SISTEMA MATERIAL SOMETIDO A PERCUSIONES

XX

20.1 CONSIDERACIONES GENERALES

La experiencia nos dice que a lo largo del movimiento de un sistema material se producen situaciones en las que existen cambios bruscos en el campo de velocidades de sus partículas. Tal es el caso de la pelota que golpea contra el suelo y sale rebotada. En un instante muy corto y casi sin desplazamiento de las partículas, éstas han pasado de tener unas velocidades, a tener otras completamente distintas.

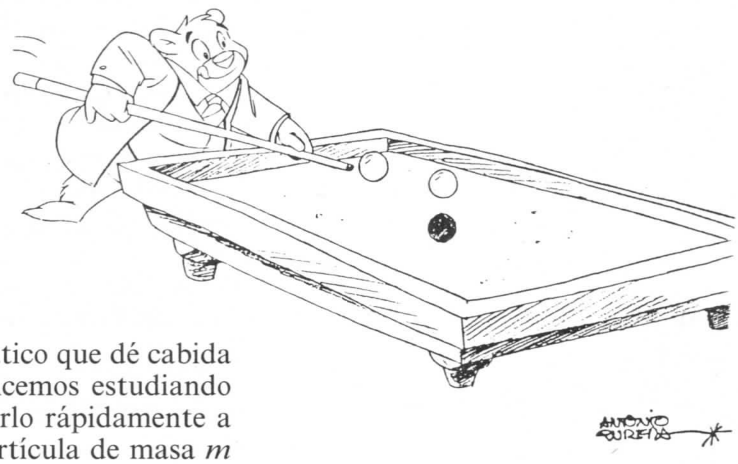

Fig. 20.1 La teoría de percusiones se encarga de elaborar el modelo matemático que estudia los cambios bruscos del campo de velocidades de un sistema material.

Pretendemos elaborar un modelo matemático que dé cabida al análisis de estas discontinuidades. Comencemos estudiando el caso de una partícula sola para generalizarlo rápidamente a un sistema cualquiera. Consideremos una partícula de masa m sometida a una fuerza $\mathbf{F}$. La ecuación de su movimiento viene dada por

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \Rightarrow m\,d\mathbf{v} = \mathbf{F}\,dt \qquad \boxed{20.1}$$

Si integrásemos los dos miembros de esta ecuación a lo largo del movimiento real entre los instantes t_0 y t_1 tendríamos

$$m\mathbf{v}_1 - m\mathbf{v}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}\,dt \qquad \boxed{20.2}$$

Si tenemos t_0 y t_1 muy próximos y $\mathbf{F}$ se mantiene finita en este intervalo de tiempo, la integral del segundo miembro de (20.2) es una cantidad pequeña y $\mathbf{v}_1$ es muy próxima a $\mathbf{v}_0$. Esto es lo que normalmente ocurre a lo largo de un movimiento sin discontinuidades. No obstante, las discontinuidades de $\mathbf{v}$ que la experiencia nos enseña, ocurren en tiempos muy cortos. La ecuación (20.2) exige que durante el tiempo $t_1 - t_0$ el valor de $\mathbf{F}$ se haga muy grande, del orden de $k/(t_1 - t_0)$. De esta forma podemos dar entrada matemática a la causa de la discontinuidad. Decimos entonces que la partícula se encuentra sometida a una *percusión* cuando se somete a una fuerza infinitamente grande durante un tiempo infinitamente pequeño.

La percusión se representa con un vector $\mathbf{P}$ que es igual a la integral del segundo miembro de (20.2). No obstante, como esta

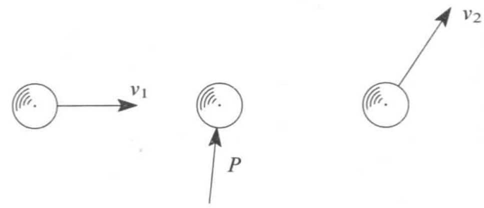

Fig. 20.2 La aplicación de una percusión **P** a una partícula se manifiesta en un cambio brusco de su velocidad.

integral no se va a poder efectuar, la valoración de **P** se hace a través del efecto que produce que es la variación de la cantidad de movimiento expresada en el primer miembro. Tenemos entonces

$$\mathbf{P} = \Delta m\mathbf{v} \qquad \boxed{20.3}$$

Si durante el tiempo $t_1 - t_0$, la partícula estuviese sometida a varias fuerzas, alguna de las cuales no se hiciera infinitamente grande en dicho intervalo, al efectuar la integración (20.2), su efecto no sería tenido en cuenta y podría prescindirse de ella en el análisis de la discontinuidad. Así por ejemplo, al lanzar una pelota pesada contra la pared, ésta se encuentra sometida a su peso y a las fuerzas de reacción procedentes de la pared. Mientras aquél se mantiene finito a lo largo de la discontinuidad, éstas se hacen infinitamente grandes en el corto tiempo que dura la misma. En su análisis se puede entonces prescindir del peso.

