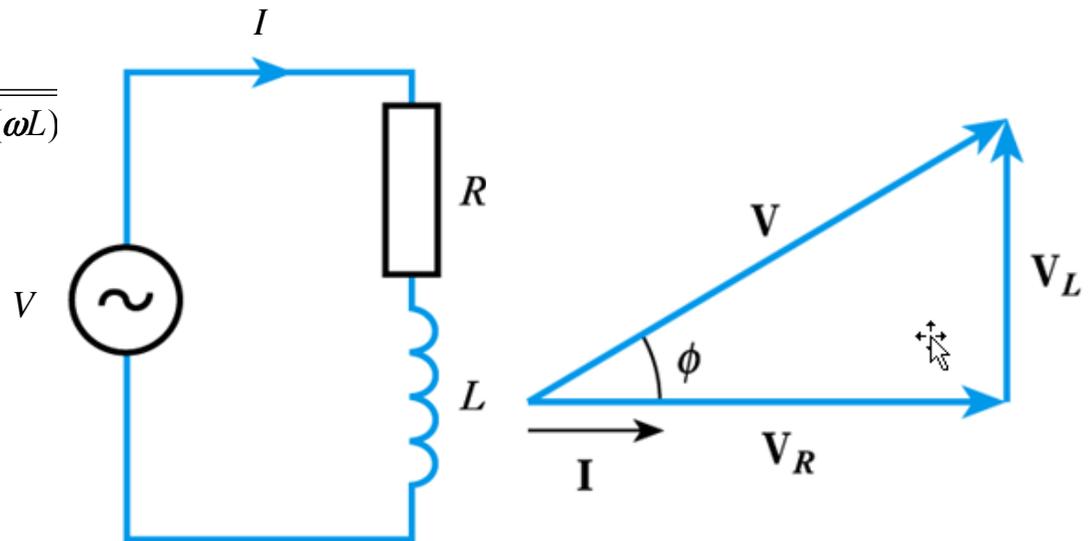
- Resolución fasorial o vectorial

Módulo:

$$V = \sqrt{R^2 \cdot I^2 + (\omega L)^2 \cdot I^2} \Rightarrow I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

Argumento:

$$\phi_i = \phi_v - \phi; \quad \phi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R}$$



Solución:

$$i(t) = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot \cos(\omega t + \phi_v - \phi) \iff v_L(t) = -\frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cdot \omega L \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \phi_v - \phi)$$

Método muy laborioso y difícil para circuitos más complicados

Circuitos de 1^{er} orden. RL

- Resolución directa al régimen senoidal permanente mediante complejos

Función de transferencia $H(j\omega)$

$$V_L = \frac{j\omega L V}{R + j\omega L} \quad \longrightarrow \quad H(j\omega) = \frac{V_L}{V} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

Módulo:

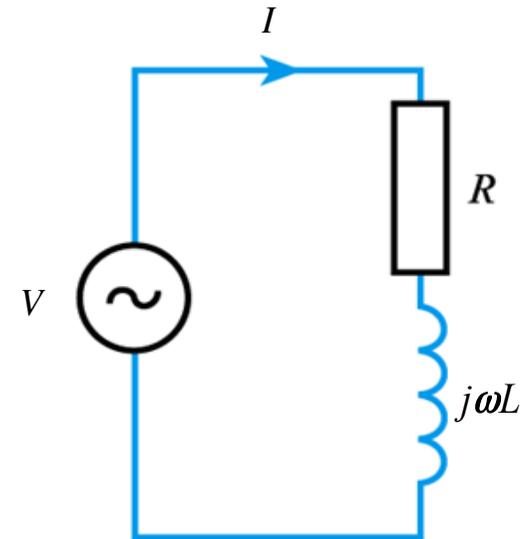
$$|H(j\omega)| = \left| \frac{V_L}{V} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2}}$$

Argumento:

$$\angle H(j\omega) = \angle \frac{V_L}{V} = \arctg(\infty) - \arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right) = \frac{\pi}{2} - \phi$$

