Soluciones al Examen

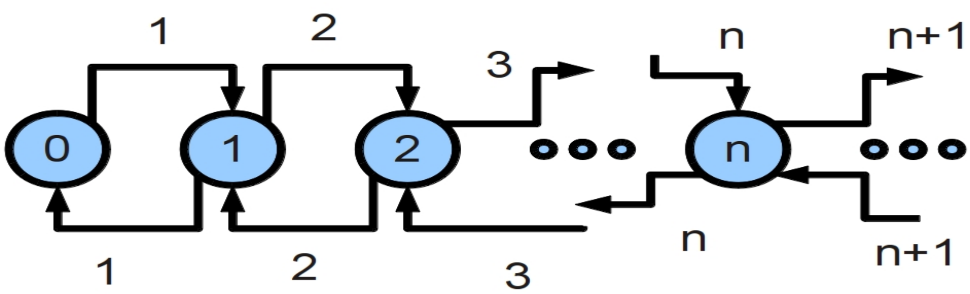
Tema 1 CMTC, Probabilidades y Estadística II

Viernes 25 de Octubre de 2013

Problema-1 Solución:

a) Consideramos una CMTC con S = {0,1,2,3,...}, que representa el número de incidencias abiertas en un instante $t \geq 0$. Las tasas instantáneas de transición son:

$q_{0,1} = 1 = \lambda_0$, $q_{1,0} = 1 = \mu_0$,
$q_{i,i+1} = i + 1 = \lambda_i$ y $q_{i,i-1} = i = \mu_i$.



b) Las probabilidades de transición son:

$p_{0,1} = 1$, $p_{0,i} = 0, i > 1$,
$p_{i,i+1} = \frac{i+1}{2*i+1}$, $p_{i,i-1} = \frac{i}{2*i+1}$, $p_{i,j} = 0$ en el resto de transiciones.

Las tasas de permanencia son:

$v_0 = 1$, $v_i = 2 * i + 1, i > 0$

c) Las ecuaciones de Kolmogorov son:

$$p'_{i,0}(t) = p_{i,1}(t) - p_{i,0}(t),$$
$$p'_{i,j}(t) = p_{i,j+1}(t) * (j+1) + p_{i,j-1}(t) * j - p_{i,j}(t) * (2*j+1),$$
$$i, j = 0, 1, 2, \ldots$$

$$P_0(t) = \begin{array}{|ccccc|}\hline p'_{0,0}(t) & p'_{0,1}(t) & p'_{0,2}(t) & p'_{0,3}(t) & \ldots \\ p'_{1,0}(t) & p'_{1,1}(t) & p'_{1,2}(t) & p'_{1,3}(t) & \ldots \\ p'_{2,0}(t) & p'_{2,1}(t) & p'_{2,2}(t) & p'_{2,3}(t) & \ldots \\ p'_{3,0}(t) & p'_{3,1}(t) & p'_{3,2}(t) & p'_{2,3}(t) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline\end{array}$$

$$G = \begin{array}{|ccccccc|}\hline -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 2 & -5 & 3 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 3 & -7 & 4 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -9 & 5 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline\end{array}$$

$$P(t) = \begin{array}{|ccccc|}\hline p_{0,0}(t) & p_{0,1}(t) & p_{0,2}(t) & p_{0,3}(t) & \ldots \\ p_{1,0}(t) & p_{1,1}(t) & p_{1,2}(t) & p_{1,3}(t) & \ldots \\ p_{2,0}(t) & p_{2,1}(t) & p_{2,2}(t) & p_{2,3}(t) & \ldots \\ p_{3,0}(t) & p_{3,1}(t) & p_{3,2}(t) & p_{2,3}(t) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline\end{array}$$

$P_0(t) = G * P(t)$

d) $E[$ tiempo de transición desde el estado 0 al estado 4$] = E[T_0] + E[T_1] + E[T_2] + E[T_3] =$

$$1/\lambda_0 +$$
$$1/\lambda_1 + \mu_1/\lambda_1 * 1/\lambda_0 +$$
$$1/\lambda_2 + \mu_2/\lambda_2 * (1/\lambda_1 + \mu_1/\lambda_1 * 1/\lambda_0) +$$
$$1/\lambda_3 + \mu_3/\lambda_3 * (1/\lambda_2 + \mu_2/\lambda_2 * (1/\lambda_1 + \mu_1/\lambda_1 * 1/\lambda_0)) =$$
$$(1) + (1/2 + 1/2) + (1/3 + 2/3) + (1/4 + 3/4) = 4 \text{ horas.}$$

e) La distribución estacionaria de la CMTC con 5 estados es:

$$\pi_0 = \pi_1,$$
$$3 * \pi_1 = \pi_0 + 2 * \pi_2,$$
$$5 * \pi_2 = 2 * \pi_1 + 3 * \pi_3,$$
$$7 * \pi_3 = 3 * \pi_2 + 4 * \pi_4,$$

$4 * \pi_4 = 4 * \pi_3,$
$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1.$

Resolviendo el sistema de ecuaciones de equilibrio

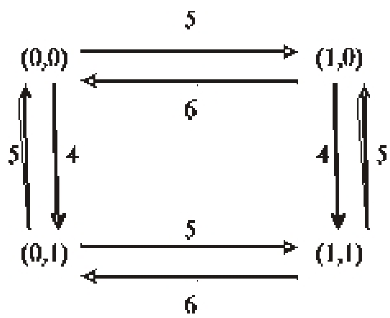
$$\pi_0 = \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4,\ \pi_0 = 0.2.$$

El número medio de incidencias es: $(0 + 1 + 2 + 3 + 4) * 0.2 = 2$ incidencias.

f) Se considera el tiempo medio de tratamiento de las 4 incidencias pendientes.
Es el tiempo medio en $i = 4$ + el tiempo medio en $i = 3$ +
el tiempo medio en $i = 2$ + el tiempo medio en $i = 1$ =
$1/4 + 1/3 + 1/2 + 1 = (3 + 4 + 6 + 12)/12 = 25/12$ horas,
donde en cada estado i permanece el sistema un tiempo exponencial de media $1/i$ horas, pues se trata del mínimo de i tiempos exponenciales de media una hora.

