

Tema 11. Termodinámica.

Problemas resueltos.

Un estudiante es aficionado al submarinismo. En una de sus inmersiones, se hallaba a una profundidad de 40 m por debajo de la superficie y la temperatura era de 5 °C cuando soltó una burbuja de aire con un volumen de 15 cm³. Nuestro estudiante, viendo cómo se alejaba su burbuja se preguntó que tamaño tendría justo antes de llegar a la superficie, donde la temperatura era de 25 °C.

Solución:

Podemos suponer en primera aproximación que el aire respirado es un gas ideal, con lo cual se satisface la ecuación

$$\frac{PV}{T} = nR$$

Debido a que la cantidad de moles de aire en la burbuja no cambia, tendremos que

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$$

donde por 1 denotamos el punto a 40 m de profundidad y por 2 el punto donde sale la burbuja en la superficie. De aquí podemos despejar V_2 ,

$$V_2 = V_1 \frac{P_1T_2}{P_2T_1}$$

Las temperaturas las conocemos pero no así las presiones. Pero hallarlas es fácil si recordamos que la presión de una columna de líquido de altura h está dada por $P = \rho gh$, donde ρ es la densidad del líquido y g es la aceleración de la gravedad. Así la presión a 40 m de profundidad será

$$P_1 = P_a + \rho gh$$

donde P_a es la presión atmosférica en la superficie del lago. Además $P_2 = P_a$. Suponiendo que esta presión P_a sea de 1 atm (= 101,3 kPa), podemos substituir los valores conocidos de la densidad del agua (1 gr/cm³) y de la gravedad (9,8m/s²) para hallar

$$V_2 = \left(1 + \frac{\rho gh}{P_a}\right) \frac{273 + 25}{273 + 5} V_1 = 5,22 V_1 = 78,3 \text{ cm}^3$$

Es decir que el volumen aumenta unas cinco veces.

La capacidad calorífica a volumen constante de cierto gas ideal monoatómico es 48,9 J/K.

Se pide:

- Determinar el número de moles de gas.
- ¿Cuál es la energía interna de este gas a $T = 300 \text{ K}$?
- ¿Cuál es su capacidad calorífica a presión constante?

Solución:

a) La capacidad calorífica a volumen constante de un gas ideal monoatómico es $C_v = 3nR/2$. Como la constante de los gases es $R = 8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$, obtenemos que el número de moles de este gas es

$$n = \frac{2}{3} \frac{48,9 \text{ J/K}}{8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}} = 3,92 \text{ mol}$$

b) La energía interna de un gas ideal monoatómico está dada íntegramente por su energía cinética, ya que en un gas ideal no hay interacción entre partículas. La energía cinética a su vez está dada por el teorema

de equipartición que nos dice que por cada mol de gas y grado de libertad tenemos una contribución de $RT/2$. Como tenemos tres grados de libertad de translación, la energía interna de un gas ideal está dada por $U = 3nRT/2$, con lo que a $T = 300\text{ K}$ los moles obtenidos en (a) contienen la siguiente energía térmica:

$$U = \frac{3}{2}(3,92\text{ mol } 8,31\text{ J/mol} \cdot \text{K } 300\text{ K}) = 14,658,84\text{ J}$$

c) La capacidad calorífica a presión constante se relaciona con la capacidad calorífica a volumen constante a través de la expresión $C_p = C_v + nR$ con lo que en nuestro caso tendremos $C_p = 81,5\text{ J/K}$.

La velocidad de escape en Marte es $5,0\text{ km/s}$ y la temperatura de su superficie es de 0°C , mientras que la velocidad de escape de Júpiter es de 60 km/s y su temperatura superficial es de -150°C .

Calcular el valor cuadrático medio de la velocidad de las moléculas de:

- a) H_2 ,
- b) O_2 ,
- c) CO_2

Datos: Masa molar del $H_2 = 2\text{ gr/mol}$. Masa molar del $O_2 = 32\text{ gr/mol}$. Masa molar del $CO_2 = 44\text{ gr/mol}$.