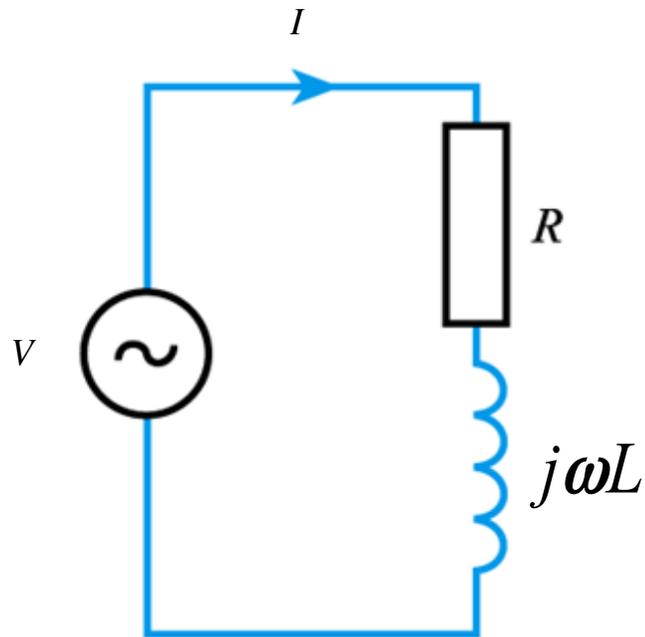
Siendo $v(t) = V \cdot \cos(\omega t) = V \cdot \operatorname{Re}[e^{j\omega t}]$ y $\phi = \arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right)$ \longrightarrow

$$V_L = V \cdot \operatorname{Re}[e^{j\omega t}] |H(j\omega)| \cdot \operatorname{Re}\left[e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)}\right] = \frac{V}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2}} \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \phi\right) = \frac{V}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2}} \cdot \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$



Circuitos de 1^{er} orden. RL

- Divisor de impedancias

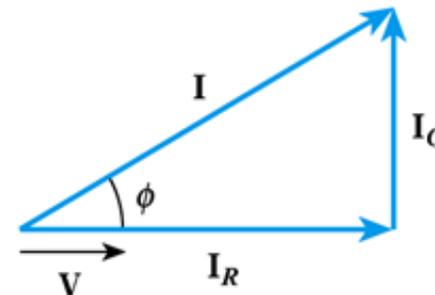
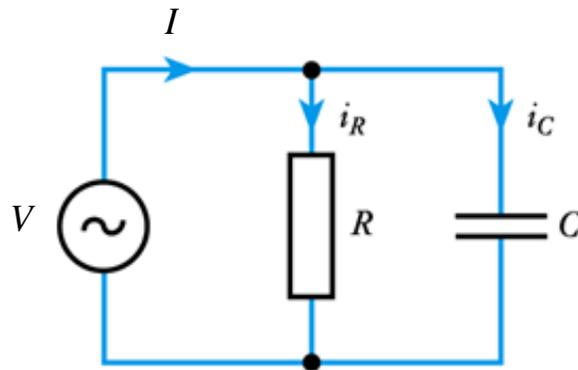
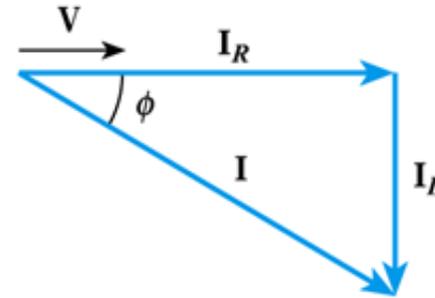
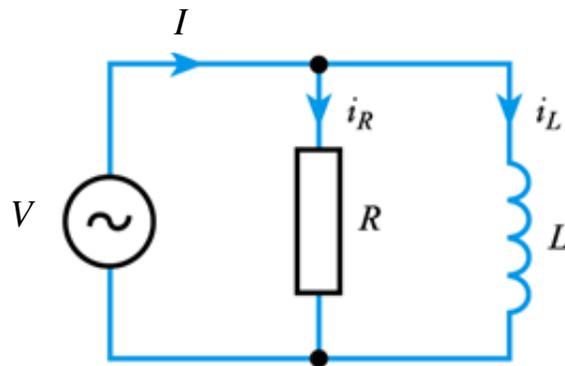


