

Examen

Probabilidades y Estadística II

Graduado/a en Matemáticas e Informática

Lunes 25 de Marzo de 2019, Tiempo: 2 horas.

Instrucciones: Realizar cada problema en hojas diferentes y poner nombre, apellidos y n^o de matrícula en todas las hojas. Se pueden utilizar libros y/o apuntes. La calificación del examen es la media aritmética de los problemas.

Problema-1

Un sistema de proceso trabaja en paralelo realizando hasta 4 tareas. La tasa de ejecución de las tareas es 2 tareas por segundo si hay 1 ó 2 tareas en curso y 1 tarea por segundo si hay más de 2 tareas en curso. Cuando el sistema está ejecutando tareas puede recibir una señal de interrupción y reiniciarse cancelando las tareas en curso. Las interrupciones se producen a una tasa de 1 por segundo. La demanda que soporta el sistema es de 2 tareas por segundo. Todos los tiempos se distribuyen exponencialmente.

1. Representar el problema mediante una CMTC.

$S = \{0,1,2,3,4\}$: número de tareas que ejecuta el sistema en un instante.

Las tasas instantáneas de transición

Q	0	1	2	3	4	v_i
0	0	2	0	0	0	2.0
1	3	0	2	0	0	5.0
2	1	2	0	2	0	5.0
3	1	0	1	0	2	4.0
4	1	0	0	1	0	2.0

2. Calcular las tasas v_i de permanencia en los estados y las $p_{i,j}$ probabilidades de transición de estados.

$$v_0 = 2.0,$$

$$v_1 = 5.0,$$

$$v_2 = 5.0,$$

$$v_3 = 4.0,$$

$$v_4 = 2.0$$

$$\begin{aligned}
p_{01} &= 1 \\
p_{10} &= 0.6, p_{12} = 0.4 \\
p_{20} &= 0.2, p_{21} = 0.4, p_{23} = 0.4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{30} &= 0.25, p_{32} = 0.25, p_{34} = 0.5 \\
p_{40} &= 0.5, p_{43} = 0.5
\end{aligned}$$

3. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema esté sin tareas asignadas?

$$\pi_0$$

Sistema de ecuaciones de equilibrio:

$$2\pi_0 = 3\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4$$

$$5\pi_1 = 2\pi_0 + 2\pi_2$$

$$5\pi_2 = 2\pi_1 + \pi_3$$

$$4\pi_3 = 2\pi_2 + \pi_4$$

$$2\pi_4 = 2\pi_3$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$$

$$2\pi_0 = 53/13\pi_1$$

$$53/13\pi_1 = 2\pi_0$$

$$\pi_0 + 27/13\pi_1 = 1$$

$$107/53\pi_0 = 1$$

$$2\pi_0 = 3\pi_1 + \pi_2 + 2\pi_3$$

$$5\pi_1 = 2\pi_0 + 2\pi_2$$

$$5\pi_2 = 2\pi_1 + \pi_3$$

$$3\pi_3 = 2\pi_2$$

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + 2\pi_3 = 1$$

$$\pi_0 = 53/107 = 0.4953271 (***)$$

$$\pi_1 = 26/53 * 53/107 = 26/107 = 0.2429907$$

$$\pi_2 = 6/13 * 26/107 = 12/107 = 0.1121495$$

$$2\pi_0 = 3\pi_1 + 7/3\pi_2$$

$$5\pi_1 = 2\pi_0 + 2\pi_2$$

$$13\pi_2 = 6\pi_1$$

$$\pi_0 + \pi_1 + 7/3\pi_2 = 1$$

$$\pi_3 = 2/3 * 12/107 = 8/107 = 0.07476636$$

$$\pi_4 = 0.07476636$$

$$53/107 + 26/107 + 12/107 + 8/107 + 8/107 = 1$$

4. ¿Cuál es el número medio de tareas en el sistema?

$$0 * \pi_0 + 1\pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3 + 4\pi_4 =$$

$$0 * 53/107 + 1 * 26/107 + 2 * 12/107 + 3 * 8/107 + 4 * 8/107 = 0.9906542 \text{ tareas}$$

5. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema esté en reposo?

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 =$$

$$26/107 + 12/107 + 8/107 + 8/107 = 0.5046729,$$

$$1 - 0.5046729 = 0.4953271$$

6. ¿Cuál es la probabilidad de que se cancelen tareas?

$$1/5 * \pi_1 + 1/5 * \pi_2 + 1/4 * \pi_3 + 1/2 * \pi_4 =$$

$$1/5 * 26/107 + 1/5 * 12/107 + 1/4 * 8/107 + 1/2 * 8/107 = 0.1271028$$

7. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema ejecute el máximo número de tareas durante más de 1 segundo?

$$P(T4 > 1) = \exp(-2 * 1) = 0.1353$$

8. ¿Cuál es la probabilidad de que termine una tarea en el sistema antes de que sea cancelada por una interrupción?