Solución:

La velocidad cuadrática media es una velocidad típica de las moléculas y está relacionada con la temperatura en la forma

$$v_{cm} \equiv \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

donde $k = 1,381 \cdot 10^{-23}\text{ J/K}$ es la constante de Boltzmann, m es la masa de las moléculas o, alternativamente, $R = 8,31\text{ J/mol} \cdot \text{K}$ es la constante de los gases y M es la masa molar del gas. Usaremos esta última expresión ya que nos dan las masas molares de los gases.

a) Para el H_2 , en Marte tenemos (no olvidemos pasar la temperatura a Kelvin)

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{3(8,31\text{ J/mol} \cdot \text{K})(273\text{ K})}{2 \times 10^{-3}\text{ kg/mol}}} = 1,844,7\text{ m/s}$$

mientras que en Júpiter tenemos que $v_{cm} = 1,238,2\text{ m/s}$.

b) Para el O_2 en Marte tenemos $v_{cm} = 461,2\text{ m/s}$ y en Júpiter tenemos $v_{cm} = 309,5\text{ m/s}$.

c) Finalmente para el CO_2 en Marte se obtiene $v_{cm} = 393,3\text{ m/s}$, y en Júpiter $v_{cm} = 264,0\text{ m/s}$.

c) Un sexto de la velocidad de escape en Marte son unos 830 m/s , con lo que no esperamos encontrar hidrógeno en Marte, pero sí oxígeno y dióxido de carbono.

d) En Júpiter en cambio, un sexto de la velocidad de escape son unos 10.000 m/s , con lo que ni siquiera el hidrógeno puede escapar del campo gravitatorio.

Un gas ideal, que se encuentra inicialmente en un estado definido por p_i, V_i, T_i , experimenta una expansión isotérmica hasta un estado intermedio m en el que la presión es $p_m = p_i/2$. Seguidamente el gas se comprime a dicha presión constante p_m hasta que el volumen vuelve a su estado inicial.

a) **Representar estos procesos en un diagrama p-V.**

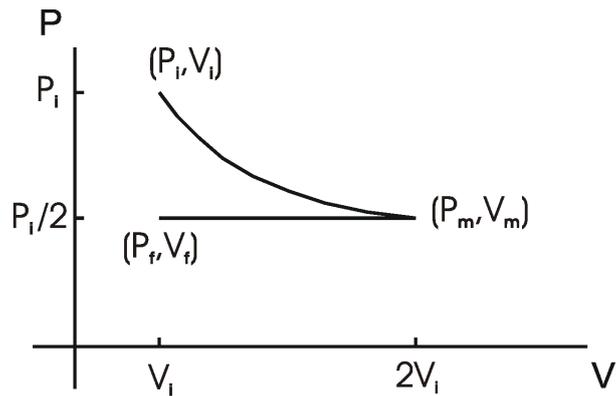
b) **Determinar los valores de las variables p, V, T para los estados m y f. Expresar estos valores en función de los correspondientes al estado inicial.**

Solución:

a) Sabemos que $pV = nRT$. Dado que sufre una expansión isotérmica la temperatura permanece constante, por lo tanto $pV = Cte$, así que

$$p_i V_i = \frac{p_i}{2} V_m,$$

de donde despejando se obtiene: $V_m = 2V_i$. Posteriormente se mueve a lo largo de la recta dada por $p = p_m = p_i/2$ (presión constante) En el gráfico queda:



b) Al estado m llegamos con la misma temperatura T_i por ser un proceso isotérmico. Por otro lado ya hemos calculado $V_m = 2V_i$. Para los valores f tenemos $V_f = V_i$ y $p_f = p_m = p_i/2$. Como la presión permanece constante, $p = nRT/V = \text{constante}$

$$nRT_m/V_m = nRT_f/V_f$$

despejando y sustituyendo

$$T_f = T_m V_f / V_m = T_i V_i / (2V_i) = T_i / 2$$

El coeficiente de expansión de volumen de un gas a presión constante viene definido por $\beta = (1/V)(dV/dT)$, donde al tomar la derivada se considera que la presión es constante.

a) **Demostrar que para un gas ideal $\beta = 1/T$**

b) **Evaluar β para un gas ideal a 0°C .**

Solución:

a) Despejando el volumen en la ecuación de los gases perfectos obtenemos $V = nRT/P$, de donde $dV/dT = nR/P$, y por tanto

$$\beta = (1/V)(dV/dT) = P/(nRT) (nR)/P = 1/T$$

b) Sustituyendo el valor de la temperatura obtenemos directamente $\beta = 1/273 \text{ K}^{-1}$.