$$V_L = \frac{Z_L}{Z_R + Z_L} V$$

$$V_L = \frac{j\omega RL}{1 + j\omega RL} V$$

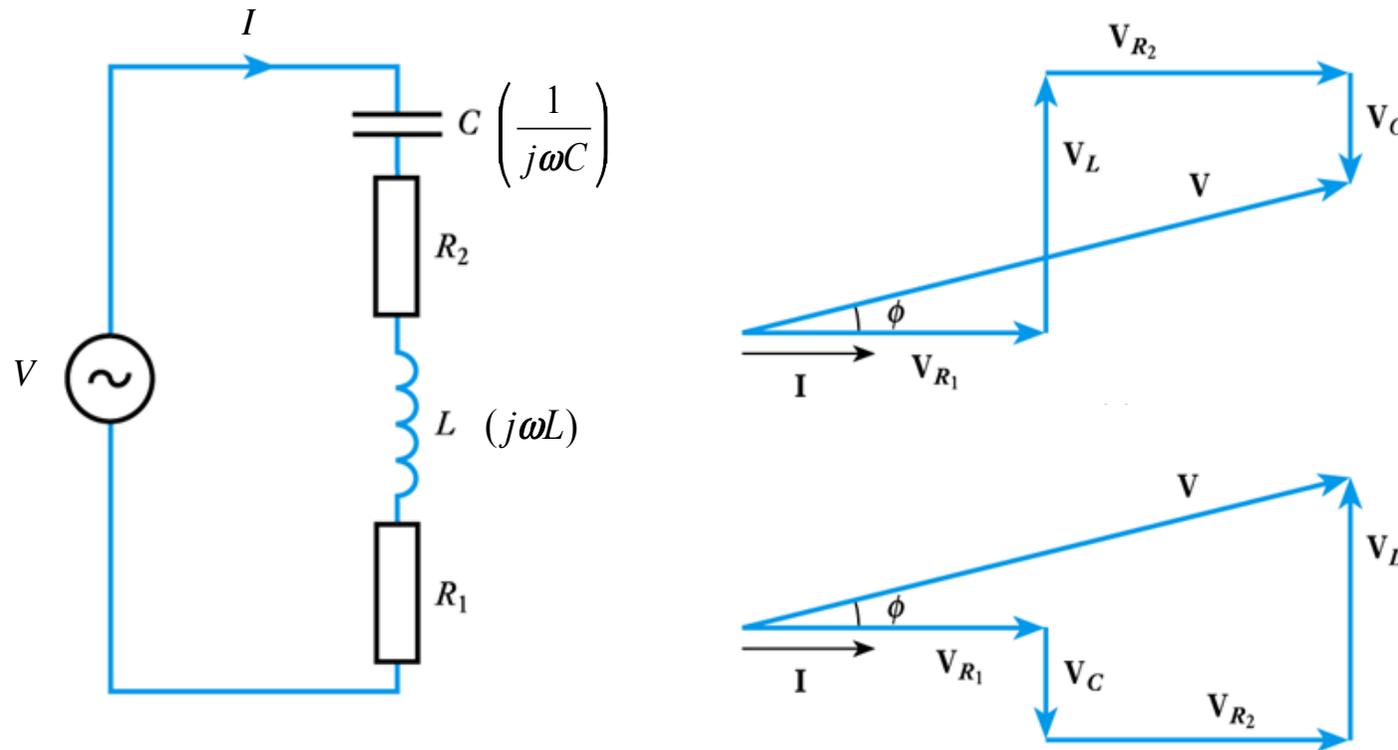
Circuitos de 1^{er} orden. Paralelo

- Diagramas fasoriales de corrientes



Circuitos de 2º orden. RLC

- Circuitos con 2 elementos almacenadores de energía



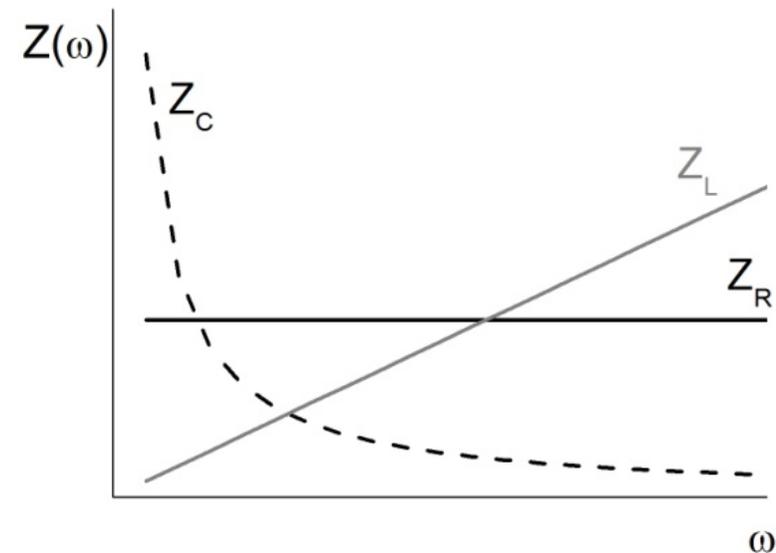
Respuesta en frecuencia

Gráfica de la magnitud y la fase de la **función de transferencia** en función de la frecuencia.

Función de transferencia, $H(\omega)$, es el cociente entre la amplitud compleja de la salida, $Y(\omega)$ (tensión o corriente), entre la amplitud compleja de la entrada $X(\omega)$ (tensión o corriente)

