Ejemplo. Se quiere planificar la instalación de una nueva factoría con varias máquinas iguales y un mecánico para su mantenimiento.

El tiempo operativo de cada máquina sigue una distribución exponencial con media 4 horas. El tiempo que tarda el operario en un servicio de mantenimiento es también exponencial con media 15 minutos.

Para que la factoría alcance la tasa de producción deseada, cualquier máquina debe estar operativa en promedio un 93% del tiempo.

¿Cuál es el número máximo de máquinas que hay que instalar en la factoría?

Supongamos que cuando no está funcionando una máquina, el tiempo perdido cuesta 6 euros/hora y el tiempo de servicio del operario cuesta 80 euros/día, al tratarse de un servicio muy especializado.

Si la jornada laboral es de 8 horas diarias, calcular cuántas máquinas habría que instalar para minimizar el coste esperado del tiempo perdido por día, incluyendo el tiempo que se le abona al operario cuando está desocupado.

El modelo es *M/M/1/K/K*.
El tiempo entre fallos *O* tiene una media $E(O)$=4 horas, luego λ=0.25 máquinas/hora. El tiempo medio de mantenimiento es $E(s)$=0.25 horas, o μ=4 máquinas/hora.

En el primer caso, *K* debe ser el máximo valor que satisfaga

$$P\text{ (máquina } n \text{ esté operativa)} \geq 0.93$$

P(máquina *n* operativa) = 1 - *P*(máquina *n* estropeada)

$$= 1 - \frac{W}{W + E(O)} = 1 - L/K$$

$$= 1 - (K - \lambda_e/\lambda)/K = \lambda_e/(\lambda K)$$

Para *K* = 1 tenemos ($z = \lambda/\mu$ =16)

$$\begin{aligned} \rho &= 1 - \pi_0 = 1 - B(1,16) = 0.0588 \\ \lambda_e &= \mu\rho = 4 \times 0.0588 = 0.2353 \\ P\text{ (máquina } n \text{ esté operativa)} &= \frac{\lambda_e}{\lambda K} = \frac{0.2353}{0.25 \times 1} = 0.9412 \end{aligned}$$

En la tabla siguiente mostramos los resultados para varios valores de *K*.

K	ρ	λ_e	$\lambda_e/(\lambda K)$
1	0.0588	0.2353	0.9412
2	0.1172	0.469	0.9379
3	0.1752	0.7008	0.9344
4	0.2326	0.9204	0.9304
5	0.2894	1.1575	0.926
6	0.3454	1.3817	0.9211

La probabilidad de interés disminuye a medida que aumentamos el número *K* de máquinas. El tiempo que una máquina ha de esperar a que las demás sean reparadas es tiempo no operativo. Con más máquinas, el operario está más ocupado y más máquinas requieren de su servicio, es decir, aumentan ρ y λ_e.

Los datos indican que deberían instalarse a lo sumo 4 máquinas. Con 4 máquinas, el número esperado de máquinas operativas es

$$K - L = K - (K - \lambda_e/\lambda) = \lambda_e/\lambda = 0.9204/0.25 = 3.6816.$$

Calculemos ahora el coste esperado total C_T del tiempo perdido por día.

$C_{maq} = 6 \times 8 \times L$ es el coste esperado del tiempo perdido por tener inactivas las máquinas en la jornada laboral de 8 horas.

$C_{op} = 80\,(1 - \rho) = 80(1 - B(K,16))$ es el coste esperado diario por tener ocioso al operario.

La suma de ambos costes es el coste total.

Para K=1 tenemos

$$L = K - \frac{\lambda_e}{\lambda} = 1 - \frac{0.2353}{0.25} = 0.059$$

$$\begin{aligned} C_{maq} &= 6 \times 8 \times 0.059 = 2.824 \\ C_{op} &= 80(1 - 0.0588) = 75.29 \\ C_T &= 2.824 + 75.29 = 78.114 \end{aligned}$$

En la tabla siguiente mostramos los resultados para varios valores de *K*.

K	L	C_{maq}	C_{op}	C_T
1	0.059	2.824	75.29	78.114
2	0.124	5.958	70.621	76.579
3	0.197	9.453	65.985	75.438
4	0.278	13.364	61.392	74.756
5	0.37	17.757	56.85	74.607
6	0.473	22.714	52.366	75.08

Deducimos que el mínimo coste se alcanza con $K = 5$ máquinas.

Con $K > 5$, el coste total siempre se incrementa.

Sin embargo, con 5 máquinas no se satisface el primer criterio de diseño. Para poder equilibrar ambos criterios podría pensarse en una función biobjetivo