Tema 12: Contrastes Paramétricos

Presentación y Objetivos.

Se comienza este tema introduciendo la terminología y conceptos característicos de los contrastes de hipótesis, típicamente a través de un ejemplo sencillo procediendo posteriormente a su definición formal. Se distinguirán los tipos de hipótesis, las etapas en la formulación de un contraste, los tipos de errores a los que estamos sujetos, potencia, nivel de significación y el método del nivel crítico o p-valor. Estos dos últimos servirán para tomar la decisión final. Hay que hacer hincapié en que el rechazo de la hipótesis nula supone una fuerte evidencia de que ésta no está soportada por los datos. Sin embargo, su aceptación no supone que sea fuerte la evidencia a su favor, sino que la evidencia en su contra no ha sido determinante. Por ello, antes que aceptar la hipótesis a contrastar (hipótesis nula), se preferirá no rechazarla. Una vez introducidos en el lenguaje de los contrastes, se comienza con el estudio del catálogo, similar al de intervalos de confianza. Se comienza con el contraste para la media de una población normal que se puede ilustrar con un ejemplo. Un contraste permitirá decidir, entre otras cosas, si un determinado tratamiento o procedimiento ha tenido algún efecto o el efecto deseado. La relación entre intervalos de confianza y contrastes de hipótesis debe quedar ilustrada de forma clara y concisa ya que las variables pivote utilizadas en los primeros son análogas a los estadísticos de contraste utilizados en los segundos, facilitando de esta forma la comprensión y estudio de la materia.
Los objetivos de este tema son:

- Conocer la motivación del contraste paramétrico para simplificar un modelo.
- Manejar la terminología básica del contraste de hipótesis.
- Saber aplicar en diferentes casos un contraste de hipótesis clásico y entender su relación con los intervalos de confianza.

Esquema Inicial

1. Introducción.
2. Tipos de hipótesis.
3. Tipos de errrores.
4. Etapas de un contraste.
5. Región de rechazo.
6. Contraste para la media en poblaciones normales.
7. Contraste para la varianza en poblaciones normales.

8. Contraste para la comparación de medias en poblaciones normales.
9. Contraste para la comparación de varianzas en poblaciones normales.
10. Contrastes de hipótesis para proporciones.
11. Relación entre intervalo de confianza y contraste de hipótesis.

Desarrollo del Tema

1. Introducción

Una **hipótesis estadística** es una afirmación sobre alguna característica (parámetro o forma), desconocida de la población de interés. El hecho de probar esa hipótesis estadística es esencialmente decidir si la afirmación está apoyada por la evidencia muestral.
Contrastaremos una hipótesis comparando lo que debería pasar si la hipótesis es cierta con lo que realmente pasa (lo observado en la muestra). Si coinciden, dentro de un margen de error admisible, mantendremos la hipótesis. En caso contrario, la rechazaremos y buscaremos nuevas hipótesis que puedan explicar los datos observados.

Ejemplo:

1. El departamento de programación de una empresa lleva mucho tiempo construyendo un software muy complicado. Su director ha observado durante este tiempo que el tiempo de compilación y montaje de los distintos módulos sigue una distribución $N(5, 0.1)$. Le ofrecen una herramienta que aceleraría este tiempo, pero como es muy cara, antes de decidir comprarla o no, pide una versión de evaluación y recoge los tiempos de compilación de 6 módulos genéricos: 4.71, 4.82, 5.01, 4.75, 4.82 y 4.95. Con estos datos tiene que decidir si existe evidencia para suponer que la nueva herramienta altera el tiempo medio de compilación.

2. Tipos de Hipótesis

Llamamos hipótesis estadística a una suposición que determina parcial o totalmente la distribución de una o varias variables aleatorias. Puede:

- Especificar un valor concreto o un intervalo de valores para el o los parámetros en cuestión (contraste paramétrico).
- Determinar el tipo de distribución de probabilidades que ha generado los datos (contraste no paramétrico).
- Establecer la igualdad de las distribuciones de dos o más variables.

