Tema 2

Sistemas de ecuaciones lineales

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE VITORIA
VINCE IN BONO MALUM

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE VITORIA

- Una **ecuación lineal** tiene variables $(x_1,\ldots,x_n)$ término independiente (*b)* y coeficientes (reales o complejos) $a_1,\ldots,a_n$

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$$

- Un **sistema de ecuaciones lineales** (o **sistema lineal**) es un conjunto de varias ecuaciones sobre las mismas variables x_1,…., x_n

Forma matricial

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$ es la matriz de coeficientes con m filas y n columnas

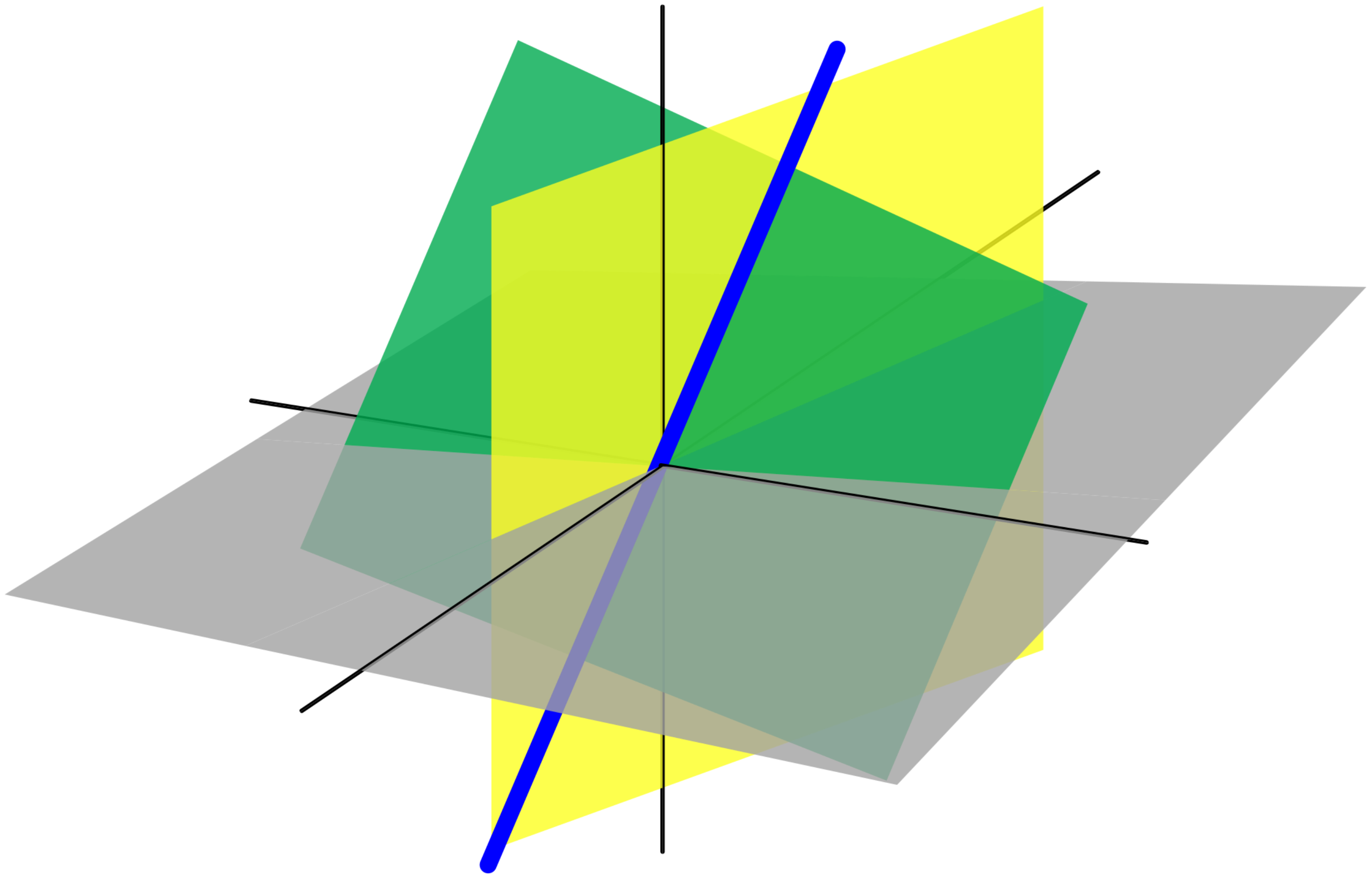
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$ es el vector de incógnitas y $$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$ es el término independiente.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Aplicaciones de las ecuaciones lineales

