Tema 1. Fuerza y campo electrostáticos.

Problemas resueltos.

Problema 1.- Entre dos placas uniformemente cargadas, con densidades de signo contrario, existe un campo electrostático uniforme. Un electrón abandona, partiendo del reposo, la placa cargada negativamente y choca con la positiva, que dista $d = 2$ cm de la anterior, al cabo de $1,5 \times 10^{-8}$ s. Calcular:
(a) la intensidad del campo electrostático,
(b) la velocidad cuando llega a la segunda placa.
Dato: $e/m_e = 1,76 \times 10^{11}$ C/kg.

Solución:
La energía total del electrón debe conservarse. Esta energía es la suma de las energías cinética y potencial.,

$$E = U + E_c = \frac{1}{2} m_e v^2 + qV.$$

Entre las placas existe un campo de sentido contrario al movimiento del electrón, por lo que éste será acelerado por una fuerza $q\mathbf{E}$.

Llamamos V_1 y V_2 a los potenciales de las placas negativa y positiva, es decir: V_1 es la energía requerida para llevar una carga eléctrica unidad desde el infinito a un punto del campo eléctrico con el potencial de la placa 1 y V_2 desde el infinito a un punto del campo eléctrico con el potencial de la placa 2. La diferencia del potencial es la diferencia entre ambos valores de los potenciales eléctricos, y además es la variación de la energÃŋa potencial, por unidad de carga, que experimentará una carga testigo al desplazarse entre ambos puntos. Para un desplazamiento desde el punto 2 hasta el punto 1, el cambio de potencial es $V_2 - V_1$.

Cuando la carga $q = -e$ se desplaza desde el potencial V_1 al potencial V_2, la conservación de la energía se escribe

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = q(V_2 - V_1) = -e(V_2 - V_1) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{2} m v_2^2 = e(V_1 - V_2)$$

donde se ha utilizado el dato de que el electrón se desprende de la placa con potencial V_1 con velocidad cero, es decir, $v_1 = 0$.

(a) Para calcular la intensidad del campo tenemos en cuenta:

$$F = eE = m_e a \qquad \Longrightarrow \qquad a = \frac{e}{m_e} E$$

El electrón se mueve con movimiento uniformemente acelerado, por tanto

$$a = 2d/t^2 = 1,78 \times 10^{14} \text{ ms}^{-2}$$

La intensidad del campo será

$$E = a(m_e/e) = 1,01 \times 10^3 \text{ NC}^{-1}$$

(b) Para poder calcular la velocidad final mediante la expresión de la conservación de la energía, necesitamos conocer la diferencia de potencial entre las placas. Dado que el campo E es uniforme,

$$E = -\frac{dV}{dx} \qquad \Longrightarrow \qquad (V_1 - V_2) = Ed = 20,2 \text{ V}$$

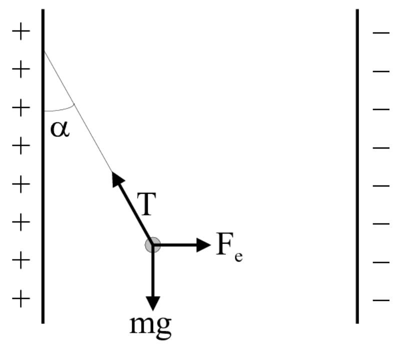
Esto nos permite calcular la velocidad y obtener $v = 26,67 \times 10^5$ ms^{-1}.

Problema 2.- El sistema de la figura está formado por un condensador de placas plano-paralelas, cargado con densidad superficial de carga σ, de una de cuyas placas cuelga una

esfera conductora con carga Q y masa m. En la posición de equilibrio el hilo del que cuelga la esfera forma un ángulo de 30^o con la vertical.
Calcular:
a) la tensión del hilo,
b) la densidad de carga en cada placa.

Datos: $m = 10^{-10}$ K; $Q = 10^{-15}$ C; $\epsilon_o = 8,85 \times 10^{-12}$ C^2/N m^2.

