Departamento de Automática

Universidad de Alcalá

Ingeniería de Control I
Tema 2
Transformadas

1. Transformadas.

- Transformación de dominios:
  1. Objetivo de la transformación de dominios
  2. Representación de señales
  3. Series de Fourier
  4. Transformada de Fourier
  5. Transformada de Laplace

Bibliografía

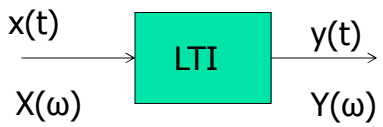
- Señales y Sistemas. OCW-UC3M
- Señales y Sistemas. A.V. Oppenheim.
- Apuntes Automática Básica. J. M. Bañón, UAH.
- Ingeniería de Control Moderna. K. Ogata.
- Apuntes SyS. X.Giró. EUETIT-UPC
- Automática. OCW-UPV
- Contemporary communication systems with MATLAB. J. Proakis.

Objetivos

- Revisión de las herramientas matemáticas empleadas para la función de transferencia
- Revisión del concepto de transformada y su interpretación física
- Estudiar la TF y sus limitaciones
- Estudiar la TL y sus propiedades

¿Por qué?

- Supongamos un sistema LTI

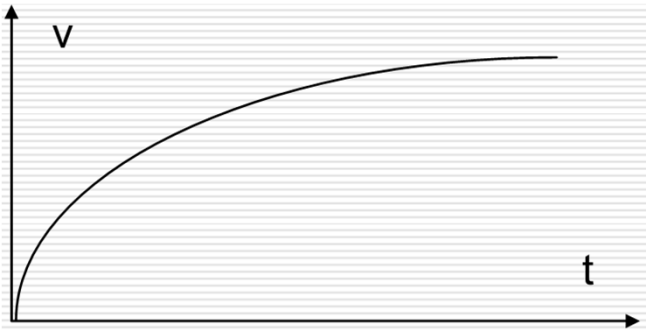


- Por las propiedades de la δ podemos expresar:
  - $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$
- Si la salida del sistema para $\delta(\tau)$ es $h(\tau)$, como es invariante, la salida para $\delta(t-\tau)$ es $h(t-\tau)$.
- Y como es lineal:
  - $Salida[x(t)] = y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Salida[x(\tau)\delta(t-\tau)]d\tau$

- $Salida[x(\tau)\delta(t-\tau)] = x(\tau) \cdot Salida[\delta(t-\tau)] = x(\tau)h(t-\tau)$
- Sustituyendo:
  - $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$
- Se define CONVOLUCIÓN: $y(t) = x(t) * h(t)$
- Pero si transformamos al dominio de Fourier, resulta por la propiedad de la convolución:
  - $Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$
- Es decir, si LTI y conozco la TF[$h(t)$]=$H(\omega)$, la $Y(\omega)$se obtiene MUY fácilmente.

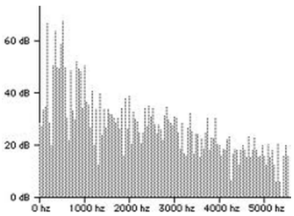
Formas de representar señales

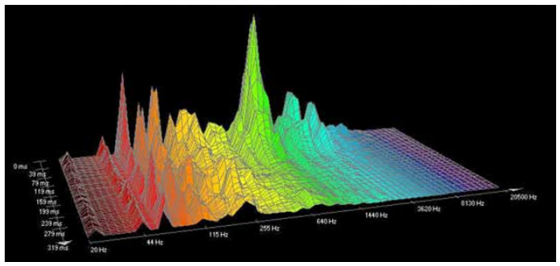
- Como función del tiempo
- Es la más intuitiva
- Ej: velocidad de un coche



Formas de representar señales

- En el dominio de la frecuencia
  - Módulo y fase
- Por ejemplo sonido
- O en ambos dominios
  - Espectrograma