El módulo de la función de transferencia indica la ganancia del sistema en función de la frecuencia. La fase es la diferencia angular entre las sinusoides de salida y de entrada

Aplicación fundamental del análisis de respuesta en frecuencia: filtros



Potencia en una resistencia

- Potencia instantánea

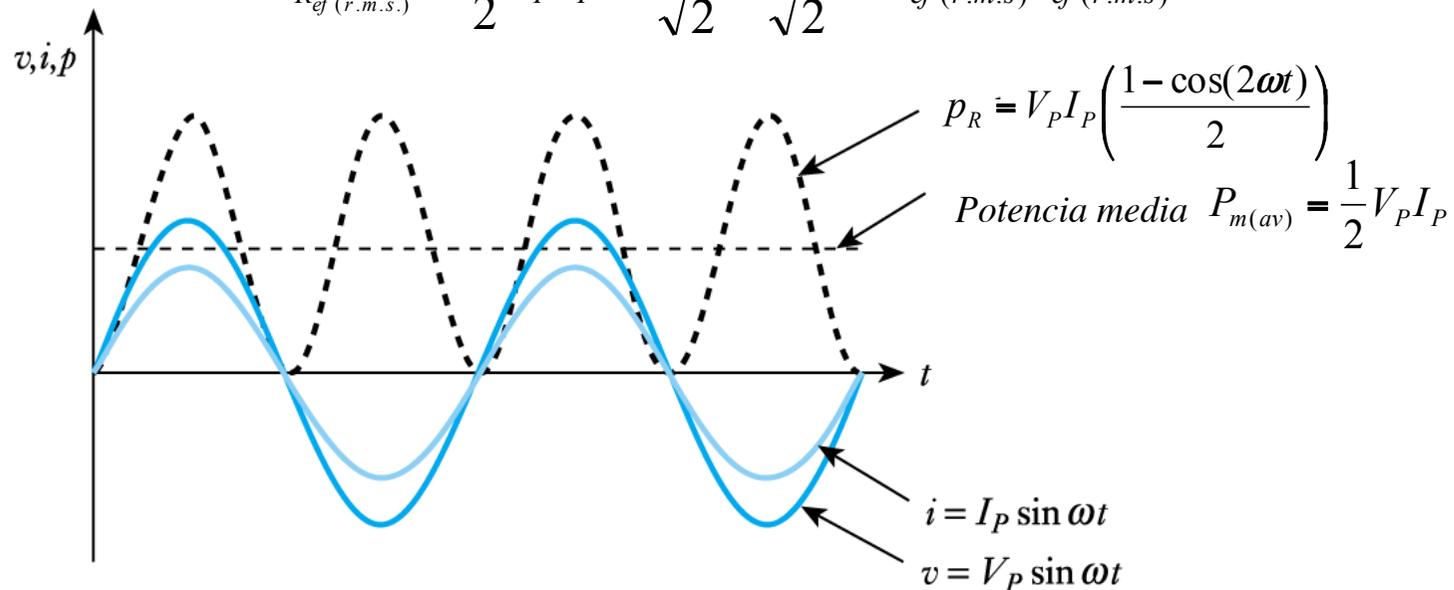
$$p_R(t) = v(t)i(t) \quad p_R = V_P \text{sen}(\omega t) \times I_P \text{sen}(\omega t) = V_P I_P \text{sen}^2(\omega t) = V_P I_P \left(\frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \right)$$