© 2008 Bill Amend

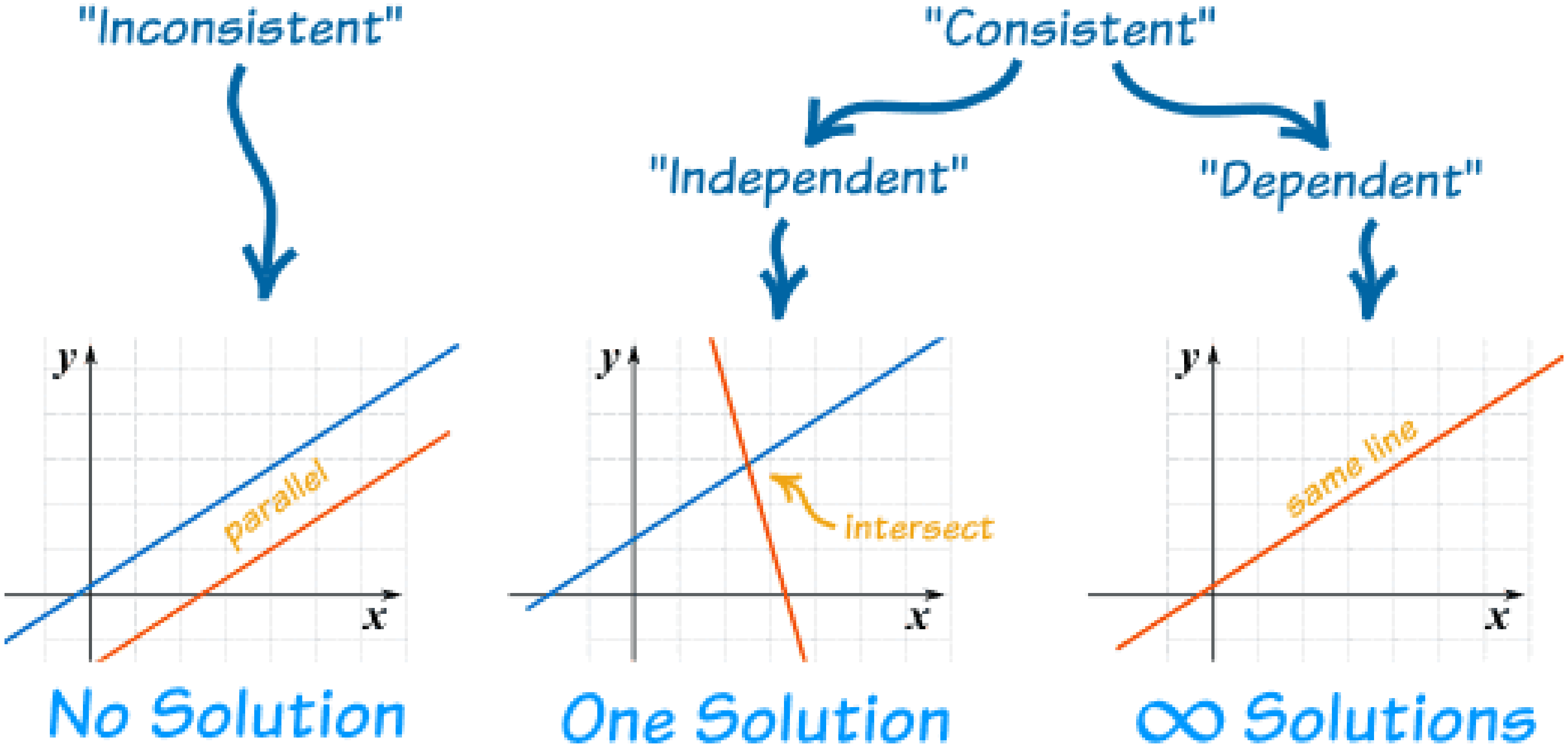
Interpretación geométrica



Soluciones

- Una **solución** al sistema es una lista (s_1, s_2,…, s_n) que hacen que cada ecuación se cumpla si s_1,…, s_n se sustituyen por x_1,…, x_n
- No tiene porqué haber una única solución, puede haber un **conjunto de soluciones** (¿ejemplo?)
- Dos sistemas lineales son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto de soluciones

Soluciones: opciones



- Buscad un ejemplo de un sistema de ecuaciones lineal con ∞ soluciones

Representación matricial

- Ejemplo:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9, \end{aligned}$$

- ***MATRIZ DE COEFICIENTES***

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Matriz aumentada

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\
2x_2 - 8x_3 &= 8 \\
-4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}
$$

Tamaño de la matriz = número de filas x número de columnas
3 x 4

Resolver un sistema de ecuaciones

- **Ejemplo 1:**

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9 \end{aligned}$$

- **Procedimiento:** transformar en un sistema de ecuaciones equivalente que sea ***más fácil*** de resolver

Truco fundamental

- Si tenemos una ecuación y multiplicados AMBOS LADOS de la ecuación por el mismo factor, el resultado de la ecuación NO varía

$$x + 2 = 4$$

(x 2) $$2x + 4 = 8$$

(x (-1)) $$-x - 2 = -4$$

Qué se puede hacer

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE VITORIA

- Operaciones básicas:

  1. Multiplicar una fila por una constante no nula.
  2. Intercambiar una fila por la suma de esa fila más un múltiplo de otra.
  3. Intercambiar dos filas.

- Estas operaciones producirán matrices EQUIVALENTES

La solución debe indicar…

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE VITORIA

- OBLIGATORIAMENTE:
    1. El sistema es consistente o inconsistente
    2. Hay una única solución o varias

Solución

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE VITORIA

