Capítulo 2

Variaciones y permutaciones

2.1. Variaciones

Un tipo de problema fundamental en combinatoria consiste en estudiar los diversos modos de ordenar los elementos de un conjunto.

Para un conjunto finito dado, de n elementos, ordenar los elementos del mismo o bien ordenar los de un subconjunto suyo de m elementos, con $m \leq n$, equivale a determinar listas de m elementos (por simplicidad las podemos llamar m-listas) obtenidas a partir de un conjunto con n elementos. Si el orden de los elementos produce resultados distintos estaremos ante el concepto de variación.

Definición 2.1 *Dados $n \in \mathbb{N}$ objetos (o un conjunto de n elementos) y $m \in \mathbb{N}$ y $m \leq n$, llamamos variación m-aria (o de orden m) de estos n objetos, a todo conjunto ordenado formado por m objetos cualesquiera de los n considerados, de modo que dos variaciones son distintas cuando difieren en la naturaleza de algún elemento o bien cuando constando de los mismos elementos difieren en el orden de sucesión de éstos.*

Es decir, dado $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ una variación m-aria es una m-upla o una lista ordenada de m elementos $(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_m})$

de modo que dos variaciones son distintas si hay algún elemento distinto en las dos m-uplas o teniendo los mismos elementos tienen una ordenación distinta.

En el caso de que algún o algunos elementos de la variación se puedan repetir entonces se denominan **variaciones con repetición**. Cuando no se pueden repetir los elementos se denominan **variaciones simples**. El número de variaciones simples, de n elelementos tomados de m en m, lo denotamos por V_n^m o bien $V_{n,m}$ y el de variaciones con repetición se denota por VR_n^m o por $VR_{n,m}$.

Ambos casos se corresponden con que en una m-lista o m-upla no se puedan repetir los elementos o que se puedan repetir.

1. Si se pueden repetir los elementos $a_1, \dots, a_n$. Por cada posición en una m-lista

$$(\overbrace{\_,\_,\cdots,\_}^{m})$$

hay n posibles elementos para asignar. Por el principio de multiplicación tendremos n^m posibles m-uplas; es decir $VR_n^m = n^m$.

2. Si no se pueden repetir los elementos tenemos:

Para la primera posición hay n posibilidades.

Para la segunda posición, como el elemento elegido anteriormente ya no puede tomarse, hay

Para la tercera posición habrá $n-2$ posibilidades.

$\vdots$

Para la emésima posición hay $n-(m-1) = n-m+1$ posibilidades.

Resultando, en total, que $V_n^m = n(n-1)\cdots(m-n+1)$.

Por otra parte, recordando la definición de factorial de un número natural $m! = m(m-1)(m-2)\cdots 2\cdot 1$, se tiene que $V_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$. Recordemos también que por definición $0! = 1$.

2.1.1. Obtención de todas las variaciones simples

Vamos a considerar los cuatro primeros dígitos $\{1,2,3,4\}$ y vamos a formar todas las variaciones simples de los mismos.

1. Las variaciones de estos cuatro números, tomados de uno en uno; es decir las variaciones monarias $V_4^1 = 4$ son:

1	2	3	4

2. Las variaciones binarias, $V_4^2 = 4\cdot 3 = 12$, son:

12	13	14
21	23	24
31	32	34
41	42	43

Para generar todas las variaciones, de manera sistemática, a cada variación monaria (que es un dígito del 1 al 4) añadimos el resto de dígitos ordenadamente.

3. Las variaciones ternarias, $V_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, son:

123	124	132	134	142	143
213	214	231	234	241	243
312	314	321	324	341	342
412	413	421	423	431	432

Para obtener las variaciones ternarias ordenadamente, a cada variación binaria se le añade el esto de dígitos que no figuren en ella.

4. Las variaciones cuaternarias, $V_4^4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$, son:

1234	1243	1324	1342	1423	1432
2134	2143	2314	2341	2413	2431
3124	3142	3214	3241	3412	3421
4123	4132	4213	4231	4312	4321

Para obtener las variaciones de cuatro elementos, tomados de cuatro en cuatro, a cada variación ternaria añadimos el dígito que no figura en ella.