- Potencia media

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \right) dt = \frac{1}{2} \quad P_{R_{m(av)}} = \frac{1}{2} V_P I_P$$

- Potencia eficaz

$$P_{R_{ef(r.m.s.)}} = \frac{1}{2} V_P I_P = \frac{V_P}{\sqrt{2}} \times \frac{I_P}{\sqrt{2}} = V_{ef(r.m.s.)} I_{ef(r.m.s.)}$$



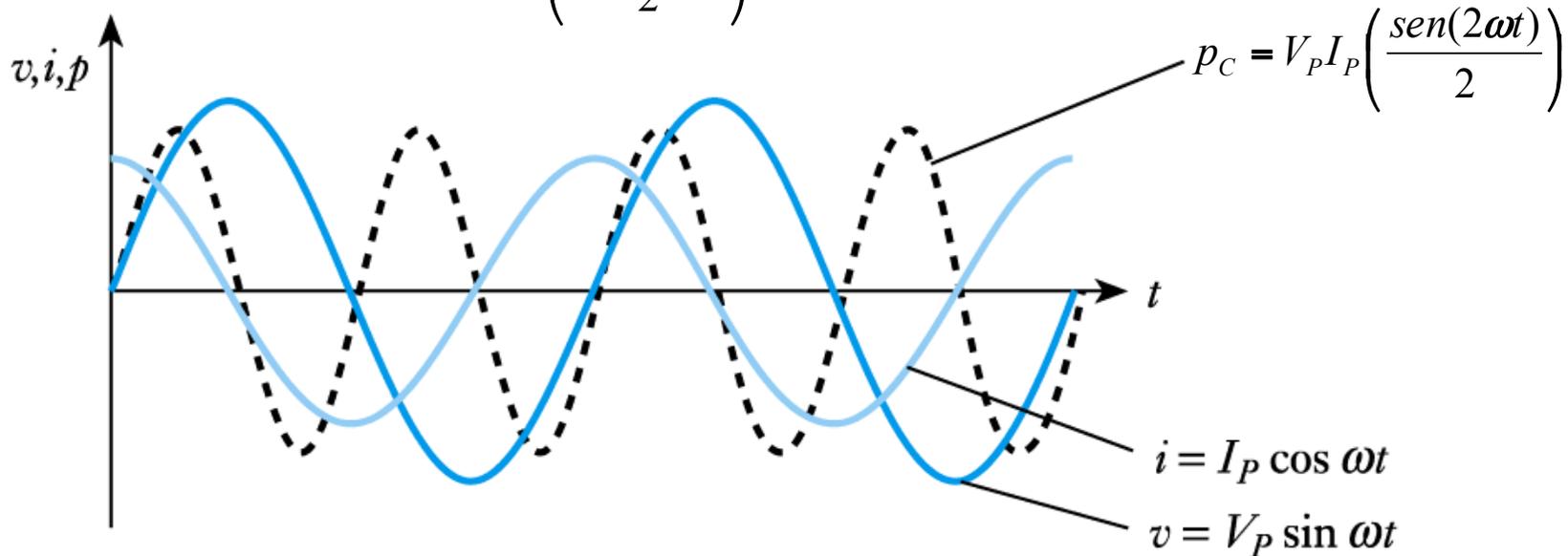
Potencia en un condensador

- Potencia instantánea (I adelanta 90° de V)

