Ejemplo. En una pequeña oficina hay un escáner alquilado para uso de los empleados. Aunque los trabajos a realizar varían en longitud, el tiempo de servicio puede aproximarse a una distribución exponencial con tasa media de 10 trabajos/hora.

En las 8 horas de trabajo diario, las peticiones de uso del escáner llegan aleatoriamente con una tasa media de 5 trabajos/hora. El tiempo del personal se valora en 5 euros por hora.

Las quejas recibidas por los empleados sugieren buscar mejoras del sistema actual:

- Una posibilidad es alquilar un escáner como el actual, a un coste de 11 euros diarios.

- Otra posibilidad es quedarse sólo con un escáner más rápido, atendiendo 15 trabajos/hora, con un coste de alquiler de 20 euros diarios.

El coste medio total al día ($C_T$) es el coste de alquiler ($C_A$) más el coste medio por el tiempo perdido por los empleados ($C_E$). Estudiar la opción más aconsejable.

La situación actual corresponde a un modelo *M/M/1* con λ=5, μ=10 trabajos/hora, de donde $\rho$ = 0.5. Como

$$\begin{aligned} C_E &= (\text{número horas diarias perdidas}) \times (5 \text{ euros/hora}) \\ &= (8 \text{ horas/día}) \times (5 \text{ trabajos/hora}) \times (W \text{ horas/trabajo}) \times (5 \text{ euros/hora}) \end{aligned}$$

Como

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\lambda} = \frac{1}{5} = 0.2$$

entonces $C_E$ es 40 euros/día, y $\boldsymbol{C_T}$ **= 40 + 11= 51 euros/día**.

La posibilidad del escáner rápido cambia el modelo anterior, al tener ahora μ = 15 trabajos/hora, de donde $\rho$ = 1/3 y $W$ = 0.1 horas/trabajo, dando lugar a $C_E$ = 20. Como $C_A$ = 20, $\boldsymbol{C_{T1}}$ **= 20 + 20 = 40 euros/día**.

Si decidimos utilizar dos escáners como el actual, el modelo es *M/M/2*, de donde $\rho$= λ/(cμ) = 5/(2×10)=0.25 y

$$W = \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{C(c,r)}{c(1-\rho)}\right) = \frac{1}{10}\left(1 + \frac{C(2,5/10)}{2(1-0.25)}\right) = 0.106$$

Así,

$$C_E = (40 \text{ trabajos/día}) \times (0.106 \text{ horas/trabajo}) \times (5 \text{ euros/hora}) = 21.2 \text{ euros}$$

y $\boldsymbol{C_{T2}}$ **= 21. 2 + 2 × 11 = 43.2 euros/día**.

Alquilar dos escáners pero ubicándolos en diferentes lugares de la oficina de forma que la mitad de los trabajos llegaran a cada escáner. Es decir, se tendrían dos modelos *M/M/1*, cada uno con $\lambda = 2.5$, $\mu = 10$ trabajos/hora y $\rho = 2.5/10 = 0.25$.

El tiempo medio en cada sistema sería $W = 0.1/0.75 = 0.133$ horas/trabajo. Luego, $\boldsymbol{C_{T3}}$ **= 2(13.33 + 11) = 48.66 euros/día**.

Por tanto, debemos elegir alquilar el escáner rápido, que conlleva menores costes y menor tiempo perdido en el sistema.

Ejemplo. Una compañía telefónica quiere diseñar un servicio de información de números de teléfono. Desea determinar cuántos operadores contratar para satisfacer los siguientes criterios de diseño:

1. El tiempo medio esperando ser atendido no debe sobrepasar 2 minutos;

2. El 90% de las llamadas deben esperar menos de 2 minutos a que comience el servicio.

El tiempo que utilizan los operadores en atender las llamadas sigue un modelo exponencial con un tiempo medio de 4 minutos.

Se espera que las llamadas lleguen aleatoriamente con una media de 40 llamadas por hora. Las llamadas que se producen cuando todos los operadores están ocupados quedan a la espera hasta que uno queda libre.

En este sistema *M/M/c*, las tasas son λ = 40 llamadas/hora = 2/3 llamadas/minuto, μ=0.25 llamadas/minuto, con intensidad de tráfico *r* = 8/3.

Para que exista solución de equilibrio, debe ser λ / *cμ* <1, es decir, *c* ≥ 3 operado-res.

Los criterios de diseño establecen que $W_q \leq 2$ minutos y $P(q \leq 2 \text{ minutos}) \geq 0.9$.

Para tres operadores (*c*=3), sabiendo que *C* (3, 8/3) = 0.8205, obtenemos los siguientes valores:

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{4/6}{3 \times 0.25} = 0.888$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{C(c,r)}{c\mu(1-\rho)} = \frac{0.8205}{3 \times 0.25 \times (1 - 0.888)} = 9.846$$

$$\begin{aligned} P(q \leq 2) &= 1 - C(c,r)e^{-(1-\rho)c\mu t} = \\ &= 1 - 0.8205 \times e^{-(1-0.888)\times 3 \times 0.25 \times 2} = \\ &= 0.3054 \end{aligned}$$

En la tabla siguiente mostramos los resultados para varios valores de $c$. La columna de $W_q$ está expresada en minutos.

| $c$ | $C(c,r)$ | $\pi_0$ | $W_q$ | $P(q \leq 2\ )$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 0.8205 | 0.0288 | 9.846 | 0.3054 |
| 4 | 0.4025 | 0.0637 | 1.207 | 0.7933 |
| 5 | 0.1733 | 0.0719 | 0.297 | 0.9460 |
| 6 | 0.0665 | 0.0740 | 0.080 | 0.9874 |

Conforme aumentamos el número de operadores, disminuye la probabilidad $C(c,r)$ de encontrar todos los operadores ocupados y aumenta la probabilidad $\pi_0$ de que el sistema esté vacío.

Con 4 operadores se satisface el primer criterio, pero para satisfacer además el segundo hacen falta 5 operadores. En ese caso, el factor de utilización es $\rho = r/5 = 0.533$, que indica que en media cada operador permanece ocioso casi la mitad del tiempo.

Ése es el precio de un buen servicio que satisface las condiciones de diseño.