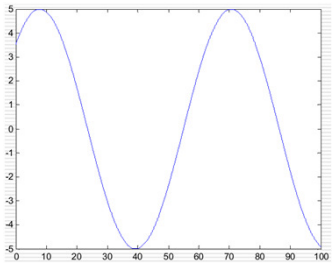


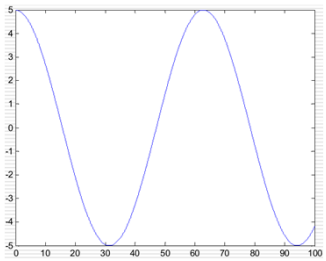


Módulo y fase

- Dada una componente sinusoidal significado de módulo y fase.
- Adelanto-retardo: http://www.iessierradeguara.com/documentos/departamentos/tecnologia/electrotecnia/ARCHIVOS/TEORIA/elec_ondas_senoidales_cal.pdf

$$y(t) = 5 \cdot \sin(0.1t + \frac{\pi}{4}) \qquad y(t) = 5 \cdot \sin(0.1t + \frac{\pi}{2})$$





Formas de representar señales

- Al t/f se le denomina v.i.
- Es posible pasar de una representación a otra
- Dependiendo de la información que se pretende obtener o del proceso a desarrollar es mejor una u otra.

Transformación

- Procedimiento utilizado para resolver problemas complejos de una manera más simple.
- Ej. Logaritmos $\log(a \cdot b) = \log a + \log b$
- Permite pasar de un dominio de representación a otro.
- No siempre tiene un sentido físico, pueden ser meras representaciones matemáticas.
- Para señales continuas:
  - $F(s) = \int_a^b K(t,s) f(t) dt$
  - $K(t,s) = e^{-st}$

Series de Fourier

- Sirven para señales periódicas de periodo T.
- Definición:
  - $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$ (1ª forma)
  - $c_k = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$
  - $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
- Es una transformación <u>discreta</u> que solo toma valores para frecuencias múltiplo de la frecuencia de la señal $f(t)$, es decir $k\omega_0$
- En general los coeficientes c_k son complejos

- Existen condiciones de convergencia:
  - La señal debe ser de energía finita en un período
  - $\int_T |f(t)|^2 dt < \infty$
  - Con esta condición no se garantiza que la señal $f(t)$ y su DSF sean iguales para todo t, sino que no hay energía en su diferencia:
    - $\lim_{N\to\infty} \int_T \left|(f(t) - \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{-jk\omega_0 t})\right|^2 \mathrm{dt} = 0$
  - Existen un conjunto de condiciones equivalentes (Dirichlet):
    - $\int_T |f(t)|\, dt < \infty$, número finito de máximos, mínimos y discontinuidades en T.

- Aplicando la relación de Euler: $e^{j\theta} = cos\theta + jsin\theta$
- Sustituyendo ambos en el DSF:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| \cos(k\omega_0 t + \arg(c_k)) + j \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| \sin(k\omega_o t + \arg(c_k))$$

- Si la señal $f(t)$ es real entonces $c_{-k} = c_k{}^*$ (simetría Hermítica) y se anulan las partes imaginarias correspondientes a $k\omega_0$ y $-k\omega_0$, resultando:

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|c_k| \cos(k\omega_0 t + \arg(c_k)) \qquad \text{(2ª forma)}$$

- Y desarrollando el coseno:

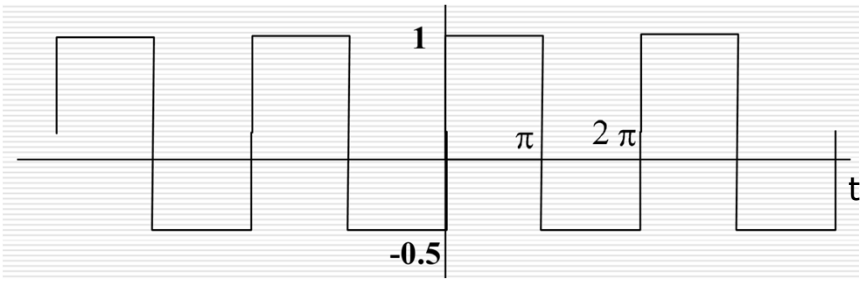
$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|c_k| [\cos(k\omega_0 t)\cos(\arg(c_k)) - \sin(k\omega_0 t)\sin(\arg(c_k)] =$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t) \qquad \text{(3ª forma)}$$