$$p_C(t) = v(t) \cdot i(t) \qquad p_C = V_P \sin(\omega t) \times I_P \cos(\omega t) = V_P I_P \left(\frac{\sin(2\omega t)}{2} \right)$$

- Potencia media y eficaz

$$\left(\frac{\sin(2\omega t)}{2} \right) = 0 \qquad P_{Cm(av)} = P_{Cef(r.m.s.)} = 0$$



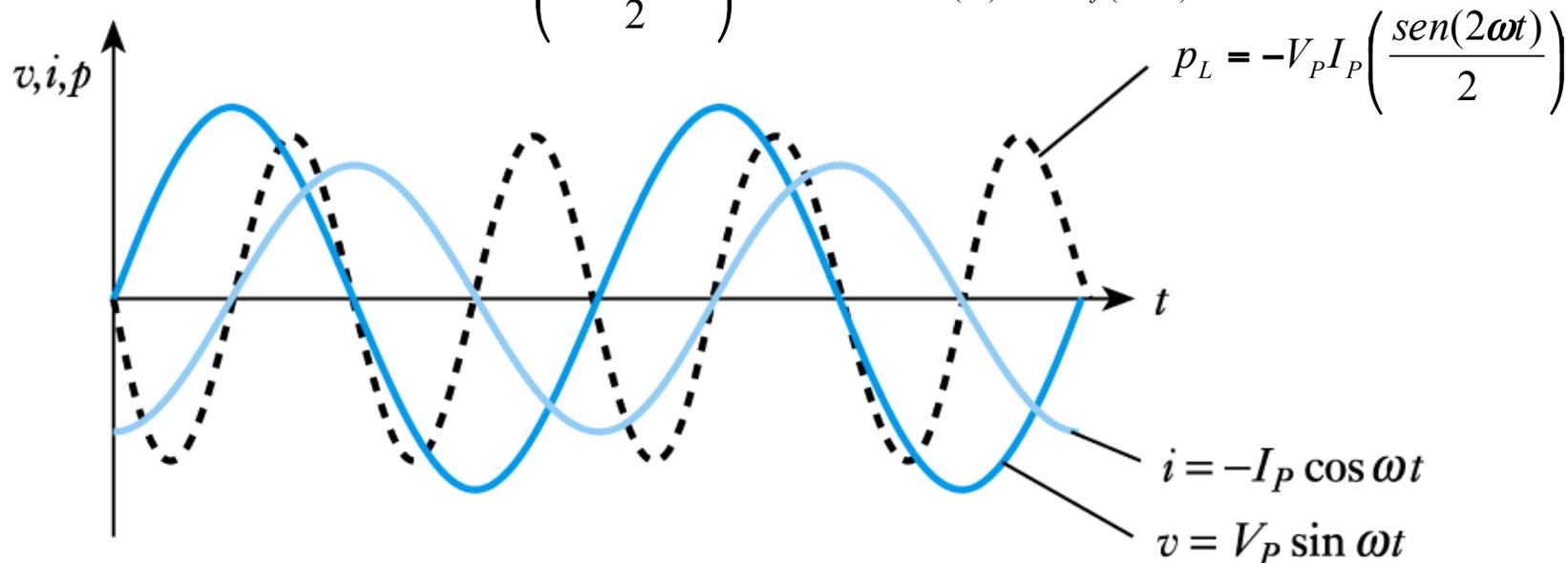
Potencia en una bobina

- Potencia instantánea (I retrasa 90° de V)

$$p_L(t) = v(t) \cdot i(t) \qquad p_L = V_P \text{sen}(\omega t) \times [-I_P \cos(\omega t)] = -V_P I_P \left(\frac{\text{sen}(2\omega t)}{2} \right)$$