En un contraste distinguimos los dos tipos básicos de hipótesis:

1. Hipótesis nula H_0: Es la hipótesis que se contrasta, es decir, la que mantendremos y consideraremos como verdadera a no ser que los datos indiquen su falsedad.

2. Hipótesis alternativa H_1: Si rechazamos H_0 estamos aceptando implícitamente una hipótesis alternativa H_1 (que reflejará situaciones de interés si H_0 es falsa).

Además, si el contraste es paramétrico, las hipótesis pueden ser:

1. Hipótesis simple: Aquélla que especifica un único valor para el o los parámetros en cuestión. Ej: $\theta = \theta_0$.

2. Hipótesis compuesta: Aquélla que da un rango de valores posibles. Ej: $\theta > \theta_0, \quad a \leq \theta \leq b$.

En los contrastes paramétricos, si H_0 es simple, del tipo $\theta = \theta_0$, los casos más importantes de hipótesis alternativa son:

1. $H_1 : \theta \neq \theta_0$. El contraste es Bilateral .

2. $H_1 : \theta > \theta_0, ($ ó $\theta < \theta_0)$. El contraste es Unilateral.

3. Tipos de errores

Al decidir rechazar H_0 o no rechazarla se pueden cometer dos tipos de errores, error de tipo I o error de tipo II.

El error de tipo I se comete cuando rechazamos H_0 siendo cierta. Su probabilidad se denota con α y se llama **nivel de significación**.

$$\alpha = P(\text{rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ cierta}) = P(\text{cometer ET I})$$

El error de tipo II se comete cuando se decide aceptar H_0 siendo falsa. Su probabilidad se denota con β (cuando la hipótesis alternativa es simple).

$$\beta = P(\text{no rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ falsa}) = P(\text{cometer ET II})$$

Lo ideal sería reducir α y β a la vez, pero si disminuimos uno el otro aumentará. La única forma de disminuir los dos a la vez sería aumentando el tamaño muestral.

4. Etapas de un Contraste de Hipótesis

1. Formulación de las hipótesis. Definir H_0 (hipótesis a contrastar) y H_1.

   Los dos casos más importantes de contrastes paramétricos son:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} H_0 & : & \theta = \theta_0 \\ H_1 & : & \theta \neq \theta_0 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} H_0 & : & \theta \leq \theta_0 \\ H_1 & : & \theta > \theta_0 \end{array} \right.$$

Nosotros supondremos $H_0 : \theta = \theta_0$ y, según sea H_1, consideraremos contrastes Unilaterales y Bilaterales.

2. Determinación de d. Definir una medida de discrepancia, $d(\theta_0, \hat{\theta})$, entre el valor θ_0 que propone H_0 para el parámetro y el valor estimado del parámetro a partir de la muestra, $\hat{\theta}$. Esta variable aleatoria debe tener una distribución conocida si H_0 es cierta.

   En general y mientras no se diga lo contrario, las medidas de discrepancia que usaremos serán las variables pivote del tema anterior en las que sustituiremos el parámetro genérico de interés θ ($\mu, \sigma^2, \mu_1 - \mu_2$, etc.) por el valor concreto θ_0 propuesto por H_0. Así, si H_0 es cierta, la medida d tendrá una distribución conocida. Sólo faltará determinar los valores de d que nos harán rechazar H_0.

3. Determinación de la región de rechazo. La *región de rechazo* o *región crítica* se define como el conjunto de valores de la medida de discrepancia d que nos hacen rechazar la hipótesis nula H_0.

4. Cálculo de d y toma de la decisión. Con todo lo anterior establecido, se toma la muestra $(x_1, \ldots,\ x_n)$, se calcula $\hat{\theta}$ y $\hat{d} = d(\theta_0, \hat{\theta})$.

5. Región de Rechazo

5.1. Nivel de Significación

Fijado el nivel de significación α, la región de rechazo se determina a partir de la distribución de $d(\theta_0, \hat{\theta})$, cuando H_0 sea cierta.