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 4x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 0 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \\ \hline -3x_2 + 13x_3 = -9 \end{array}$$

Solución…

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ -3x_2 + 13x_3 &= -9 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

Solución…

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - 4x_3 &= 4 \\ -3x_2 + 13x_3 &= -9 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x_2 - 12x_3 &= 12 \\ -3x_2 + 13x_3 &= -9 \\ \hline x_3 &= 3 \end{aligned}$$

- Esto ya sí es sencillo

Forma triangular

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE VITORIA

- El nuevo sistema tiene una forma triangular

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\
x_2 - 4x_3 &= 4 \\
\hline
x_3 &= 3
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix}
1 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -4 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 3
\end{bmatrix}
$$

Diagonal principal

- NO hay un único camino para llegar a la solución, pero unos son más eficientes y fáciles que otros

Remate final

$$4x_3 = 12$$
$$\underline{x_2 - 4x_3 = 4}$$
$$x_2 = 16$$

$$-x_3 = -3$$
$$\underline{x_1 - 2x_2 + x_3 = 0}$$
$$x_1 - 2x_2 = -3$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= -3 \\ x_2 &= 16 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

The end...

$$x_1 = 29 \qquad \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$x_2 = 16$$

$$x_3 = 3$$

¿Consistente o no? ¿Una única solución o varias?

Comprobando la solución

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE VITORIA

$$(29)-2(16)+(3)=29-32+3=0$$

$$2(16)-8(3)=32-24=8$$

$$-4(29)+5(16)+9(3)=-116+80+27=-9$$

Prueba tú…

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 & = & -3 \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 & = & -2 \\ -2x_1 + x_2 + 7x_3 & = & -1 \end{cases}$$

Otro más...

$$
\begin{aligned}
x_2 - 4x_3 &= 8 \\
2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\
5x_1 - 8x_2 + 7x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

Resuelve...