Otra circunstancia que debemos poner de relieve es que al mantenerse la velocidad acotada durante el tiempo de discontinuidad, el avance de la partícula es infinitamente pequeño.

Teniendo en cuenta estas observaciones, establecemos las siguientes hipótesis lógicas:

- En el análisis de la discontinuidad no se consideran fuerzas que no se hagan infinitamente grandes en la misma.
- Durante el tiempo que dura la discontinuidad se considera que las partículas no han sufrido desplazamiento.

20.2 ECUACIONES GENERALES

Consideremos ahora un sistema material. Sobre cualquiera de sus partículas actuará una resultante $\mathbf{P}_{ex}$ de las percusiones exteriores directamente ejercidas sobre ella y otra resultante $\mathbf{P}_i$ de percusiones interiores. Ambas proceden de las fuerzas $\mathbf{F}_e$ y $\mathbf{F}_i$ infinitamente grandes que han actuado sobre la misma en un tiempo corto. La ecuación (20.3) para la partícula sería

$$\mathbf{P}_{ex} + \mathbf{P}_i = \Delta\, m\mathbf{v} \qquad \boxed{20.4}$$

Al sumar para todas las partículas, como las $\mathbf{P}_i$ son iguales y de signo contrario, nos queda para el sistema

$$\Sigma\,\mathbf{P}_{ex} = \Delta\Sigma\, m\mathbf{v} = \Delta M\,\mathbf{v}_G \qquad \boxed{20.5}$$

La ecuación (20.4) que se verifica para cada partícula pone de manifiesto que en el sistema material existen, en el momento de la discontinuidad, tres sistemas de vectores deslizantes, el de las $\mathbf{P}_{ex}$, el de las $\mathbf{P}_i$ y el de los $\Delta m\mathbf{v}$, siendo la suma de los dos primeros equivalente al tercero. Ahora bien, las $\mathbf{P}_i$ forman un sistema nulo, luego hay que establecer la equivalencia del primero con el tercero. La ecuación (20.5) ha establecido la igualdad de resultantes. Nos falta por establecer la igualdad de momentos que puede hacerse respecto a *cualquier punto del espacio, sea fijo o móvil*, con tal que las velocidades $\mathbf{v}$ se consideren respecto a ejes galileanos. Podemos entonces establecer la ecuación de momentos

$$\Sigma\mathbf{r} \wedge \mathbf{P}_{ex} = \Delta\Sigma\mathbf{r} \wedge m\mathbf{v} = \Delta\mathbf{H} \qquad \boxed{\mathbf{20.6}}$$

donde $\mathbf{H}$ es el momento cinético respecto al punto donde se toman los momentos. Si este punto es el centro de masas, la ecuación (20.6) se puede poner también en la forma

$$\Sigma\mathbf{r} \wedge \mathbf{P}_{ex} = \Delta\mathbf{H}_G = \Delta\mathbf{h}_G \qquad \boxed{\mathbf{20.7}}$$

donde $\mathbf{h}_G$ es el momento cinético de velocidades relativas a ejes de direcciones fijas que pasan por el centro de masas y en este punto coinciden los momentos cinéticos $\mathbf{H}_G$ y $\mathbf{h}_G$ de velocidades absolutas y relativas.

Las ecuaciones (20.5) y (20.6) son las únicas que nos suministra la mecánica newtoniana. La ecuación de la energía, en general, no es aplicable, porque el trabajo realizado por las fuerzas que generan la percusión no es nulo ni se conoce fácilmente, puesto que es una fuerza infinitamente grande que actúa durante un camino infinitamente pequeño.

Los problemas de percusiones son más sencillos de resolver que los que tratan de determinar el movimiento a lo largo del tiempo, pues en ellos el problema general es el de conocer un estado cinético del sistema a partir de un estado de entrada y esto se resuelve siempre mediante ecuaciones lineales y algebraicas. Sin embargo, la determinación de un movimiento conlleva la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales que lo normal es que no sean ni siquiera lineales.

Los problemas en los que aparecen percusiones son de tres clases:

- Problemas en los que se aplican percusiones conocidas.
- Problemas en los que se introducen ligaduras bruscamente.
- Problemas de choques.

El primer tipo es el que se tiene cuando en un momento determinado, en el que se conoce el estado cinemático del sistema, se aplica un sistema de percusiones $\mathbf{P}$ conocidas. Se trata de determinar el estado cinemático que aparece inmediatamente después de aplicar las percusiones. Es un problema que se resuelve siempre con las ecuaciones (20.5) y (20.6) aplicadas al sistema entero o a determinadas fracciones del mismo adecuadamente elegidas. Por supuesto, al fraccionar el sistema pueden aparecer como exteriores percusiones que antes eran interiores, igual que pasaba con las fuerzas.