1. $\left\{ \begin{array}{lllll} H_0 & : & \theta & = & \theta_0 \\ H_1 & : & \theta & > & \theta_0 \end{array} \right.$ Unilateral por la derecha

   Elegimos d_c tal que $P(d > d_c | H_0 \text{ cierta}) = \alpha$. La región de rechazo será $d > d_c$ y la de no rechazo $d \leq d_c$.

2. $\left\{ \begin{array}{lllll} H_0 & : & \theta & = & \theta_0 \\ H_1 & : & \theta & < & \theta_0 \end{array} \right.$ Unilateral por la izquierda

   Elegimos d_c tal que $P(d < d_c | H_0 \text{ cierta}) = \alpha$. La región de rechazo será $d < d_c$ y la de no rechazo $d \geq d_c$.

3. $\left\{ \begin{array}{lllll} H_0 & : & \theta & = & \theta_0 \\ H_1 & : & \theta & \neq & \theta_0 \end{array} \right.$ Bilateral

   Elegimos d_{c_1} y d_{c_2} tales que $P(d < d_{c_1},\ d > d_{c_2} | H_0 \text{ cierta}) = \alpha$. La región de rechazo es $d < d_{c_1},\ \ d > d_{c_2}$ y la de no rechazo $d_{c_1} \leq d \leq d_{c_2}$.

   Si la distribución de d es simétrica es equivalente a elegir d_c tal que $P(|d| > d_c | H_0 \text{ cierta}) = \alpha$, y la región de rechazo es $|d| > d_c$.

5.2. Nivel Crítico o p-valor

Otra forma de determinar la Región de Rechazo es mediante el nivel crítico o $p-$valor. Éste se define como *la probabilidad de observar una discrepancia peor o igual que la observada cuando H_0 es cierta*, entendiendo por peor que rechace la hipótesis nula con más evidencia. El p-valor se calcula a partir del valor obtenido $\hat{d}$ utilizando la distribución de la medida de discrepancia d.

1. $\begin{cases} H_0 & : & \theta & = & \theta_0 \\ H_1 & : & \theta & > & \theta_0 \end{cases}$

   El nivel crítico es $p = P(d \geq \hat{d} \; |H_0 \text{ cierta})$.

2. $\begin{cases} H_0 & : & \theta & = & \theta_0 \\ H_1 & : & \theta & < & \theta_0 \end{cases}$

   El nivel crítico es $p = P(d \leq \hat{d} \; |H_0 \text{ cierta})$.

3. $\begin{cases} H_0 & : & \theta & = & \theta_0 \\ H_1 & : & \theta & \neq & \theta_0 \end{cases}$

   Si d tiene una distribución simétrica, el nivel crítico es $p = P(|d| \geq |\hat{d}| \; |H_0 \text{ cierta})$.

Cuanto menor sea p, menor será la probabilidad de obtener una discrepancia como la observada, y menor la credibilidad de H_0.

- Si $p > 0.2$ diremos que no existe evidencia muestral para rechazar H_0.
- Si $0.01 \leq p \leq 0.2$ estará en la región de duda. Rechazaremos H_0 dependiendo de nuestra opinión a priori y de las consecuencias prácticas de aceptar y rechazar H_0.
- Si $p < 0.01$, rechazamos H_0.

6. Contraste para la media en poblaciones normales

Queremos contrastar que la media de una v.a. normal con parámetros desconocidos es μ_0.

$$\begin{cases} H_0 & : & \mu & = & \mu_0 \\ H_1 & : & \mu & \neq & \mu_0 \end{cases}$$

Consideramos como medida de discrepancia:

$$d = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1} \quad \text{si } H_0 \text{ es cierta}$$

Fijado α, la región de **no** rechazo es: $(-t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}, t_{n-1,\frac{\alpha}{2}})$

El p-valor es $p = P\left(|d| \geq \left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right| \; | \, d \sim t_{n-1}\right) = 2P\left(d \geq |\hat{d}| \; | \, d \sim t_{n-1}\right)$

Para el contraste unilateral por la derecha, con $H_1 : \mu > \mu_0$, la región de aceptación de H_0 es: $(-\infty, t_{n-1,\alpha})$ y el p-valor es $p = P(d \geq \hat{d}\,|H_0)$.