Problema-2 Solución:

a) Dibujar el diagrama de transición que representa el problema



b) Si cada paciente que es atendido por el especialista 1 paga 100 euros y cada paciente atendido por el especialista 2 paga 200 euros, ¿Cuánto ganará, de media por día, el centro de urgencias si permanece abierto durante cinco horas cada día?

El centro de urgencias ganará, de media por día, si permanece abierto durante cinco horas cada día:

$$5*100*\pi_{1,0}+5*200*\pi_{0,1}+5*300*\pi_{1,1} = 5*100*\frac{25}{99}+5*200*\frac{8}{33}+5*300*\frac{20}{99} = \frac{66500}{99} = 671.72€$$

: $\frac{66\,500}{99} = 671.\,72$ ya que las ecuaciones de equilibrio son:

$$\left.\begin{array}{r}9\pi_{0,0}=5\pi_{0,1}+6\pi_{1,0}\\10\pi_{1,0}=5\pi_{0,0}+5\pi_{1,1}\\10\pi_{0,1}=4\pi_{0,0}+6\pi_{1,1}\\11\pi_{1,1}=5\pi_{0,1}+4\pi_{1,0}\\\pi_{0,0}+\pi_{1,0}+\pi_{0,1}+\pi_{1,1}=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}\pi_{1,1}=2\pi_{1,0}-\pi_{0,0}\\5\pi_{0,1}=2\pi_{0,0}+6\pi_{1,0}-3\pi_{0,0}=6\pi_{1,0}-\pi_{0,0}\\4\pi_{1,0}=22\pi_{1,0}-11\pi_{0,0}-6\pi_{1,0}+\pi_{0,0}=16\pi_{1,0}-10\pi_{0,0}\\\pi_{0,0}+\pi_{1,0}+\pi_{0,1}+\pi_{1,1}=1\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{c}\pi_{1,1}=\frac{2}{3}\pi_{0,0}\\\pi_{0,1}=\frac{4}{5}\pi_{0,0}\\\pi_{1,0}=\frac{5}{6}\pi_{0,0}\\\pi_{0,0}=\frac{10}{33}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{c}\pi_{1,1}=\frac{20}{99}=0.\widehat{20}\\\pi_{0,1}=\frac{8}{33}=0.\widehat{24}\\\pi_{1,0}=\frac{25}{99}=0.\widehat{25}\\\pi_{0,0}=\frac{10}{33}=0.\widehat{30}\end{array}\right\}$$

c) ¿Cúantas horas al día, de media, estará cada uno de los especialistas esperando a que venga un paciente?

El especialista 1 estará esperando al día, de media,

$$5\left(\pi_{0,0}+\pi_{0,1}\right)=5\left(\frac{10}{33}+\frac{8}{33}\right)=\frac{90}{33}=2.\widehat{72}\text{ horas}$$

El especialista 2 estará esperando al día, de media,

$$5\left(\pi_{0,0}+\pi_{1,0}\right)=5\left(\frac{10}{33}+\frac{25}{99}\right)=\frac{25}{9}=2.\widehat{7}\text{ horas}$$

: $2.\,777\,8$: $((5.0\pi_{0,0}+5.0\pi_{1,0}=2.\,777\,8)=2.\,777\,8)=144.0$ horas : $\frac{25}{9}$

d) ¿Cuál es el número medio por día de pacientes de cada especialista que es derivado a otros centros de urgencia?

El número medio por día de pacientes del primer especialista que es derivado a otros centros de urgencia es

$$5\left(\pi_{1,0}+\pi_{1,1}\right)=5\left(\frac{25}{99}+\frac{20}{99}\right)=\frac{25}{11}=2.\widehat{27}\text{ pacientes}$$

El número medio por día de pacientes del segundo especialista que es derivado a otros centros de urgencia es

$$4\left(\pi_{0,1}+\pi_{1,1}\right)=5\left(\frac{8}{33}+\frac{20}{99}\right)=\frac{20}{9}=2.\widehat{2}\text{ pacientes}$$

e) ¿Cuál es la probabilidad de que el especialista 1 empiece a trabajar antes que el 2?

La probabilidad de que el especialista 1 empiece a trabajar antes que el 2 es

$$P(Exp(5) < Exp(4)) = \frac{5}{9} = 0.\widehat{5}$$

f) ¿Cuál es la tasa de permanencia en el estado en el que ambos especialistas están ocupados atendiendo pacientes?

La tasa de permanencia en el estado en el que ambos especialistas están ocupados atendiendo pacientes es $5 + 6 = 11$.

g) ¿Cuál es la probabilidad de pasar del estado vacío al estado de que haya un único cliente atendido por el especialista 1?

La probabilidad de pasar del estado vacío al estado de que haya un único cliente atendido por el especialista 1 es $\frac{5}{5+4} = \frac{5}{9}$

h) ¿Cuál es el número medio de pacientes en el centro de urgencias?

El número medio de pacientes en el centro de urgencias es

$$\pi_{1,0} + \pi_{0,1} + 2\pi_{1,1} = \frac{25}{99} + \frac{8}{33} + 2 * \frac{20}{99} = \frac{89}{99} = 0.\widehat{89}.$$