- Donde hemos definido (para $k \geq 1$):
  - $a_k = 2Re[c_k] = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos(k\omega_0 t)\,dt$ $\qquad$ $\mathrm{k} \geq 1$
  - $b_k = -2Im[c_k] = \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin(k\omega_0 t)\,dt$
- Si ampliamos consideración a a_0 y b_0:
  - $b_0$es siempre 0 y a_0 sería c_0 (ojo en DSF usar c_0)
- Además podemos considerar (para $k \geq 1$):
  - $c_k = \frac{a_k - jb_k}{2}$
  - $c_{-k} = \frac{a_k + jb_k}{2}$
- Si $f(t)$ es real y par: solo a_k
- Si $f(t)$ es real e impar: solo b_k

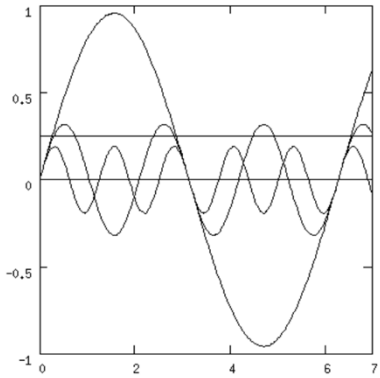
DSF

- Ej: Calcular DSF

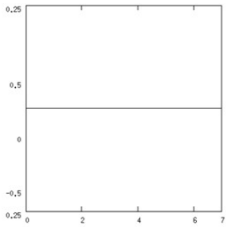


DSF

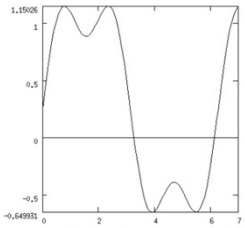
$$f(t)=\frac{1}{4}+\frac{3}{\pi}(sent+\frac{sen3t}{3}+\frac{sen5t}{5}+\frac{sen7t}{7}+\frac{sen9t}{9}+...)$$



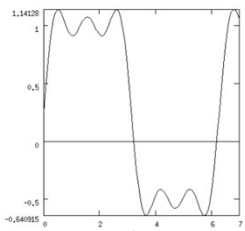
DSF



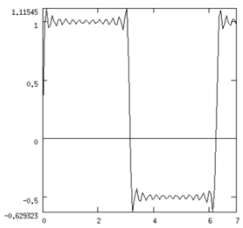
$$f(t)=\frac{1}{4}$$



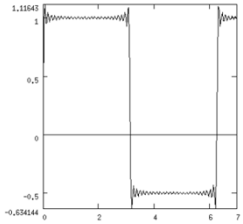
$$f(t)=\frac{1}{4}+\frac{3}{\pi}\left(sent+\frac{sen3t}{3}\right)$$