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -1/2 & 2 & -3/2 \end{bmatrix}$$

Más formalmente

- Método de Gauss: buscamos generar matrices ESCALONADAS (echelon form)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 9 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1,F_2-3F_1,F_3-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & -1 & 12 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \rightleftarrows F_3} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)}_{\text{hasta aquí en ej. 2}} \cdots$$

$$\xrightarrow{F_1,F_2+F_3,F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1,\frac{-1}{7}F_2,F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-3F_2,F_2,F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \cdots$$

$$\xrightarrow{F_1-F_3,F_2,F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 2 \end{cases}.$$

Definición: Una matriz se dice que es <u>escalonada</u> si se puede trazar una escalera (ver ej. 3) descendente tal que

i. Cada peldaño tiene altura 1

ii. Debajo de la escalera todos los términos son cero

iii. En cada esquina de un peldaño hay un 1 y encima de este 1 sólo hay ceros

Definiciones

- Una matriz rectangular está en forma escalonada reducida si está en forma escalonada y además cumple:
  - La entrada principal de cada fila no nula es 1
    - La entrada principal de de una fila no nula es la primera entrada no nula por la izquierda
  - Cada 1 que corresponde a una entrada principal es la única entrada distinta de cero en su columna

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

¿Está alguna de ellas en forma escalonada reducida? ¿Cuáles son las entradas principales?

Ejemplos

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE VITORIA

Escalonadas

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

No escalonadas

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

Ejemplos de matrices escalonadas reducidas.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pivote

- Una posición pivote de una matriz es una entrada de la matriz original que corresponde a una entrada principal de en una forma escalonada de dicha matriz.
- Una columna pivote de una matriz escalonada es una columna que contiene una posición pivote.
- Las variables que corresponden a columnas pivote de la matriz se denominan variables principales.
  - Las demás son **variables libres**.

pivote

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 6 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

convertir en ceros

$$A=\begin{bmatrix}5 & 8 & 9\\ 0 & 6 & 7\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\underbrace{\begin{bmatrix}5 & 8 & 9\\ 0 & 6 & 7\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{matrix}(1/5)\\ \\ \\ \end{matrix}}_{\text{Paso 1}}\rightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 8/5 & 9/5\\ 0 & 6 & 7\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{matrix}(-1)\\ \\ (+)\end{matrix}}_{\text{Paso 2}}\rightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 8/5 & 9/5\\ 0 & 6 & 7\\ 0 & 2/5 & 6/5\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ (1/6)\\ \\ \end{matrix}}_{\text{Paso 3}}\rightarrow$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 8/5 & 9/5\\ 0 & 1 & 7/6\\ 0 & 2/5 & 6/5\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ (-2/5)\\ (+)\end{matrix}}_{\text{Paso 4}}\rightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 8/5 & 9/5\\ 0 & 1 & 7/6\\ 0 & 0 & 11/15\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ (15/11)\end{matrix}}_{\text{Paso 5}}\rightarrow\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 8/5 & 9/5\\ 0 & 1 & 7/6\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{\text{Matriz escalonada}}$$

Ejemplo 2

$$A=\begin{bmatrix}5 & 7 & 9 & 6 & 4\\ 7 & 4 & 2 & 7 & 8\\ 8 & 9 & 3 & 6 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5 & 7 & 9 & 6 & 4\\ 7 & 4 & 2 & 7 & 8\\ 8 & 9 & 3 & 6 & 2\end{bmatrix}\begin{array}{l}(1/5)\\ \\ \\ \end{array}\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1 & 7/5 & 9/5 & 6/5 & 4/5\\ 7 & 4 & 2 & 7 & 8\\ 8 & 9 & 3 & 6 & 2\end{bmatrix}\begin{array}{l}(-7)\\ (+)\\ \\ \end{array}\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1 & 7/5 & 9/5 & 6/5 & 4/5\\ 0 & -29/5 & -53/5 & -7/5 & 12/5\\ 8 & 9 & 3 & 6 & 2\end{bmatrix}\begin{array}{l}(-8)\\ \\ (+)\end{array}\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1 & 7/5 & 9/5 & 6/5 & 4/5\\ 0 & -29/5 & -53/5 & -7/5 & 12/5\\ 0 & -11/5 & -57/5 & -18/5 & 22/5\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ (-5/29)\\ \\ \end{array}\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1 & 7/5 & 9/5 & 6/5 & 4/5\\ 0 & 1 & 53/29 & 7/29 & -12/29\\ 0 & -11/5 & -57/5 & -18/5 & 22/5\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ (11/5)\\ (+)\end{array}\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1 & 7/5 & 9/5 & 6/5 & 4/5\\ 0 & 1 & 53/29 & 7/29 & -12/29\\ 0 & 0 & -214/29 & -89/29 & -154/29\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ (-29/214)\end{array}\rightarrow$$