- Potencia media y eficaz

$$\left(\frac{\text{sen}(2\omega t)}{2} \right) = 0 \qquad P_{Lm(av)} = P_{Lef(r.m.s.)} = 0$$



Energía en régimen senoidal permanente

- Energía en una resistencia

$$w_R(t) = \int_0^t v(t) \cdot i(t) \partial t \quad w_R = \int_0^t V_P I_P \left(\frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} \right) \partial t = \frac{V_{ef} I_{ef}}{\omega} \left(\omega t - \frac{\text{sen}(2\omega t)}{2} \right) \quad \text{Valor creciente con } t$$

- Energía en un condensador

$$I_{ef} = \frac{V_{ef}}{1/\omega C} = \omega C V_{ef} \quad w_C = \int_0^t V_P I_P \left(\frac{\text{sen}(2\omega t)}{2} \right) \partial t = \frac{1}{2} C V_{ef}^2 (1 - \cos(2\omega t)) \quad \text{Valor oscilante con frecuencia } (2\omega t) \text{ entre } 0 \text{ y } C V_{ef}^2$$

- Energía en una bobina

$$V_{ef} = \omega L I_{ef} \quad w_L = \int_0^t -V_P I_P \left(\frac{\text{sen}(2\omega t)}{2} \right) \partial t = \frac{1}{2} L I_{ef}^2 (1 - \cos(2\omega t)) \quad \text{Valor oscilante con frecuencia } (2\omega t) \text{ entre } 0 \text{ y } L I_{ef}^2$$

Potencia en una resistencia y una bobina

- Potencia instantánea. La corriente irá desfasada

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \quad p = V_P \text{sen}(\omega t) \times I_P \text{sen}(\omega t - \phi_i) = \frac{1}{2} V_P I_P \{ \cos \phi_i - \cos(2\omega t - \phi_i) \}$$

$$p = \frac{1}{2} V_P I_P \cos \phi_i - \frac{1}{2} V_P I_P \cos(2\omega t - \phi_i)$$

- Potencia media. Primer término. Potencia disipada en los componentes resistivos

$$P = \frac{1}{2} V_P I_P (\cos \phi_i) = \frac{V_P}{\sqrt{2}} \times \frac{I_P}{\sqrt{2}} \times (\cos \phi_i) = V_{ef} I_{ef} \cos \phi_i$$

- Potencia media. Segundo término. Potencia almacenada en el elemento reactivo (bobina), y que recircula por el circuito en cada ciclo

$$\text{Frecuencia } 2\omega t \quad \cos(2\omega t - \phi_i) = 0$$

Potencia Activa y Reactiva

- En circuitos con componentes resistivos y reactivos, la potencia tiene dos términos:

- ✓ Potencia disipada en los componentes resistivos. **Potencia activa** (P) en vatios (W)

$$P = \frac{1}{2} V_P I_P (\cos \phi_i) = \frac{V_P}{\sqrt{2}} \times \frac{I_P}{\sqrt{2}} \times (\cos \phi_i) = V_{ef} I_{ef} \cos \phi_i$$

- ✓ Potencia almacenada en los elementos reactivos y devuelta al circuito. **Potencia reactiva** (Q) en Voltamperios reactivos (VA_r)

$$p = -\frac{1}{2} V_P I_P \cos(2\omega t - \phi_i)$$

- El producto de la tensión eficaz V por la corriente eficaz I se denomina Potencia aparente (S) en Voltamperios (VA)

$$P = V_{ef} I_{ef} \cos \phi_i = S \cos \phi_i$$

Potencia Activa y Reactiva

- La potencia reactiva (Q) no se disipa, pero al circular por el circuito obliga a dimensionar cables y otros elementos adecuadamente y aumenta las pérdidas