Para el caso de un gas ideal que experimenta un proceso adiabático cuasiestático la presión varía con el volumen de tal forma que pV^γ permanece constante. Si p_i, V_i corresponden al estado inicial se tiene que para un volumen V la presión es

$$p = p_i V_i^\gamma / V^\gamma$$

Demostrar que el trabajo realizado por el gas ideal en un proceso adiabático cuasiestático viene dado por

$$W = \frac{p_i V_i}{\gamma - 1} [1 - (V_i/V_f)^{\gamma-1}]$$

Solución:

El trabajo viene dado por

$$\begin{aligned} W &= \int_{V_i}^{V_f} p dV = p_i V_i^\gamma \int_{V_i}^{V_f} V^{-\gamma} dV = \\ &= \frac{p_i V_i^\gamma}{1 - \gamma} (V_f^{1-\gamma} - V_i^{1-\gamma}) = \\ &= \frac{p_i V_i}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_i}{V_f} \right)^{\gamma-1} \right] \end{aligned}$$

Se tiene inicialmente 1 mol de un gas ideal *diatómico* ($\gamma = 1,4$) a una presión $P_1 = 1$ atmósfera, y una temperatura $T_1 = 0^\circ C$. El gas se calienta a volumen constante hasta alcanzar la temperatura $T_2 = 150^\circ C$, y luego se expande adiabáticamente hasta que su presión vuelve a ser 1 atmósfera. Finalmente se comprime a presión constante hasta volver a su estado inicial. Calcular:

- a) la temperatura T_3 después de la expansión adiabática,
- b) el calor absorbido o cedido por el sistema en cada proceso,
- c) el rendimiento de este ciclo,
- c) el rendimiento de un ciclo de Carnot que operara entre las temperaturas extremas del ciclo. (Dato: $R=0,082$ L. atm. / mol. $^\circ K$).

Solución:

a) En primer lugar el volumen en el punto 2 es el mismo que en el punto 1, es decir, $V_2 = nRT_1/P_1 = (1 \text{ mol})(0,082 \text{ L atm/mol } ^\circ K)(273,15 \text{ } ^\circ K) / (1 \text{ atm}) = 22,4 \text{ L}$. La presión en el punto 2 es $P_2 = nRT_2/V_2 = 1,55 \text{ atm}$. Con estos resultados el volumen en el punto 3 es

$$V_3 = V_2 \left(\frac{P_2}{P_3} \right)^{1/\gamma} = V_2 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{1/\gamma} = 30,6 \text{ litros}$$

por lo que la temperatura en el punto 3 será

$$T_3 = \frac{P_3 V_3}{nR} \Rightarrow T_3 = 373,17 \text{ } ^\circ K = 100,02 \text{ } ^\circ C$$

b) El calor transferido durante cada proceso es (observar que se usa C_p o C_v dependiendo que el proceso se realice a presión o volumen constante)

$$Q_{12} = C_v \Delta T = \frac{5}{2} nR \Delta T = 3,12 \text{ kJ}; \quad Q_{23} = 0; \quad Q_{31} = C_p \Delta T = \frac{7}{2} nR \Delta T = -2,91 \text{ kJ}$$

donde se han usado los valores de C_v y C_p correspondientes a un gas ideal diatómico, y el factor de conversión $1 \text{ L. atm.} = 101,3 \text{ J} = 0,1 \text{ kJ}$.