Solución:



En la posición de equilibrio existen tres fuerzas que actúan sobre la esfera: la tensión T del hilo, el peso mg de la esfera y la fuerza electrostática. Escribiendo la condición de equilibrio, a lo largo de la dirección del hilo, y despejando T, obtenemos:

$$T = F_e \operatorname{sen}\alpha + mg\cos\alpha = \frac{Q\sigma}{\epsilon_o}\operatorname{sen}\alpha + mg\cos\alpha$$

b) Por otro lado, la condición de equilibrio a lo largo de la dirección perpendicular al hilo nos da:

$$F_e \cos\alpha = mg \operatorname{sen}\alpha$$

de donde obtenemos:

$$\tan\alpha = \frac{Q\sigma}{mg\epsilon_o}$$

y, por lo tanto,

$$\sigma = \frac{mg\epsilon_o \tan\alpha}{Q} = 5,011 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2$$

Problema 3.- Dos placas metálicas paralelas de 100 cm^2 de área están separadas 2 cm. La carga de la placa de la izquierda es -2×10^{-9} C y la carga de la placa de la derecha es -4×10^{-9} C. Se pide:
a) Calcular el campo inmediatamente a la izquierda de la placa de la izquierda;
b) el campo entre las placas;
c) el campo inmediatamente a la derecha de la placa de la derecha;
d) la diferencia de potencial entre las placas.

Solución:

Supongamos que las placas están situadas en $x = 0$ y en $x = 2$ cm. Cuando el tamaño de las placas es mucho mayor que la distancia entre ellas, se sabe que cada una de ellas (considerada como un plano cargado uniformemente con densidad de carga σ) produce un campo eléctrico perpendicular al mismo de módulo $E = \sigma/(2\epsilon_0)$.

a) En el punto que se nos pide, a la izquierda de la placa izquierda, el sentido del campo creado por cada una de las placas es el mismo (y hacia la derecha, ambos dirigido hacia las x positivas), de manera que podemos sumar ambos campos:

$$\mathbf{E_1} = \left[\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0}\right]\hat{\mathbf{i}} = \left[\frac{q_1 + q_2}{2S\epsilon_0}\right]\hat{\mathbf{i}} = 3,39 \times 10^4\ \hat{\mathbf{i}} \text{ V/m}$$

b) En este caso el campo creado por la placa situada en $x = 2$ cm tiene la dirección de las x positivas, mientras que el campo creado por la placa situada en $x = 0$ tiene sentido contrario. Por tanto, al tener los dos campos sentidos opuestos,

$$\mathbf{E_2} = \left[\frac{q_2 - q_1}{2S\epsilon_0}\right]\hat{\mathbf{i}} = 1,13 \times 10^4\ \hat{\mathbf{i}} \text{ V/m}$$

c) En este caso el campo creado por ambas placas está dirigido hacia las x negativas, con idéntico sentido (pero opuesto al que se tenía en el apartado a). Por lo tanto

$$\mathbf{E_3} = \left[\frac{-(q_1+q_2)}{2S\epsilon_0}\right]\hat{\mathbf{i}} = -3,39\times 10^4\ \hat{\mathbf{i}}\ \mathrm{V/m}$$

d) Dado que el campo entre las placas es uniforme, podemos calcular de manera directa la diferencia de potencial entre ellas:

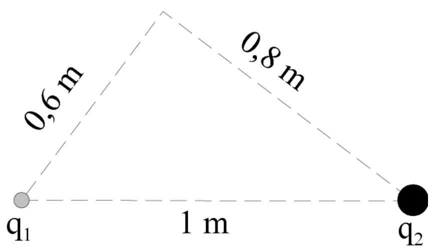
$$V_2 - V_1 = E_2 d = 226\ \mathrm{V}$$

Sugerencia: repase el Ejemplo 22.8 del libro de Tipler y Mosca (sección 22.1 de la 6ª edición).

Problema 4.- Dos cargas puntuales de $5\ \mu$C y $-10\ \mu$C, se encuentran situadas en un plano vertical y separadas una distancia de 1 m. Se pide:
a) Calcular el valor del campo eléctrico y su dirección en un punto del plano situado a $0,6$ m de la primera carga y a $0,8$ m de la segunda y por encima de ambas.
b) Calcular los puntos en los cuales el campo eléctrico es nulo.
c) Encontrar las coordenadas del punto situado en la línea que une las cargas en el cual los campos creados por las dos cargas son idénticos en módulo, dirección y sentido.