$$f(t)=\frac{1}{4}+\frac{3}{\pi}\left(sent+...+\frac{sen5t}{5}\right)$$



$$f(t)=\frac{1}{4}+\frac{3}{\pi}\left(sent+...+\frac{sen25t}{15}\right)$$



$$f(t)=\frac{1}{4}+\frac{3}{\pi}\left(sent+...+\frac{sen31t}{31}\right)$$

TABLE 3.1 PROPERTIES OF CONTINUOUS-TIME FOURIER SERIES

Property	Section	Periodic Signal	Fourier Series Coefficients
		$x(t)$, $y(t)$ Periodic with period T and fundamental frequency $\omega_0 = 2\pi/T$	a_k, b_k
Linearity	3.5.1	$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
Time Shifting	3.5.2	$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk(2\pi/T)t_0}$
Frequency Shifting		$e^{jM\omega_0 t} = e^{jM(2\pi/T)t} x(t)$	a_{k-M}
Conjugation	3.5.6	$x^*(t)$	a^*_{-k}
Time Reversal	3.5.3	$x(-t)$	a_{-k}
Time Scaling	3.5.4	$x(\alpha t)$, $\alpha > 0$ (periodic with period T/α)	a_k
Periodic Convolution		$\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$Ta_k b_k$
Multiplication	3.5.5	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$
Differentiation		$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 a_k = jk\frac{2\pi}{T}a_k$
Integration		$\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt$ (finite valued and periodic only if $a_0 = 0$)	$\left(\frac{1}{jk\omega_0}\right)a_k = \left(\frac{1}{jk(2\pi/T)}\right)a_k$
Conjugate Symmetry for Real Signals	3.5.6	$x(t)$ real	$\begin{cases} a_k = a^*_{-k} \\ \Re e\{a_k\} = \Re e\{a_{-k}\} \\ \Im m\{a_k\} = -\Im m\{a_{-k}\} \\ \lvert a_k\rvert = \lvert a_{-k}\rvert \\ \sphericalangle a_k = -\sphericalangle a_{-k} \end{cases}$
Real and Even Signals	3.5.6	$x(t)$ real and even	a_k real and even
Real and Odd Signals	3.5.6	$x(t)$ real and odd	a_k purely imaginary and odd
Even-Odd Decomposition of Real Signals		$\begin{cases} x_e(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\} & [x(t) \text{ real}] \\ x_o(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\} & [x(t) \text{ real}] \end{cases}$	$\Re e\{a_k\}$, $j\Im m\{a_k\}$

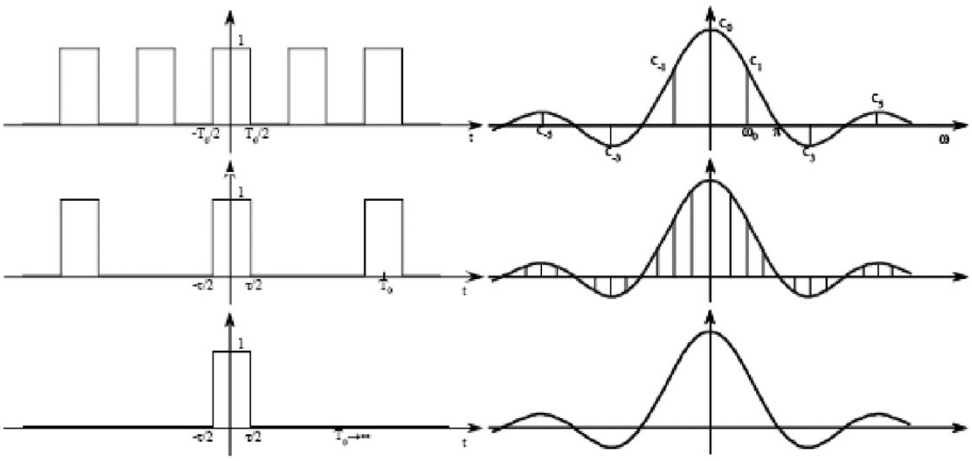
Parseval's Relation for Periodic Signals

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

Fuente: S&S.A.V.Opp.

Transformada de Fourier

- Relación con DSF



TF

- Definición:
  - $F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\, dt$ (en general compleja)
  - $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$
- Condición de convergencia (análogo al DSF):
  - $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt < \infty$
- O equivalentemente (Dirichlet):
  - $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$, número finito de máximos, mínimos y discontinuidades en cualquier intervalo finito.
- TF de señales periódicas o escalón? SI si se admiten funciones impulsivas ($\delta(\omega)$)

TF (comprobar)

- Si $f(t)$es real entonces $F(-\omega) = F^*(\omega)$:
  - Es decir, $Re[F(\omega)]$es par y $Im[F(\omega)]$ es impar
  - Es decir, $|F(\omega)|$ es par y $\arg(F(\omega))$ es impar
- Si $f(t)$ es real y par entonces $F(\omega)$ es tb real y par
- Si $f(t)$ es real e impar entonces $F(\omega)$ es pura imaginaria e impar
- Cualquier señal se puede expresar como suma de una señal par y una impar.
  - $x_p(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2}$; $x_i(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2}$
  - Entonces $TF\{x(t)\} = X(\omega); TF\{Ev[x(t)]\} = Re\{X(\omega)\}$;
  - $TF\{Odd[x(t)]\} = jIm\{X(\omega)\}$

Ejemplo: TF de función escalón.