c) El rendimiento se define como el trabajo neto realizado en el ciclo dividido por el calor absorbido, de forma que, como la variación de energía interna es nula en el ciclo, ya que se vuelve a las condiciones iniciales, se tiene

$$\epsilon = \frac{W_{neto}}{Q_{abs}} = \frac{Q_{12} - [Q_{31}]}{Q_{12}} = 1 - \frac{[Q_{31}]}{Q_{12}} \Rightarrow \epsilon = 0,067$$

es decir, que la eficiencia es del 6,7%.

d) En un ciclo de Carnot el rendimiento se calcula como

$$\epsilon_{Carnot} = 1 - \frac{T_{mín}}{T_{máx}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{273,15 \text{ } ^\circ K}{423,15 \text{ } ^\circ K} = 0,354$$

lo que equivale a una eficiencia del 35,4%, que, como cabía esperar, es mucho mayor que el ciclo anterior.

Se dispone de gas Helio ($\gamma = 1,67$) a una presión inicial de 16 atm, que ocupa un volumen de 1 L, y cuya temperatura es de 600 K. Se expande isotérmicamente hasta que su volumen es de 4 L y luego se comprime a presión constante hasta que su volumen y temperatura son tales que una compresión adiabática devuelve al gas a su estado inicial.

- a) Dibujar el ciclo en un diagrama PV.
- b) Calcular el volumen y la temperatura después de la compresión isobárica.
- c) Calcular el trabajo realizado durante el ciclo y
- d) el rendimiento del ciclo.

Solución:

a) En la fase de expansión isoterma se cumple que $PV = cte$, por lo tanto

$$P_3 = P_2 = \frac{P_1 V_1}{V_2} = 4 \text{atm}$$

Durante la compresión adiabática se cumple $PV^\gamma = cte$, por lo que

$$V_3 = V_1 \left(\frac{P_1}{P_3}\right)^{1/\gamma} = 2,3 \text{litros}$$

b) En la expansión isoterma:

$$W_{12} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = P_1 V_1 \ln 4 = 22,2 \text{atml}$$

En la compresión isóbara:

$$W_{23} = P \Delta V = -6,8 \text{atml}$$

En la compresión adiabática:

$$W_{31} = -C_v \Delta T = -\frac{3}{2} nr \Delta T = -\frac{3}{2} (P_1 V_1 - P_3 V_3) = -10,2 \text{atml}$$

Por lo tanto,

$$W_{tot} = W_{12} + W_{23} + W_{31} = 22,2 - 6,8 - 10,2 = 5,2 \text{atml}$$

c) El rendimiento se define como el cociente entre el trabajo total realizado en el ciclo y el calor absorbido, es decir $\epsilon = W_{tot}/Q_{abs}$. Como ya hemos calculado W_{tot} , sólo nos falta calcular el calor absorbido en cada una de las tres transformaciones. Durante la expansión isoterma $\Delta U = 0$, por lo que $Q_{12} = W_{12}$. En la compresión isóbara el sistema cede calor, luego no hace falta calcular cuanto. Durante la compresión adiabática el calor intercambiado por el sistema es nulo, luego $Q_{abs} = W_{12}$, con lo que

$$\epsilon = \frac{W_{tot}}{W_{12}} = \frac{5,2}{22,2} = 0,23 = 23 \%$$

Problema 1. Un mol de un gas ideal monoatómico recorre un ciclo reversible con las siguientes etapas: partiendo de un estado con $P_1 = 1 \text{ atm}$ y $V_1 = 24,4 \text{ L}$, sufre una expansión a presión constante hasta duplicar su volumen; posteriormente, manteniendo su volumen sufre una transformación en la que disminuye su presión hasta la mitad; finalmente, mediante un proceso isoterma regresa a su estado inicial.

- Calcular el trabajo realizado en cada etapa y en el ciclo completo.
- Calcular el calor intercambiado en cada etapa y en el ciclo completo.
- Calcular el rendimiento del ciclo termodinámico.