Si σ es conocida utilizamos

$$d = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

y no rechazamos H_0 si $\hat{d} \in (-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}})$.

Para poblaciones generales, no normales, y con tamaño muestral grande ($n > 30$), usamos que $\bar{X}$ es asintóticamente normal. No rechazamos H_0, en contrastes bilaterales, si $\hat{d} = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \in (-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}})$

Ejemplo:

2. La longitud de las alas de los grillos de una región puede aproximarse a una distribución normal. Cuando la media se mantiene en 1 cm. apenas se percibe su sonido por las noches. Las alas de 15 grillos elegidos al azar midieron (en cm.):

0.7	1.4	1.3	1	1.8	1.2	0.8	1.7
1.6	0.9	1.4	1.5	0.7	1.8	0.9	

Contrastar la hipótesis de que en esa región pueda dormirse plácidamente, sin ruido, con un nivel de significación del 5 %.

7. Contraste para la varianza en poblaciones normales

$$\begin{cases} H_0 & : & \sigma^2 & = & \sigma_0^2 \\ H_1 & : & \sigma^2 & \neq & \sigma_0^2 \end{cases}$$

La medida de discrepancia es

$$d = \frac{n-1}{\sigma_0^2} s^2 \sim \chi^2_{n-1} \quad \text{si } H_0 \text{ es cierta}$$

Para α fijo, la región de aceptación es: $(\chi^2_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}, \chi^2_{n-1,\frac{\alpha}{2}})$

Para el contraste unilateral por la derecha, con $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$, la región de aceptación de H_0 es $(0, \chi^2_{n-1,\alpha})$, y el p-valor es $p = P(d \geq \hat{d}\,|H_0)$.
Para el contraste unilateral por la izquierda, con $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$, la región de aceptación de H_0 es$(\chi^2_{n-1,1-\alpha}, \infty)$ y el p-valor es $p = P(d \leq \hat{d}\,|H_0)$.

Ejemplo:

3. En el ejemplo de las alas de los grillos, contrastar que la varianza de la longitud de las alas es 0.2, con $\alpha = 0.05$.

8. Contraste para la comparación de medias en poblaciones normales independientes

Tenemos dos poblaciones normales independientes y queremos contrastar si tienen la misma media.

$$\begin{cases} H_0 & : & \mu_1 & = & \mu_2 \\ H_1 & : & \mu_1 & \neq & \mu_2 \end{cases}$$

8.1. Varianzas conocidas

La medida de discrepancia es:

$$d = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1) \quad \text{si } H_0 \text{ es cierta}$$

y para α fijo, la región de aceptación es $(-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}})$ y el nivel crítico o p-valor es $p = P(|d| \geq |\hat{d}| \;|H_0)$.

8.2. Varianzas desconocidas pero iguales

Consideremos como medida de discrepancia:

$$d = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2} \quad \text{si } H_0 \text{ es cierta}$$

Fijado α, la región de aceptación es $(-t_{n_1+n_2-2,\frac{\alpha}{2}},\ t_{n_1+n_2-2,\frac{\alpha}{2}})$.
El nivel crítico o p-valor es

$$p = P(|d| > |\hat{d}| \;|H_0) = P\left(|t_{n_1+n_2-2}| \geq \left|\frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}\right|\right)$$

8.3. Varianzas desconocidas y distintas

En este caso utilizamos como medida de discrepancia:

$$d = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2-\Delta} \quad \text{si } H_0 \text{ es cierta}$$

9. Contraste para la comparación de varianzas en poblaciones normales independientes

$$\begin{cases} H_0 & : & \sigma_1^2 & = & \sigma_2^2 \\ H_1 & : & \sigma_1^2 & \neq & \sigma_2^2 \end{cases}$$

Tomamos como medida de discrepancia:

$$d = \frac{S_2^2}{S_1^2} \sim F_{n_2-1,n_1-1} \quad \text{si } H_0 \text{ es cierta}$$