- $F\{u(t)\} = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
- Propiedades a utilizar:
  - TF es lineal ($TF(a(t) + b(t)) = TF(a(t)) + TF(b(t))$: $u(t) = u_i(t) + {}^1/_2$
  - TF de la derivada de una señal (prop. de TF)
    - $F\left\{\frac{du_i(t)}{dt}\right\} = \mathrm{j}\omega U_i(\omega)$
  - Por otro lado, cálculo de la TF de señal $\delta(t)$
    - $F\left\{\frac{du_i(t)}{dt}\right\} = F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = 1$
  - Por tanto:
    - $U_i(\omega) = \frac{1}{j\omega}$

- TF de señales periódicas (a partir de la TF del DSF)
- Partiendo de una señal δ en el dominio de ω
  - Si $V(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$=>
  - $v(t) = TIF\{V(\omega)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} V(\omega)e^{j\omega t}d\omega = e^{j\omega_0 t}$
- Dado un DSF: $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$
  - Entonces, $X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_0)$
  - Entonces para c_0 la TF es $c_0 2\pi\delta(\omega)$
- Por tanto, $F\{u(t)\} = F\left\{u_i(t) + \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$

- Comprobación con la TF de una integral
  - $F\left\{y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
- Comprobar incorrección usando fórmula directa (por qué?)

TABLE 4.1 PROPERTIES OF THE FOURIER TRANSFORM

Section	Property	Aperiodic signal	Fourier transform
		$x(t)$ $y(t)$	$X(j\omega)$ $Y(j\omega)$
4.3.1	Linearity	$ax(t) + by(t)$	$aX(j\omega) + bY(j\omega)$
4.3.2	Time Shifting	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$
4.3.6	Frequency Shifting	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(j(\omega - \omega_0))$
4.3.3	Conjugation	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
4.3.5	Time Reversal	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
4.3.5	Time and Frequency Scaling	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$
4.4	Convolution	$x(t) * y(t)$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
4.5	Multiplication	$x(t)y(t)$	$\frac{1}{2\pi}X(j\omega) * Y(j\omega)$
4.3.4	Differentiation in Time	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(j\omega)$
4.3.4	Integration	$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt$	$\frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$
4.3.6	Differentiation in Frequency	$tx(t)$	$j\frac{d}{d\omega}X(j\omega)$
4.3.3	Conjugate Symmetry for Real Signals	$x(t)$ real	$\begin{cases} X(j\omega) = X^*(-j\omega) \\ \mathcal{R}e\{X(j\omega)\} = \mathcal{R}e\{X(-j\omega)\} \\ \mathcal{I}m\{X(j\omega)\} = -\mathcal{I}m\{X(-j\omega)\} \\ \lvert X(j\omega)\rvert = \lvert X(-j\omega)\rvert \\ \sphericalangle X(j\omega) = -\sphericalangle X(-j\omega) \end{cases}$
4.3.3	Symmetry for Real and Even Signals	$x(t)$ real and even	$X(j\omega)$ real and even
4.3.3	Symmetry for Real and Odd Signals	$x(t)$ real and odd	$X(j\omega)$ purely imaginary and odd
4.3.3	Even-Odd Decomposition for Real Signals	$x_e(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\}$ $[x(t)$ real$]$ $x_o(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\}$ $[x(t)$ real$]$	$\mathcal{R}e\{X(j\omega)\}$ $j\mathcal{I}m\{X(j\omega)\}$
4.3.7	Parseval's Relation for Aperiodic Signals $\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert X(j\omega)\rvert^2 d\omega$		

Fuente: S&S.A.V.Opp.