$$\text{En el estado 1 } P(t.exe < t.int) = 2/(2 + 1) = 2/3,$$

$$\text{en el estado 2 } P(t.exe < t.int) = 2/(2 + 1) = 2/3,$$

$$\text{en el estado 3 } P(t.exe < t.int) = 1/(1 + 1) = 1/2 \text{ y}$$

$$\text{en el estado 3 } P(t.exe < t.int) = 1/(1 + 1) = 1/2.$$

$$2/3 * \pi_1 + 2/3 * \pi_2 + 1/2 * \pi_3 + 1/2 * \pi_4 =$$

$$2/3 * 26/107 + 2/3 * 12/107 + 1/2 * 8/107 + 1/2 * 8/107 = 0.3115265$$

9. ¿Cuál es tiempo esperado por el sistema para alcanzar el estado de ejecución de dos tareas en paralelo desde el estado de reposo?

$$E(T_{0 \rightarrow 2}) = E(T_0) + E(T_1) =$$

$$1/2 + (1/2 + 3/2 * E(T_0)) = 1/2 + (1/2 + 3/2 * 1/2) = 1.75 \text{ segundos}$$

10. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema ejecute el máximo número de tareas?

$$\pi_4 = 8/107$$

11. ¿Cuál es la tasa por segundo de tareas terminadas por el sistema?

$$2 * (1 - 1/5 * \pi_1 + 1/5 * \pi_2 + 1/4 * \pi_3 + 1/2 * \pi_4) =$$

$$2 * (1 - (1/5 * 26/107 + 1/5 * 12/107 + 1/4 * 8/107 + 1/2 * 8/107)) =$$

$$2 * (1 - 0.1271028) = 1.745794 \text{ tareas por segundo}$$

12. El sistema opera 24 horas al día, cada tarea cancelada tiene un coste de un centimo de euro, ¿Cuál es el coste diario?

$$(0.8728972) * 24 * 3600 * 0.01 = 754.1832 \text{ euros al día}$$

Problema-2

En una serie de éxito emitida por internet, titulada "Nacimiento y muerte en tiempo continuo", basada en hechos probables, después de un tiempo habitual de introducción transitorio, que tienen todos los capítulos, podemos distinguir 4 estados en las escenas: Lenta (L), Drama (D), Cómica (C) y Acción (A). Suponemos que no hay escenas híbridas con mezcla de A y C, por ejemplo. Los tiempos que presentan cada estado las escenas se distribuyen exponencialmente con medias: 4, 1/2, 1, 1/2 minutos, respectivamente. Tras una escena L o D pasa a cualquier otro posible estado con igual probabilidad. Después de una escena A el guión es siempre L un periodo de tiempo. Por último, el guión tras un pasaje C con igual probabilidad inicia una A o D, pero nunca será L.

Calcular:

1. Dibujar el diagrama de transición y obtener las tasas instantáneas de transición $q_{i,j}$. Q

Las tasas instantáneas de transición

Q	L	D	C	A
L	0	1/12	1/12	1/12
D	2/3	0	2/3	2/3
C	0	1/2	0	1/2
A	2	0	0	0

2. ¿El modelo es de nacimiento y muerte?, explica la respuesta. No, en Q hay transiciones fuera de las diagonales principales superior e inferior.
3. Las probabilidades de transición $p_{i,j}$ y las tasas de permanencia en los estados v_i .

$$v_i = 1/4, 2, 1, 2$$

$$p_{ij} =$$

Q	L	D	C	A	v_i	L	D	C	A
L	0	1/12	1/12	1/12	1/4	0	1/3	1/3	1/3
D	2/3	0	2/3	2/3	2	1/3	0	1/3	1/3
C	0	1/2	0	1/2	1	0	1/2	0	1/2
A	2	0	0	0	2	1	0	0	0

4. La proporción de tiempo que la serie se desarrolla de modo L, pausado y tranquilo.

$$\pi_L = 0.76$$

El sistema de Ecuaciones en equilibrio:

$$1/4 * \pi_L = 2/3 * \pi_D + 2 * \pi_A$$

$$2 * \pi_D = 1/12 * \pi_L + 1/2 * \pi_C$$

$$\pi_C = 1/12 * \pi_L + 2/3 * \pi_D$$

$$2 * \pi_A = 1/12 * \pi_L + 2/3 * \pi_D + 1/2 * \pi_C$$

$$\pi_L + \pi_D + \pi_C + \pi_A = 1$$

$$\pi_L = 0.76433121$$

$$\pi_D = 0.05732484$$

$$\pi_C = 0.10191083$$

$$\pi_A = 0.07643312$$

5. La esperanza del tiempo que la serie se desarrolla con un patrón vivo y ágil ({D, C, A}).

$$\pi_D * 1/v_D + \pi_C * 1/v_C + \pi_A * 1/v_A =$$

$$0.05732 * 1/2 + 0.1019 * 1 + 0.0764 * 1/2 = 0.1687 \text{ minutos.}$$

6. El productor piensa que una escena A es necesaria para que los espectadores puedan seguir y engancharse a la serie, pero le dice a los guionistas que no deben ser escenas de más de 2.5 minutos. Calcular la probabilidad de que una escena de Acción supere los 2.5 minutos.

$$P(T_A > 2.5) = \exp(-2 * 2.5) = e^{-5} = 0.006737947 = 0.007$$