El procedimiento del caso particular anterior es el que podemos seguir de manera general. Observemos que mediante este procedimiento las variaciones quedan ordenadas como una sucesión monótona creciente.

2.2. Permutaciones

Un caso particular de las variaciones V_n^m ocurre cuando $m = n$; en este caso, se trata de los grupos que se pueden formar con los n elementos de modo que en cada grupo figuren todos y dos grupos son distintos si el orden de colocación de los elementos son distintos. Estas distintas ordenaciones de los n elementos u objetos se denominan permutaciones de los n elementos y se denota por P_n. Teneindo en cuenta que, por definición, $0! = 1$, se tiene que

$$P_n = V_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!.$$

2.2.1. Obtención de todas las permutaciones

Consideremos a_1, a_2, a_3, a_4. Vamos a obtener de manera sistemática todas las permutaciones de estos cuatro elementos.

Primer paso. Formamos las permutaciones de los dos primeros elementos: a_1a_2 y a_2a_1.

Segundo paso. Para formar todas las permutaciones de los tres primeros elementos, a cada una de las dos permutaciones de los dos primeros elementos añadimos ahora a_3 en todos los lugares posibles y obtenemos

Orden 2		Orden 3		
a_1a_2	$\longrightarrow$	$a_1a_2a_3$	$a_1a_3a_2$	$a_3a_1a_2$
a_2a_1	$\longrightarrow$	$a_2a_1a_3$	$a_2a_3a_1$	$a_3a_2a_1$

Tercer paso. Añadimos a cada una de las permutaciones anteriores a_4 en todas las posiciones posibles para obtener las permutaciones de $a_1, \ldots, a_4$:

Orden 3		Orden 4			
$a_1a_2a_3$	$\longrightarrow$	$a_1a_2a_3a_4$	$a_1a_2a_4a_3$	$a_1a_4a_2a_3$	$a_4a_1a_2a_3$
$a_1a_3a_2$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_3a_1a_2$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_2a_1a_3$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_2a_3a_1$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_3a_2a_1$	$\longrightarrow$	$a_3a_2a_1a_4$	$a_3a_2a_4a_1$	$a_3a_4a_2a_1$	$a_4a_3a_2a_1$

Este mismo procedimiento puede extenderse para determinar todas las permutaciones de cualquier número de elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

2.2.2. Inversiones en una permutación

Establecido un cierto orden de sucesión entre los elementos de una permutación, denominamos a la misma *permutación principal*. En el ejemplo precedente para determinar todas las permutaciones de a_1, a_2, a_3, a_4, cualquiera de dichas permutaciones puede elegirse como permutación principal, pero lo usual es tomar como ésta a la que mantiene el orden de los números naturales; es decir, lo usual es tomar a la permutación a_1, a_2, a_3, a_4 como permutación principal.

Fijada la permutación principal, en otra permutación cualquiera se dice que dos elementos forman *sucesión* cuando prescindiendo de los restantes están en el mismo orden que en la permutación principal. Y se dice que forman *inversión* cuando no están en dicho orden. Para hallar las inversiones de una permutación basta comparar cada elemento con todos los que le siguen. Por ejemplo, si consideramos $a_3a_1a_4a_2$, a_3 forma inversión con a_1 y a_2 porque está delante de ellos y debiera estar detrás (en relación a la que estamos considerando como permutación principal a_1, a_2, a_3, a_4) y, por su parte, a_4 forma inversión con a_2. Por tanto, la permutación $a_3a_1a_4a_2$ presenta tres inversiones.

Definición 2.2 *Una permutación se dice que es de clase par (respectivamente impar) si tiene un número par (respectivamente impar) de inversiones.*

En el ejemplo anterior, $a_3a_1a_4a_2$ es una permutación de clase impar.