TABLE 4.2 BASIC FOURIER TRANSFORM PAIRS

Signal	Fourier transform	Fourier series coefficients (if periodic)
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	a_k
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	$a_1 = 1$ $a_k = 0$, otherwise
$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$ $a_k = 0$, otherwise
$\sin\omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0$, otherwise
$x(t) = 1$	$2\pi\delta(\omega)$	$a_0 = 1, \quad a_k = 0, \ k \neq 0$ (this is the Fourier series representation for any choice of $T > 0$)
Periodic square wave $x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0, & T_1 < \lvert t\rvert \leq \frac{T}{2} \end{cases}$ and $x(t+T) = x(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$	$\frac{\omega_0 T_1}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right) = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi}$
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k = \frac{1}{T}$ for all k
$x(t) = \begin{cases} 1, & \lvert t\rvert < T_1 \\ 0, & \lvert t\rvert > T_1 \end{cases}$	$\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}$	—
$\frac{\sin Wt}{\pi t}$	$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < W \\ 0, & \lvert\omega\rvert > W \end{cases}$	—
$\delta(t)$	1	—
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$	—
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	—
$e^{-at}u(t), \Re e\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$	—
$te^{-at}u(t), \Re e\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	—
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}u(t)$, $\Re e\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$	—

Fuente: S&S.A.V.Opp.

Propiedad de la convolución de la TF

- Vimos al principio del tema:
  - $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$
- Calculando la TF:
  - $Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right]e^{-j\omega t}dt$
  - Intercambiando:
  - $Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j\omega t}dt\right]d\tau$
  - Usando prop. de desplazamiento en el t:
  - $Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}H(\omega)d\tau = H(\omega)X(\omega)$

Transformada de Laplace

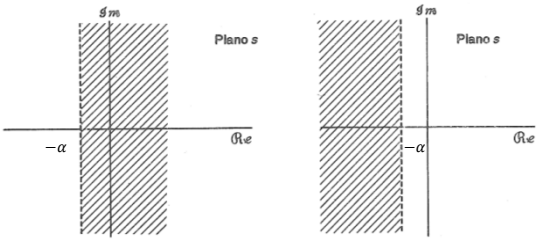
- Problemas de convergencia de TF
- Algunas de las funciones de control no cumplen condición de convergencia (escalón, rampa, parábola)
- Se introduce el término (exponencial real) $e^{-\sigma t}, \sigma \in \mathbb{R}$
- Se garantiza la convergencia de la integral (dependiendo del valor de σ):
  - $\hat{f}(t) = f(t)e^{-\sigma t}$
  - $\hat{F}(\sigma, \omega) = TF\{\hat{f}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt$

TL

- Considerando el dominio complejo $s = \sigma + j\omega$
  - $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt; F(s), s \in \mathbb{C}$
  - $f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds$
- Con la condición de convergencia $a < \sigma < b$
- TF es TL para $s = j\omega$

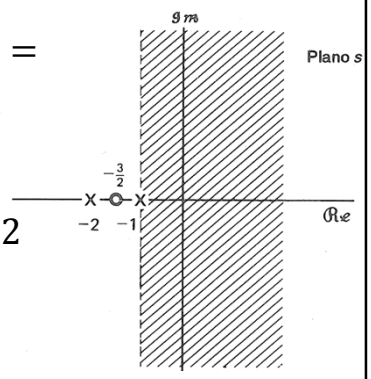
TL, ej.

- Dos funciones distintas pueden tener la misma TL pero con diferentes regiones de convergencia (ROC).
- $x_1(t) = e^{-\alpha t}u(t);\ X_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+\alpha)t}e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{s+\alpha}, \Re e\{s\} > -\alpha$
- $x_2(t) = -e^{-\alpha t}u(-t);\ X_2(s) = \int_{-\infty}^{0} -e^{-\alpha t}e^{-st}dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(\sigma+\alpha)t}e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{s+\alpha}, \Re e\{s\} < -\alpha$



Ej.

- $x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)$
- $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} = \frac{2s+3}{s^2+3s+2}$
- ROC primer término: $Re\{s\} > -1$
- ROC segundo término: $Re\{s\} > -2$
- ROC total?
- Ceros y polos



ROC

- Especificación completa de TL requiere expresión algebraica y ROC
- ROC son los valores de $s = \sigma + j\omega$ para los que la TF$[x(t)e^{-\sigma t}]$ converge
- La TL de x(t) converge en los lugares de la ROC, pero para que la TF de x(t) converja, el eje jω tiene que estar en la ROC.
- Reparar en ej. $x_1(t)$ y $x_2(t)$, TL su ROC existe si $\alpha \gtreqless 0$, pero la TF solo existe si $\alpha > 0$ en el primer caso y si $\alpha < 0$ en el segundo.