Potencia Activa (P)

$$P = VI \cos \phi \text{ [W]}$$

Potencia Reactiva (Q)

$$Q = VI \sin \phi \text{ [VA}_r\text{]}$$

Potencia Aparente (S)

$$S^2 = P^2 + Q^2 \text{ [VA]}^2$$

Las bobinas “consumen” potencia reactiva mientras con los condensadores la “suministran”. Convenio de signos

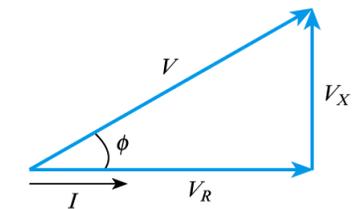
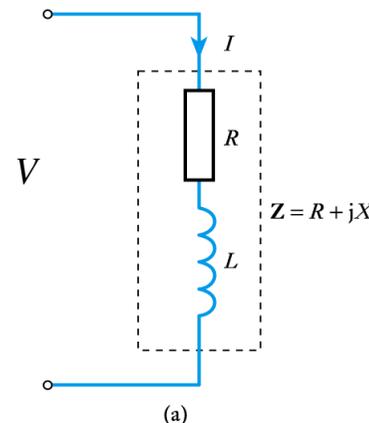


Diagrama de tensiones

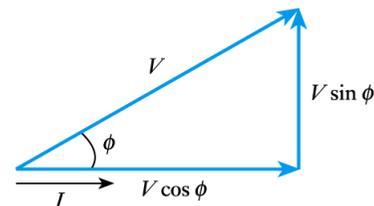


Diagrama de tensiones

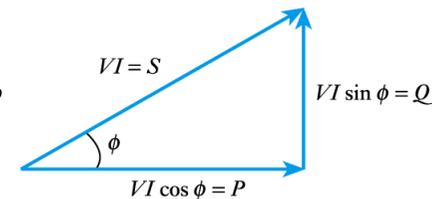


Diagrama de potencias

Factor de potencia

- Factor de potencia

$$\frac{\text{Potencia Activa (}W\text{)}}{\text{Potencia Aparente (}VA\text{)}} = \text{Factor de Potencia} \quad \frac{P}{S} = \cos \phi$$

- Las cargas inductivas tienen un factor de potencia “de retraso”
- Las cargas capacitivas tienen un factor de potencia “de adelanto”
 - ✓ Un motor de alterna típico tiene un factor de potencia inductivo de 0,9
 - ✓ Una gran red eléctrica nacional tiene un factor de potencia inductivo de 0,8 - 0,9
 - ✓ Equipos electrónicos: Fuentes conmutadas, rectificadores e inversores
 - ✓ Industrias. Motores trifásicos. Hornos de inducción. Ferrocarriles

Factor de potencia. Corrección

- El problema de un bajo factor de potencia se puede corregir añadiendo al circuito componentes adicionales que lo hagan cercano a la unidad. **Corrección del Factor de Potencia**
 - ✓ Instalaciones eléctricas convencionales. Un condensador del tamaño adecuado en paralelo con una carga con un bajo factor de potencia inductivo puede “cancelar” el efecto inductivo
 - ✓ Podría colocarse en serie, pero modificaría la tensión en la carga
 - ✓ Cuanto más cercano a la unidad, más eficiente el sistema
 - ✓ Cuanto más lejano de la unidad, aumentan las pérdidas, hay que sobredimensionar las instalaciones, hay caídas de tensión
 - ✓ Las compañías eléctricas penalizan en la factura los consumos con bajo (pobre) factor de potencia

- Microelectrónica: circuitos y dispositivos. M. N. Horenstein, Prentice Hall
- Circuitos eléctricos. Nilsson, James W. Pearson Prentice Hall.
- Teoría de Circuitos. V. Parra, J. Ortega, A. Pastor, A. Pérez. UNED
- Fundamentals of electric circuits ó Fundamentos de circuitos eléctricos. Alexander, Charles K., Matthew N. O. Sadiku.
- Electronics: A Systems Approach. Neil Storey. Pearson-Prentice Hall. 4th Edition

B

BIBLIOGRAFÍA