Proposición 2.3 *Si en una permutación cualquiera se invierten dos elementos, entonces cambia la clase.*

Demostración. Supongamos primero que dichos elementos a_i, a_j son consecutivos en la permutación dada. Designemos por A todos los elementos anteriores a ambos y por B a los posteriores: Aa_ia_jB. Invirtiendo estos elementos tenemos Aa_ja_iB. Todas las inversiones que forman los elementos de A entre sí o con los siguientes permanecen. Las inversiones que a_i y a_j forman con los elementos de B también subsisten. Y las inversiones que forman los elementos de B también permanecen. La única alteración es la de a_ia_j. Por tanto, si a_ia_j formaban sucesión, ahora hay una inversión más. Y si a_ia_j eran inversión, ahora desaparece para ser sucesión. En fefinitiva, al cambiar a_i por a_j en Aa_ia_jB se ha obtenido una inversión más o se ha eliminado una inversión. Luego, en cualquier caso, la permutación cambia de clase.

Supongamos ahora que entre a_i y a_j hay h elementos que representamos por C y tenemos Aa_iCa_jB. Como hay que invertir a_i con a_j, hacemos avanzar h lugares a a_i permutandolo sucesivamente con los h elementos que hay en C, obteniendo ACa_ia_jB. Ahora hacemos retroceder $h+1$ lugares a a_j y se obtiene Aa_jCa_iB. Hacer avanzar o retroceder un puesto a un elemento es permutarlo con el consecutivo y ello altera la clase de la permutación. El número total de cambios de clase es $2h+1$ que es impar, luego cambia la clase de la permutación.

$\square$

Proposición 2.4 *Entre las permutaciones de m objetos, hay $\frac{m!}{2}$ pares y $\frac{m!}{2}$ impares.*

Demostración. Sean las $m!$ permutaciones. Consideremos dos elementos cualesquiera que vamos a fijar, por ejemplo a_1 y a_2. Si en las $m!$ permutaciones invertimos a_1 y a_2 obtenemos $m!$ entre los mismos m objetos. En las nuevas permutaciones, dos cualesquiera son distintas entre sí, pues si fueran iguales también lo serían las originales antes de invertir a_1 y a_2. Es decir, las nuevas $m!$ permutaciones obtenidas son las mismas que ya teníamos. Por la proposición 2.3 cada permutación par se ha convertido en impar y cada impar en par. Luego necesariamente las pares y las impares se corresponden una a una agotando todas en esa correspondencia (se corresponden biyectivamente) y así hay $\frac{m!}{2}$ pares y $\frac{m!}{2}$ impares.