- Propiedades:
  - Son bandas del plano s paralelas a eje jω
    - Que la TF de $x(t)e^{-\sigma t}$converja, solo depende de σ
  - Para TL racionales la ROC no contiene ningún polo
    - Porque si no X(s) sería infinito
  - Si x(t) es de duración finita y hay algún valor de s para el que converge la X(s), entonces la ROC es todo el plano
    - Si $\int_{t_1}^{t_2} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$, entonces también lo será para cualquier $\sigma \gtreqless \sigma_0$

- Si x(t) está limitada por la izquierda (rigth-sided) y la línea σ_0 está en la ROC, entonces todos los valores de s cuya $Re\{s\} > \sigma_0$ están en la ROC.
  - Si $\int_{t_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$, entonces también lo será para cualquier $\sigma \geq \sigma_0$
- Si x(t) está limitada por la derecha (left-sided) y la línea σ_0 está en la ROC, entonces todos los valores de s cuya $Re\{s\} < \sigma_0$ están en la ROC.
- Si x(t) está ilimitada en t (double-sided) y la línea σ_0 está en la ROC, entonces la ROC consiste en una banda del plano s que incluye a la línea $Re\{s\} = \sigma_0$.

TIL

- Vista la interpretación de la TL como TF :
  - $X(s) = X(\sigma + j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$
- Donde $\sigma = a$ es una línea de ROC, entonces, la TIF:
  - $x(t)e^{-\sigma t} = \mathcal{F}^{-1}\{X(\sigma + j\omega\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega$
- Despejando:
  - $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$

TIL

- Haciendo cambio de variable de integración de $\sigma + j\omega = s$, siendo $\sigma = a$, queda $ds = jd\omega$ y:
  - $x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds$, en un contorno de integración en el plano complejo s que es una recta paralela al eje jω con un valor de σ para el que X(s) converge (es decir, está en su ROC)
- Normalmente se pasa de la expresión racional a combinaciones lineales de términos de menor orden y se calculará la TIL inmediata de cada uno y su ROC.(ver 4.7 y 4.8 D'azzo)
  - $X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{s+a_i}$, donde $A_i = \left[(s+a_i)\frac{N(s)}{D(s)}\right]_{s=-a_i}$

TIL

- Si F(s) es una función racional con polos complejos conjugados (si f(t) era real, siempre será así):
- $F(s) = \frac{as+b}{(s+c)^2+d^2} = \frac{a(s+c)}{(s+c)^2+d^2} + \frac{b-ac}{(s+c)^2+d^2}$
- Cuyas TIL directas se obtienen de las tablas:
- $\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{a(s+c)}{(s+c)^2+d^2}\right\} = \mathrm{a}e^{-ct}cosdt$
- $\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{b-ac}{(s+c)^2+d^2}\right\} = (\mathrm{b}-\mathrm{ac})\frac{1}{d}e^{-ct}sindt$

TIL ej.

- $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ $con\ Re\{s\} > -1;$

Propiedades (TL bilateral)

Propiedad	Señal	Transformada	ROC
	$x(t)$	$X(s)$	R
	$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
	$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
9.5.1	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
9.5.2	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	R
9.5.3	$e^{s_0t}x(t)$	$X(s - s_0)$	Versión desplazada de R [es decir, s está en la ROC si $(s - s_0)$ está en R]
9.5.4	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{s}{a}\right)$	ROC "escalada" [es decir, s está en la ROC si (s/a) está en la ROC de $X(s)$]
9.5.5	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
9.5.6	$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$	Al menos R
9.5.7	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R
9.5.8	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	Al menos $R \cap \{\mathcal{R}e\{s\} > 0\}$

Propiedades

- Teorema del valor inicial y final: suponiendo que $x(t) = 0$ para t<0 y que no contiene impulsos o funciones singulares de orden superior en el origen, entonces:
  - $x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)$
  - $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$