Solución:

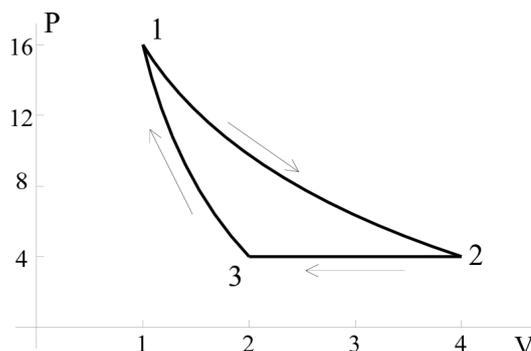
El calor intercambiado podemos calcularlo haciendo uso del primer principio de la termodinámica. Para resolver el problema utilizaremos el convenio de signos habitual:

$W < 0$ si el sistema realiza trabajo sobre el entorno.

$Q > 0$ si el sistema absorbe calor del entorno.

Con este convenio, el trabajo en un proceso desde un volumen V_i hasta un volumen V_f se calcula como

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} P dV$$



y el Primer Principio se escribe

$$\Delta U = Q + W$$

Es decir, la variación de la energía interna es igual al calor transferido al sistema más el trabajo realizado sobre el sistema.

Como la energía interna depende únicamente de la temperatura y sabemos que se trata de un gas monoatómico, cuyas moléculas poseen tres grados de libertad, podemos expresarla como:

$$U = \frac{3}{2}RT$$

Como dato previo es necesario conocer la temperatura T_1 común a los estados 1 y 3, que se calcula aplicando la ley de los gases ideales:

$$T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR} = 297,56 \text{ K}$$

Seguidamente se puede calcular la temperatura del estado 2

$$T_2 = \frac{P_2 V_2}{P_1 V_1} T_1 = 2T_1 = 595,1 \text{ K}$$

En la primera etapa, del estado 1 al 2, el sistema evoluciona según un proceso isobaro, luego:

$$W_{12} = - \int_1^2 P dV = -P \int_1^2 dV = -P (V_2 - V_1) = -24,4 \text{ atm} \cdot \text{L}$$

(teniendo en cuenta que $1 \text{ atm} \cdot \text{L} = 101,3 \text{ J}$ podríamos expresar el trabajo en julios, pero en el problema vamos a mantener las unidades $\text{atm} \cdot \text{L}$)

Para hallar ΔU

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2} R \Delta T_{12} = \frac{3}{2} 0,082 \frac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{K}} 297,56 \text{ K} = 36,6 \text{ atm} \cdot \text{L}$$

Por último el calor resulta:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} - W_{12} = 61,0 \text{ atm} \cdot \text{L}$$

En la siguiente etapa tiene lugar un proceso isócoro, al no haber variación de volumen el trabajo será cero. De este modo el calor sera igual a la variación de energía interna. Así tenemos:

$$Q_{23} = \Delta U_{23} = \frac{3}{2} R \Delta T_{23} = -36,6 \text{ atm} \cdot \text{L}$$

La última etapa del ciclo es un proceso isoterma en el que la variación de energía interna es cero. Podemos calcular el trabajo:

$$W_{31} = - \int_3^1 P dV = -RT \int_3^1 \frac{dV}{V} = -RT \ln \frac{V_1}{V_3} = 16,91 \text{ atm} \cdot \text{L}$$

Un resumen esquemático del ciclo con las cantidades expresadas en $\text{atm} \cdot \text{L}$ será:

Proceso	W	Q	ΔU
1- > 2	-24,4	61,0	36,6
2- > 3	0	-36,6	-36,6
3- > 1	16,91	-16,91	0
ciclo	-7,49	7,49	0

Para calcular el rendimiento dividimos el trabajo entre el calor absorbido

$$\eta = \frac{W}{Q_{abs}} = \frac{7,49}{61,0} = 0,12$$

es decir, un rendimiento del 12%.

Problema 2. Dos moles de un gas diatómico describen el ciclo ABCA de la figura, en el que BC es una expansión adiabática y CA una compresión isoterma. Conocidas P_A y T_A , así como V_B , se pide hallar:

- La relación que hay entre V_B y V_C .
- El trabajo realizado en CA.
- El calor intercambiado en CA.
- El rendimiento del ciclo.