Para α fijo, la región de aceptación es

$$(F_{n_2-1,n_1-1,1-\frac{\alpha}{2}}, F_{n_2-1,n_1-1,\frac{\alpha}{2}})$$

Ejemplo:

4. Una fábrica tiene dos máquinas que producen arandelas de acero de un grosor de 1.3 mm. según los planos. Se han medido los espesores de muestras independientes de cada máquina con precisión de décimas de mm. y se han obtenido los siguientes resultados:

Máquina 1:	1.17	1.30	1.22	1.39	1.32	
Máquina 2:	1.20	1.27	1.33	1.15	1.37	1.26

Supuesta normalidad, ¿podemos decir que ambas máquinas están trabajando en condiciones semejantes? Utilizar un nivel de significación $\alpha = 0.05$.

10. Contrastes de Hipótesis para proporciones

10.1. Para una proporción

Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una m.a.s. de una distribución de $Bern(p)$, queremos realizar el siguiente contraste:

$$\begin{cases} H_0 & : & p & = & p_0 \\ H_1 & : & p & \neq & p_0 \end{cases}$$

Si n es lo suficientemente grande, aplicamos el teorema central del límite y la medida de discrepancia a considerar es:

$$d = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0\, q_0}{n}}} \sim N(0,1) \quad \text{si } H_0 \text{ es cierta}$$

Para α fijo, la región de aceptación es $(-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}})$ y el p-valor es $p = P(|d| \geq |\hat{d}|\, |H_0)$.

Ejemplo:

5. La proporción de gente que votó a un partido en unas elecciones es del 25 %. Se toma hoy una muestra de $n = 500$ electores y se obtiene un 22 % de votantes. ¿Hay evidencia de un cambio en el número de votos?

10.2. Comparación de dos proporciones

Ahora tenemos dos muestras independientes $(X_1, \ldots, X_{n_1})$ m.a.s. de $Bern(p_1)$, $(Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ m.a.s. de $Bern(p_2)$ y queremos contrastar:

$$\begin{cases} H_0 & : \ p_1 = \ p_2 \ = p_0 \\ H_1 & : \ p_1 \neq \ p_2 \end{cases}$$

Si n_1 y n_2 son grandes, utilizamos como medida de discrepancia:

$$d = \frac{\hat{p_1} - \hat{p_2}}{\sqrt{\frac{\hat{p_0}\,\hat{q_0}}{n_1} + \frac{\hat{p_0}\,\hat{q_0}}{n_2}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\hat{p_0}\,\hat{q_0}}{n_1} + \frac{\hat{p_0}\,\hat{q_0}}{n_2}}} \sim N(0,1) \quad \text{si } H_0 \text{ es cierta}$$

Donde $\hat{p_0} = \frac{n_1\hat{p_1} + n_2\hat{p_2}}{n_1+n_2} = \frac{n_1\bar{X} + n_2\bar{Y}}{n_1+n_2}$

Ejemplo:

6. La proporción de unidades defectuosas en un lote de $n_1 = 100$ unidades del proveedor A es 0.04 mientras que en un lote de $n_2 = 150$ unidades del B la proporción es 0.07. ¿Hay evidencia suficiente para admitir diferencias entre los proveedores?

11. Relación entre Intervalo de Confianza y Contraste de Hipótesis

En un contraste bilateral:
Se acepta al nivel α la hipótesis $H_0 : \theta = \theta_0 \Leftrightarrow$ El IC-$(1-\alpha)100\,\%$ construido para θ incluye el valor θ_0.
Por ejemplo, para μ en una $N(\mu, \sigma)$ y fijado α:

IC	CH
$T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$	$d = \frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$
$\mu \in \left(\bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$	$\bar{X} \in \left(\mu_0 \pm t_{\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$
μ está en el IC si $\lvert\bar{X} - \mu\rvert \leq t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}$	Aceptamos H_0 si $\lvert\bar{X} - \mu_0\rvert \leq t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}$

Con α fijo, el Intervalo de Confianza al nivel $(1-\alpha)100\,\%$ nos da el intervalo de valores para θ_0 que no rechazan H_0 en un contraste Bilateral