Tabla de TL

- Ojo 6

1	$\delta(t)$	1	All s
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathcal{Re}\{s\} > 0$
3	$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathcal{Re}\{s\} < 0$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathcal{Re}\{s\} > 0$
5	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\mathcal{Re}\{s\} < 0$
6	$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\mathcal{Re}\{s\} > \alpha$
7	$-e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\mathcal{Re}\{s\} < -\alpha$
8	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\mathcal{Re}\{s\} > -\alpha$
9	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\mathcal{Re}\{s\} < -\alpha$
10	$\delta(t-T)$	e^{-sT}	para toda s
11	$[\cos\omega_0 t]u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathcal{Re}\{s\} > 0$
12	$[\operatorname{sen}\omega_0 t]u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathcal{Re}\{s\} > 0$
13	$[e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t]u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\mathcal{Re}\{s\} > -\alpha$
14	$[e^{-\alpha t}\operatorname{sen}\omega_0 t]u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\mathcal{Re}\{s\} > -\alpha$

TL unilateral

- En general en control se trabaja con $f(t) = 0\ para\ t < 0$:
  - $F(s) = \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$
  - Converge para valores $\sigma > a$
  - No incluye a t=0 y no incorpora ningún impulso o función singular $u_n(t), n > 0$ en t=0 (Opp. 3.7)
  - Es la TL bilateral de una señal cuyos valores para $t < 0^+$ son 0.
  - Ej: ver TLb y TLu en
    - $x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$
    - $x(t) = e^{-a(t+1)}u(t+1)$

TLu

- En general TLb y TLu son iguales si x(t) es 0 para t<0 y no contiene impulsos ni funciones singulares.
- Las propiedades son iguales, excepto para derivadas e integrales.
- Derivada en t (integrando por partes):

$$\int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st}dt = x(t)e^{-st}\Big|_{0^+}^{\infty} - (-s)\int_{0^+}^{\infty} x(t)e^{-st}dt =$$
$$= sX_u(s) - x(0^+)$$

  - Para la segunda derivada:
    - $\mathcal{L}_u\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right] = s^2X_u(s) - sx(0^+) - x'(0^+)$
  - Si hay singularidades en 0, habría que distinguir entre la TLu en 0^+ o en 0^-

- Integración indefinida:
  - $\mathcal{L}_u\left[\int x(\tau)d\tau\right] = \frac{X_u(s)}{s} + \frac{1}{s}\left[\int x(\tau)d\tau\right]\Big|_{\tau=0}$
  - Se obtiene integrando por partes la Tlu
  - $\int_{0^+}^{\infty}\left[\int x(\tau)d\tau\right]e^{-st}dt = \left[\int x(\tau)d\tau\right]\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^{\infty} - \int_{0^+}^{\infty} x(t)\frac{e^{-st}}{-s}dt = \frac{1}{s}\left[\int x(\tau)d\tau\right]\Big|_{\tau=0} + \frac{X_u(s)}{s}$
  - Si hay singularidades en 0, habría que distinguir entre la TLu en 0^+ o en 0^-
- Para la integral definida:
  - $\mathcal{L}_u\left[\int_o^t x(\tau)d\tau\right] = \frac{X_u(s)}{s}$
  - Puesto que $\int_0^t x(\tau)d\tau = \left[\int x(\tau)d\tau\right]\Big|_{\tau=t} - \left[\int x(\tau)d\tau\right]\Big|_{\tau=0}$

Utilidad

- La propiedad de diferenciación en el t nos convierte las ED en polinomios en el dominio de s, con resolución algebraica.
- La integral de convolución en el t, se convierte en producto de señales en el dominio s.
- Una aplicación muy utilizada de la TLu es la solución de ED con coeficientes constantes y condiciones iniciales distintas de 0.

Ej

- $\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 5u(t); \dot{x}(0) = 2; x(0) = -1;$

$$[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + 3[sX(s) - x(0)] + 2X(s) = \frac{5}{s}$$

$$[s^2X(s) + s - 2] + 3[sX(s) + 1] + 2X(s) = \frac{5}{s}$$

$$(s^2 + 3s + 2)X(s) + (s+1) = \frac{5}{s}$$

$$X(s) = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s+1)(s+2)} = \frac{5/2}{s} - \frac{5}{s+1} + \frac{3/2}{s+2}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{5}{2} - 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}}$$