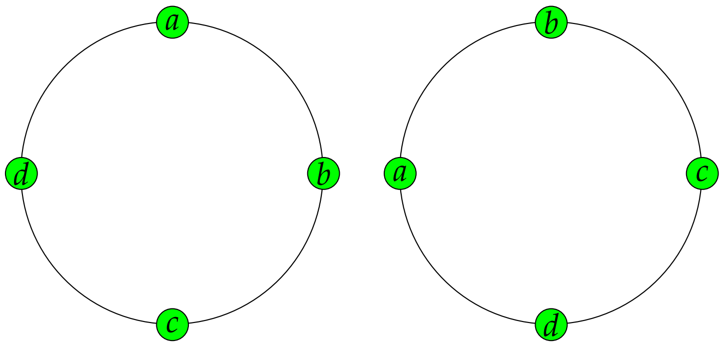
$\square$

2.2.3. Permutaciones cíclicas

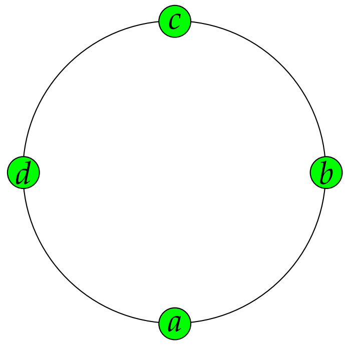
Supongamos que deseamos saber de cuántas maneras se pueden sentar cuatro personas en un banco. Si las personas las denominamos a, b, c, d se trata de contar los distintos grupos que se pueden formar de modo que estén las cuatro letras; es decir, variando el orden de las mismas. En definitiva, todas las permutaciones de 4. La permutación a, b, c, d nos indica que el primero por la izquierda en el banco era a, le sigue b, luego c y termina sentado por la derecha d. Otra permutación, por ejemplo a, c, d, b nos dice que el orden de colocación de izquierda a derecha es ahora a, c, d y b que es obviamente distinto de la disposición inicial. Por tanto, es inmediato concluir que el número de formas en que pueden sentarse esas cuatro personas es $P_4 = 4! = 24$.

Pero, ¿qué pasa si lo que queremos saber es de cuántas formas distintas se puden sentar esas cuatro personas alrededor de una mesa redonda?

Podríamos estar tentados de contestar que es también $P_4 = 4!$, pero sin embargo no es así. Observemos las siguientes disposiciones:



¿Son diferentes? Podemos observar que se trata de la misma distribución donde se ha efectuado un giro de noventa grado en sentido contra horario. Las personas a, b, c y d guardan la misma posición unas respecto de otras. Podemos observar que la segunda distribución es la primera tras el giro indicado o bien que la segunda es la primera mirada desde otra posición perpendicular a la primera. En todo caso, ambas nos dan la misma forma de sentarse alrededor de la mesa. No ocurre así con esta otra forma:



Tenemos, pues, que para cada distribución circular dada hay cuatro distribuciones en total que son iguales, que representan un giro de la elegida. Luego hay que dividir por 4 el número de permutaciones de los elementos; es decir, en realidad hay $\frac{4!}{4} = 3! = 6$ formas distintas de sentarse cuatro personas alrededor de una mesa.

Un caso particular de permutaciones son las *permutaciones circulares*. Las permutaciones circulares se aplican a conjuntos que se ordenan de forma circular, donde no hay primer ni último elemento por encontrarse todos en una circunferencia o en una línea cerrada en general. De este modo, si colocamos m objetos alrededor de una circunferencia se obtiene una permutación circular. Dos permutaciones circulares son iguales si cualquiera de ellas se obtiene a partir de la otra mediante un giro. Las permutaciones circulares de m elementos las denotaremos mediante PC_m.

El razonamiento efectuado en el caso de los elementos a, b, c, d se puede generalizar para cualquier número m, resultando que

$$PC_m = \frac{m!}{m} = (m-1)!.$$

2.3. Permutaciones con repetición

Sean $a_1, \ldots, a_m$ objetos distintos. Podemos formar $m!$ permutaciones. Sea $a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_m}$ una permutación. Nos fijamos en esta permutación en los elementos $a_{i_1} \ldots a_{i_k}$, siendo $k < m$, y los permutamos de todos los modos posibles sin alterar la colocación de $a_{i_{k+1}} \ldots a_{i_m}$ y obtenemos $k!$ permutaciones distintas.

Si los objetos $a_{i_1} \ldots a_{i_k}$ son iguales; es decir, se trata de un mismo elemento que se repite k veces, entonces estas $k!$ permutaciones son en realidad la misma. Tendremos entonces que *el número de permutaciones distintas que se pueden formar con m objetos entre los que hay k iguales es* $\frac{m!}{k!}$.

Si entre las $\frac{m!}{k!}$ hay r elementos iguales, entonces el número total de permutaciones distintas será $\frac{m!}{k!r!}$.

En general, si hay m objetos, de los que k son iguales entre sí, r iguales entre sí, etc., hasta llegar a λ iguales entre sí, de modo que $k + r + \ldots + \lambda = m$, entonces el número de permutaciones distintas, que denotaremos mediante $P_m^{k,r,\ldots,\lambda}$, será

$$PR_m^{k,r,\ldots,\lambda} = \frac{m!}{k!r!\cdots\lambda!}$$

que se denominan permutaciones con repetición.