Solución:

Con el convenio de signos habitual, el primer principio de la Termodinámica se escribe como

$$\Delta U = Q_{añadido \text{ al sistema}} + W_{sobre \text{ el sistema}}$$

(a) En cuanto al problema que nos ocupa, teniendo en cuenta que se trata de un gas ideal y con las condiciones que nos dicen, podemos calcular diversas variables que nos faltan en función de los datos que nos dan

$$P_A V_A = 2RT_A \Rightarrow V_A = \frac{2RT_A}{P_A}$$

$$P_B = P_A; \quad T_B = \frac{P_B V_B}{2R} = \frac{P_A V_B}{2R}$$

$$T_C = T_A, \quad P_C = \frac{2RT_A}{V_C}$$

En la expansión adiabática BC, la relación pedida es ($\gamma = C_P/C_V$, es la relación entre las capacidades caloríficas a presión y volumen constante):

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \Rightarrow V_C = \left(\frac{T_B V_B^{\gamma-1}}{T_C} \right)^{1/(\gamma-1)} = V_B \left(\frac{P_A V_B}{2RT_A} \right)^{1/(\gamma-1)}$$

(b) En la compresión isoterma CA, el trabajo realizado *sobre* el sistema viene dado por

$$\begin{aligned} W_{CA} &= - \int_C^A P dV = - \int_C^A \frac{2RT_A}{V} dV = 2RT_A \ln \left(\frac{V_C}{V_A} \right) \\ &= 2RT_A \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \ln \left(\frac{P_A V_B}{2RT_A} \right) \end{aligned}$$

(obsérvese que, como $V_C > V_A$, $W_{CA} > 0$, lo que está de acuerdo con el convenio de signos habitual).

(c) El proceso CA es una compresión isoterma, proceso en el que el sistema cede calor para mantener constante la temperatura en la compresión. Como se ha dicho, la temperatura es la misma al comienzo y al final del proceso, $T_C = T_A$ y, por lo tanto, la variación en la energía interna del gas (que para un gas ideal sólo depende de la temperatura) es cero, por lo que, del primer principio de la termodinámica, se tiene, para el calor intercambiado en el proceso

$$Q_{CA} = \Delta U - W_{CA} = 0 - W_{CA} = -2RT_A \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \ln \left(\frac{P_A V_B}{2RT_A} \right)$$

Nótese ahora que, como $W_{CA} > 0$, $Q_{CA} < 0$, lo que corresponde a que es un calor cedido por el sistema.

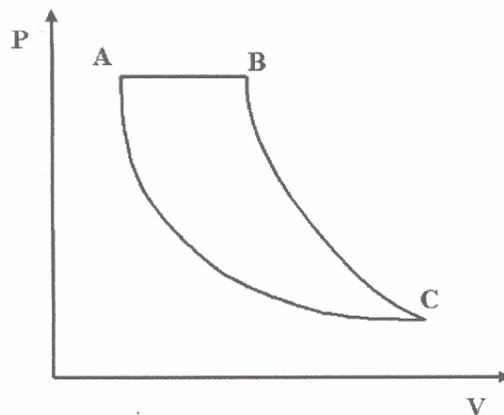


Figura 1: Ciclo termodinámico

(d) Se define el rendimiento de un ciclo como

$$\varepsilon = \frac{W_{\text{por el sistema}}}{Q_{\text{absorbido por el sistema}}} = \frac{Q_{\text{absorbido}} - |Q_{\text{cedido}}|}{Q_{\text{absorbido}}} = 1 - \frac{|Q_{\text{cedido}}|}{Q_{\text{absorbido}}}$$

donde $||$ indica el valor absoluto.