Método de Gauss con matrices escalonadas

1. Seleccionar la columna distinta de cero que se encuentre más a la izquierda en la matriz. Es una columna pivote.
2. Seleccionar como pivote (para definir los multiplicadores) una entrada distinta de cero en la columna pivote. Si es necesario se intercambiarán dos filas.
3. Usar operaciones elementales para hacer ceros debajo del pivote
4. Tapar la fila y la columna que contienen al pivote y repetir los pasos 1 a 3 en la submatriz que queda. Repetir este proceso hasta que no haya más filas distintas de cero por modificar.

Con este algoritmo llegamos a una matriz escalonada a partir de la matriz original. Si queremos obtener la única matriz escalonada reducida equivalente a la matriz original hay que efectuar un paso más:

5. Comenzar por el pivote situado más a la derecha trabajando a hacia arriba y a la izquierda, crear ceros por encima de cada pivote. Si un pivote no es 1, dividimos la fila por el valor del pivote.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -7 & 3 \\ 5 & -4 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & -23 & 16 \end{bmatrix}.$$

Apliquemos el método de Gauss. Cada vez eligimos como pivote al elemento el más izquierdo y el más alto. En el primer paso usamos como pivote el elemento $A_{1,1} = 3$.

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -7 & 3 \\ 5 & -4 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & -23 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 -= R_3]{\substack{R_2 += \frac{1}{3}R_1 \\ R_3 -= \frac{5}{3}R_1}} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{3} & 3 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -27 & 16 \end{bmatrix}.$$

En el segundo paso tenemos que intercambiar dos filas.

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{3} & 3 \\ 0 & 1 & -27 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_4 -= R_2} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{3} & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{85}{3} & 15 \end{bmatrix}.$$

Y un paso más:

$$\xrightarrow{R_4 - 5R_3} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{17}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora la matriz es escalonada, $r = 3$, $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$.

Aplicado a sistemas de ecuaciones

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -2 & 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

La matriz es escalonada reducida. Podemos utilizar la primera ecuación para despejar la incógnita x_1, la segunda ecuación para despejar x_3 y la tercera para x_4:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 - 5x_5 - 3; \\ x_3 = 2x_5 + 4; \\ x_4 = -4x_5 + 2. \end{cases}$$

La solución general es

$$x = \begin{bmatrix} 2x_2 - 5x_5 - 3 \\ x_2 \\ 2x_5 + 4 \\ -4x_5 + 2 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

Ataca estos ejemplos (Gauss)

$$\left.\begin{aligned} x_1+3x_2-x_3+x_4&=1\\ -2x_1+x_2+2x_3&=7\\ x_2-x_4&=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1-x_2+x_3&=1\\ 2x_1+x_2+x_3&=0\\ 2x_1-2x_2+2x_3&=3 \end{aligned}\right\}$$

Otras aplicaciones del método de Gauss

- Cálculo de la matriz inversa $\quad (A \mid I) \xrightarrow{\text{Gauss}} (I \mid A^{-1})$
- Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

En primer lugar, por simplicidad en las operaciones, vamos a intercambiar las filas 2 y 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Hacemos 3ª f = 3ª f - 2·1ª f (y dejamos el resto igual):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Continuación…

