Ejemplo. Un servidor de Internet tiene una velocidad de transmisión de 1600 caracteres por segundo para atender las peticiones que le llegan, que lo hacen según un proceso de Poisson con una velocidad media de 300 peticiones por minuto.
La longitud de cada petición puede aproximarse a una distribución exponencial de media 280 caracteres por petición.

Calcular las principales medidas estadísticas de eficiencia del sistema suponiendo que:

a) Se dispone de un número ilimitado de buffers; y

b) El número de buffers es 14. ¿Son suficientes 14 buffers para que la probabilidad de que el sistema esté completo no supere el 1%? En caso negativo, encontrar el número de buffers necesarios.

En a) el modelo es *M/M/1* con λ=300 peticiones/minuto, es decir, 5 peticiones/segundo y μ=(1600 caracteres/segundo)/(280 caracteres/petición)=5.714 peticiones/segundo.
Luego, $\rho$ = 5/5.714 = 0.875.

En b) se propone un sistema *M/M/1/15*, pues se permiten 14 peticiones encoladas en los buffers más la petición siendo transmitida.

$$\rho = 1 - \pi_0 = 1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^0 \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}} = 1 - \frac{1 - \frac{5}{5.714}}{1 - \left(\frac{5}{5.714}\right)^{16}} = 0.858$$

El número medio de clientes en el sistema y en la cola son:

$$\begin{aligned} L &= \frac{u}{1-u} - \frac{(K+1)u^{K+1}}{1-u^{K+1}} = \frac{\frac{5}{5.714}}{1 - \frac{5}{5.714}} - \frac{16\left(\frac{5}{5.714}\right)^{16}}{1 - \left(\frac{5}{5.714}\right)^{16}} = 4.86 \text{ peticiones} \\ L_q &= L - L_s = L - (1 - \pi_0) = L - \rho = 4.86 - 0.858 = 4.002 \text{ peticiones} \end{aligned}$$

Los tiempos medios en el sistema y en la cola son:

$$W = L/\lambda_e = \frac{L}{\lambda(1-\pi_K)} = \frac{4.86}{5(1-0.1917)} = 0.991 \text{ segundos}$$
$$W_q = L_q/\lambda_e = \frac{L_q}{\lambda(1-\pi_K)} = \frac{4.002}{5(1-0.01927)} = 0.816 \text{ segundos}$$

siendo

$$\pi_K = \pi_{15} = \left(\frac{5}{5.714}\right)^{15} \frac{1-\frac{5}{5.714}}{1-\left(\frac{5}{5.714}\right)^{16}} = 0.01917$$

La siguiente tabla recoge compara los resultados obtenidos en el sistema *M/M/1/15* con el sistema *M/M/1*:

| | $M/M/1$ | $M/M/1/15$ |
|---|---|---|
| $\lambda_e$ | 5 peticiones/segundo | 4.904 peticiones/segundo |
| $\pi_0$ | 0.125 | 0.142 |
| $\rho$ | 0.875 | 0.858 |
| $L$ | 7 peticiones | 4.86 peticiones |
| $L_q$ | 6.125 peticiones | 4.002 peticiones |
| $W$ | 1.4 segundos | 0.991 segundos |
| $W_q$ | 1.225 segundos | 0.816 segundos |

Se observa una mayor eficiencia del modelo *M/M/1/15*, pero a costa de rechazar un $100\pi_{15} = 1.91\%$ de las peticiones, que deberán intentarlo más tarde o simplemente se perderán, con las consecuentes pérdidas asociadas.

Hemos visto que con 14 buffers la probabilidad de que el sistema esté lleno es algo mayor que 0.01, pues es $\pi_{15} = 0.0191$. Se puede comprobar que hacen falta 19 buffers, ya que $\pi_{20} = 0.0092$ y $\pi_{19} = 0.0106$.

Ejemplo. Un mecánico tiene un taller en el que sólo caben 4 coches. Los coches llegan según un proceso de Poisson de tasa 3 coches por día.

El mecánico tarda en arreglar un coche un tiempo distribuido exponencialmente de media 2 días, si hay 2 o menos coches en total.

Cuando hay 3 ó 4 coches, llama a un familiar para que le ayude (ambos arreglan juntos los coches), reduciendo el tiempo medio a 1 día.

Encontrar la proporción de tiempo que ambos están ocupados y la proporción de tiempo que trabaja el mecánico.

En este sistema hay 5 estados: $N$ =0,1,2,3,4 coches en el taller, pues la capacidad es 4.
La tasa de nacimiento es $\lambda_n=\lambda=3$ coches diarios, $n$ = 0,1,2,3. Sin embargo, la tasa de muerte depende del número de coches en el taller: $\mu_1= \mu_2= 0.5$, $\mu_3= \mu_4= 1$ coches diarios.

Éste es un ejemplo en el que el *servicio es dependiente del estado*. Las ecuaciones de equilibrio son entonces

$$\begin{aligned} 0.5\pi_1 &= 3\pi_0 \\ 3.5\pi_1 &= 0.5\pi_2 + 3\pi_0 \\ 3.5\pi_2 &= 3\pi_1 + \pi_3 \\ 4\pi_3 &= 3\pi_2 + \pi_4 \\ 3\pi_3 &= \pi_4 \\ 1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 \end{aligned}$$

cuya solución es: $\pi_0$=1/475, $\pi_1$=6/475, $\pi_2$=36/475, $\pi_3$=108/475, $\pi_4$=324/475.

Así, la probabilidad de que ambos estén ocupados es la probabilidad de que trabaje el familiar, que es $\pi_3 + \pi_4 \simeq 0.9095$. Sin embargo, el mecánico trabaja $1 - \pi_0 \simeq 0.9979$ del tiempo.

$\pi_0$=0.0021 será la proporción de tiempo en que los dos trabajadores están ociosos.

Obsérvese lo alta que es la probabilidad de rechazar los coches que llegan, $\pi_4$.