En el ciclo del problema, el sistema cede calor en el proceso CA y absorbe calor en el proceso AB, que se realiza a presión constante. Por lo tanto, el calor absorbido es

$$\begin{aligned} Q_{\text{absorbido}} &= Q_{AB} = C_P \Delta T = (C_V + nR)(T_B - T_A) \\ &= 7R \left(\frac{P_A V_B}{2R} - T_A \right) = \frac{7}{2} P_A V_B - 7RT_A \end{aligned}$$

De esta forma, el rendimiento del ciclo es

$$\varepsilon = 1 - \frac{2RT_A \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \ln \left(\frac{P_A V_B}{2RT_A} \right)}{\frac{7}{2} P_A V_B - 7RT_A}$$

Problema 3. Un mol de un gas ideal monoatómico, con coeficiente adiabático γ , realiza un ciclo ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$), formado por una expansión isoterma a temperatura T , un proceso isócoro (volumen constante) en el que disminuye la presión del gas, y una compresión adiabática hasta el estado inicial. Suponiendo que se conocen T , el coeficiente adiabático γ , la presión P_1 y el volumen V_2 , calcular:

- La temperatura en el punto 3, T_3 .
- El trabajo total realizado por el gas en el ciclo.
- El calor cedido por el sistema.
- El rendimiento del ciclo.

Solución:

- (a) En 1 tenemos P_1, T y

$$V_1 = \frac{RT}{P_1}$$

Por otro lado, a lo largo de una adiabática tenemos que $PV^\gamma = \text{cte}$. Por lo tanto,

$$P_1 V_1^\gamma = P_3 V_3^\gamma \implies P_3 = \frac{P_1 V_1^\gamma}{V_2^\gamma} = P_1 \left(\frac{RT}{P_1 V_2} \right)^\gamma = P_1^{1-\gamma} \left(\frac{RT}{V_2} \right)^\gamma$$

$$T_3 = \frac{P_3 V_3}{R} = P_1^{1-\gamma} \left(\frac{RT}{V_2} \right)^\gamma \frac{V_2}{R} = \left(\frac{R}{P_1 V_2} \right)^{\gamma-1} T^\gamma$$

- (b) Sólo se realiza trabajo durante la isoterma W_{12} y durante la adiabática W_{31} . Cada uno de estos trabajos vale (en los dos casos se trata del trabajo realizado por el gas)

$$W_{12} = \int_{V_1}^{V_2} P dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT}{V} dV = RT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = RT \ln \left(\frac{V_2 P_1}{RT} \right)$$

$$W_{31} = -C_V \Delta T = -\frac{3}{2} RT \left[1 - \left(\frac{RT}{P_1 V_2} \right)^{\gamma-1} \right]$$

Por lo que el trabajo total es la suma de ambos:

$$\begin{aligned}
W &= W_{12} + W_{31} = RT \ln \left(\frac{V_2 P_1}{RT} \right) - \frac{3}{2} RT \left[1 - \left(\frac{RT}{P_1 V_2} \right)^{\gamma-1} \right] = \\
&= TR \left\{ \ln \left(\frac{V_2 P_1}{RT} \right) - \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{RT}{P_1 V_2} \right)^{\gamma-1} \right] \right\}
\end{aligned}$$

(c) El sistema solo cede calor durante el proceso isócoro (en el proceso isoterma hay que suministrar calor para que se mantenga constante la temperatura). Por lo tanto es calor cedido es

$$Q_{23} = C_V \Delta T = C_V (T_3 - T) = \frac{3}{2} RT \left[\left(\frac{RT}{P_1 V_2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right]$$

(d) El rendimiento es el cociente entre el trabajo total realizado por el sistema (el gas) y el calor absorbido en el ciclo. El suministro de calor al sistema tiene lugar solamente durante la isoterma. Por lo tanto el calor absorbido es

$$Q_{12} = W_{12} = RT \ln \left(\frac{V_2 P_1}{RT} \right)$$

que es un valor positivo (como corresponde al ser calor suministrado al sistema)

Por lo tanto, el rendimiento es:

$$\varepsilon = \frac{W_{\text{por el sistema}}}{Q_{\text{absorbido por el sistema}}} = \frac{W}{Q_{12}} = \frac{W_{12} + W_{31}}{Q_{12}} = 1 - \frac{3 \left[1 - \left(\frac{RT}{P_1 V_2} \right)^{\gamma-1} \right]}{2 \ln \left(\frac{V_2 P_1}{RT} \right)}$$