Solución:

a) Para resolver este primer apartado basta utilizar la expresión del campo eléctrico creado por una carga puntual. Las expresiones se simplifican mucho si se hace uso del hecho de que los puntos donde están situadas las cargas y el punto donde se pide calcular el campo forman un triángulo rectángulo. Si designamos con subíndice 1 a la carga de $5\ \mu$C y con subíndice 2 a la carga de $-10\ \mu$C, las expresiones resultantes para las componentes del campo eléctrico creado por cada una de las cargas son:



$$E_{x1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_1\cos\alpha}{R_1^2} = 7,5\times 10^4\ \mathrm{N/C}$$

$$E_{y1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_1\,\mathrm{sen}\,\alpha}{R_1^2} = 10^5\ \mathrm{N/C}$$

$$E_{x2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_2\cos\beta}{R_2^2} = 45/4\times 10^4\ \mathrm{N/C}$$

$$E_{y2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_2\,\mathrm{sen}\,\beta}{R_2^2} = -27/32\times 10^5\ \mathrm{N/C}$$

Aquí R_1 y R_2 indican las distancias respectivas de las cargas al punto donde se calcula el campo y α y β los ángulos formados con la horizontal por las rectas que unen a cada carga con el punto.

Utilizando el principio de superposición de campos, las componentes del campo total se calculan como la suma de las componentes de los campos creados por cada carga.

$$E_x = 75/4\times 10^4\ \mathrm{N/C}; \qquad E_y = 50/32\times 10^4\ \mathrm{N/C}$$

Teniendo ya las componentes totales del campo, el módulo del campo y el ángulo que forma el campo con la horizontal se calculan de la manera habitual:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 1,88\times 10^5\ \mathrm{N/C}; \qquad \tan\gamma = \frac{E_y}{E_x} = 1/12$$

b) Para que el campo se anule se tiene que cumplir que los campos creados por la dos cargas sean de igual módulo, igual dirección y sentido contrario.

La condición de que tengan la misma dirección tiene como consecuencia que el campo sólo se puede anular en puntos situados sobre la recta que une las dos cargas.

La condición de que los campos tengan igual módulo se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_1}{x^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q_2}{(x-1)^2}$$

donde x es la distancia del punto buscado a la carga q_1. Esta relación nos da una ecuación de segundo grado:

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

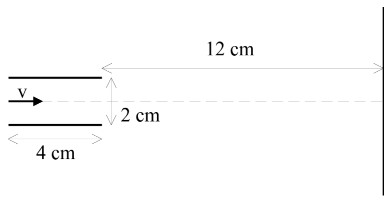
cuyas soluciones son $x_1 = -2,41$ m, y $x_2 = 0,41$ m. Para x_1 el punto está situado a la izquierda de q_1, luego los dos campos tendrán sentido contrario y se anularán (es, pues, la respuesta buscada).

Sin embargo, para x_2 el punto está situado entre las dos cargas y los campos tendrán el mismo sentido, con lo que la respuesta a la pregunta c) es $x_2 = 0,41m$.

Problema 5.- En la figura se representa a un electrón que se introduce entre las placas de un condensador plano en la dirección del eje horizontal y con una velocidad inicial (para $t = 0$) de $v_0 = 2\times10^7$ ms^{-1}. Entre las placas hay un campo eléctrico dirigido hacia arriba de intensidad 20,000 N/C.
a) Calcular la separación del electrón respecto al eje horizontal a la salida de las placas.
b) ¿Qué ángulo formará la velocidad del electrón con la horizontal a la salida de las placas?
c) ¿A qué distancia del eje horizontal alcanzará el electrón una pantalla colocada a 12 cm de la salida de las placas?

Solución:

a) El movimiento del electrón entre las placas puede considerarse como un movimiento de tiro parabólico, con la velocidad inicial indicada en el enunciado y una aceleración



$$\vec{a} = -\frac{eE}{m_e}\vec{j}.$$

Las ecuaciones de dicho movimiento serán, pues:

$$x = v_0 t; \quad y = -\frac{1}{2}at^2.$$

Resolviendo este sistema para $x = x_o$, donde x_o es la coordenada horizontal del extremo de salida de las placas, se tiene

$$t_0 = x_0/v_0; \quad y_0 = -\frac{1}{2}\frac{eE}{m_e}\frac{x_0^2}{v_0^2} = -0,7 \text{ cm}.$$

b) Las componentes de la velocidad cumplen las ecuaciones $v_x = v_0$; $v_y = at$. Por lo tanto,

$$\tan\alpha = \frac{at}{v_0} = \frac{eE}{m_e}\frac{x_0}{v_0^2} = 0,35$$

c) A partir de la salida de entre las placas, el movimiento del electrón es uniforme y por lo tanto:

$$x_p = v_0 t'; \qquad y_p = -y_0 + v_y t'$$

donde x_p es la distancia entre la salida de las placas y la pantalla. Resolviendo el sistema se tiene $t' = x_p/v_0$, y

$$y_p = -\frac{1}{2}\frac{eE}{m_e}\frac{x_0(x_0+x_p)}{v_0^2} = -2,8 \text{ cm}.$$