Ahora 3ª f = 3ª f + 4·2ª f (estos dos pasos se podrían haber resumido en una sola operación, 3ª f = 3ª f-2·1ª f + 3.2ª f, no se ha hecho por claridad al ser el primer paso):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Ahora hacemos 1ª f = (1ª f)/2 y 3ª f = (3ª f)/(-6):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3/2 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/6 & -1/2 \end{array}\right)$$

Y, por último, hacemos la operación 1ª f = 1ª f - (3/2)· 2ª f - 2.3ª f:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/6 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/6 & -1/2 \end{array}\right)$$

Con lo que la inversa es:

$$\begin{pmatrix} -1/6 & 1/3 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & -1/6 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE VITORIA

- Crea tu propio enunciado para una matriz 3x3, calcula la matriz inversa mediante este método

Ejemplo

Resolver el sistema de ecuaciones por el método de Cramer

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 11 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= 18 \end{aligned}$$

$$\det M = 4 \neq 0$$

Las incógnitas se calculan como se expresa a continuación:

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} \boxed{10} & 1 & 1 \\ \boxed{11} & 1 & 1 \\ \boxed{18} & 5 & 1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}} = 1;\ x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & \boxed{10} & 1 \\ 2 & \boxed{11} & 1 \\ 1 & \boxed{18} & 1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}} = 2;\ x_3 = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \boxed{10} \\ 2 & 1 & \boxed{11} \\ 1 & 5 & \boxed{18} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}} = 7$$

Se puede emplear el método de Cramer en **sistemas indeterminados**, teniendo ciertas precauciones. Veámoslo con un ejemplo.

Método de Cramer

$$\text{Si } D = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0,\ x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & v_1 & w_1 \\ b_2 & v_2 & w_2 \\ b_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}}{D} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & b_1 & w_1 \\ u_2 & b_2 & w_2 \\ u_3 & b_3 & w_3 \end{vmatrix}}{D} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & b_1 \\ u_2 & v_2 & b_2 \\ u_3 & v_3 & b_3 \end{vmatrix}}{D} \quad \text{El sistema es compatible determinado}$$

$$\nearrow \text{ y } \begin{vmatrix} b_1 & v_1 & w_1 \\ b_2 & v_2 & w_2 \\ b_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ o } \begin{vmatrix} u_1 & b_1 & w_1 \\ u_2 & b_2 & w_2 \\ u_3 & b_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ o } \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & b_1 \\ u_2 & v_2 & b_2 \\ u_3 & v_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ El sistema es incompatible, sin solucion}$$

$$\text{Si } D = 0$$

$$\searrow \text{ y } \begin{vmatrix} b_1 & v_1 & w_1 \\ b_2 & v_2 & w_2 \\ b_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} u_1 & b_1 & w_1 \\ u_2 & b_2 & w_2 \\ u_3 & b_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & b_1 \\ u_2 & v_2 & b_2 \\ u_3 & v_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0, \text{ El sistema es compatible indeterminado}$$

Aplicación del método de Gauss al rango de una matriz

- Podemos descartar una línea si:
  - Todos los coeficientes son ceros
  - Hay dos líneas iguales
  - Una línea es proporcional a otra
  - Una línea es combinación lineal de otras

- Ejercicio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Otros ejemplos

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad rg(A) = 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix} \qquad rg(B) = 1$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad rg(C) = 4$$

Tarea

UNIVERSIDAD FRANCISCO DE VITORIA

- Inventa ejercicios de tamaño mínimo 5 x 5 y calcula el rango de la matriz

Ejercicio

- Discutir los siguientes sistemas para los distintos valores de *K*

$$\left.\begin{array}{l} x + y + kz = 1 \\ kx + (k-1)y + z = k \\ x + y + z = k + 1 \end{array}\right\}$$

$$\text{(b)} \left\{\begin{array}{l} 2x + \lambda y = -4 \\ \lambda x - 3y = 5 \\ 3x + y = -5\lambda \end{array}\right.$$