Fig. 20.3 El primer problema típico de percusiones es el de calcular el nuevo estado cinemático del sistema cuando se le aplican percusiones conocidas.

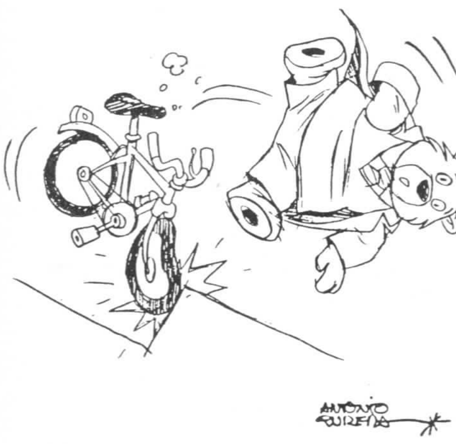

Fig. 20.4 El segundo problema típico de percusiones es el de calcular el nuevo estado cinemático del sistema cuando se introducen ligaduras de forma brusca.

El segundo tipo de problema se presenta cuando en un instante dado del movimiento del sistema se introducen bruscamente ligaduras que antes no había; por ejemplo, cuando a una placa que va deslizando sobre un plano se le fija uno de sus puntos y se pone a girar alrededor de él. En estos problemas aparecen tantas percusiones de ligadura desconocidas como grados de libertad coacciona dicha ligadura. Estas percusiones desconocidas son incógnitas que se agregan a las que ya tiene el problema en sí, con objeto de calcular el nuevo estado cinemático del sistema. Aunque parece que el número de incógnitas aumenta, no ocurre así, pues si bien es cierto que cada coacción introducida por la ligadura lleva consigo una incógnita, también es cierto que en el estado cinemático de salida hay un valor menos que calcular al estar impedido por la ligadura. Nuevamente se resuelven los problemas con las ecuaciones (20.5) y (20.6).

Finalmente, el tercer problema en el que aparecen percusiones se nos presenta cuando dos sólidos chocan entre sí y ambos tienen cambios bruscos de sus estados cinemáticos. El problema no puede resolverse solamente con las ecuaciones (20.5) y (20.6), sino que se necesita siempre una información adicional. Imaginemos, por ejemplo, dos sólidos libres que sufren un choque sin rozamiento en un punto de sus superficies. El conocimiento del estado cinemático de salida de cada sólido supone seis incógnitas que son las tres componentes de la velocidad de uno de sus puntos y las tres componentes de la velocidad de rotación. Como hemos de determinar el movimiento de dos sólidos, ya tenemos doce incógnitas, más el valor de la percusión mutua sufrida ortogonalmente a las superficies de ambos, que hacen un total de trece incógnitas, cuando las ecuaciones (20.5) y (20.6) para cada sólido solamente nos dan un total de doce ecuaciones.

Hay pues, una indeterminación que suele salvarse definiendo un parámetro empírico que es el coeficiente de restitución e del choque. Dicho coeficiente depende de la naturaleza de ambos sólidos y se define como

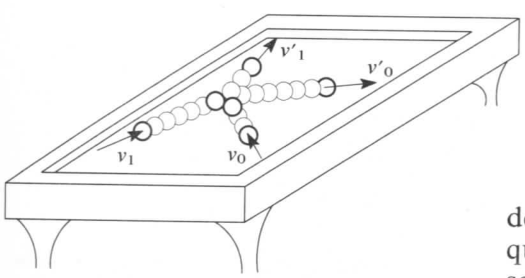

Fig. 20.5 El tercer problema típico de percusiones es el de calcular el nuevo estado cinemático de dos sólidos que chocan.

$$e = -\frac{(\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_0)\cdot\mathbf{n}}{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_0)\cdot\mathbf{n}} \qquad \boxed{\mathbf{20.8}}$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario ortogonal al plano tangente común que ambos sólidos tienen en el momento del choque, $\mathbf{v}'_1$ y $\mathbf{v}'_0$ son las velocidades de salida de *los puntos de contacto* de ambos sólidos y $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_0$ son las velocidades de los mismos puntos a la entrada en el choque.

Cuando $e = 0$ se dice que el choque es *perfectamente inelástico* y cuando $e = 1$ el choque es *perfectamente elástico*. En este último caso, como se demostrará en Mecánica Analítica, hay conservación de la energía total de ambos sólidos a través del choque, por lo que la ecuación (20.8) podría sustituirse por la ecuación de conservación de dicha energía. No obstante, dado que la energía lleva términos cuadráticos en la velocidad, esta sustitución no es buena por la existencia de soluciones parásitas.

Cuando los choques se efectúan entre cadenas de sólidos sometidos a ligaduras, siempre queda el recurso de ir aplicando las ecuaciones a determinadas fracciones del sistema de sólidos, pero ello hace aparecer como incógnitas las percusiones de ligadura existentes entre los diversos sólidos, lo que puede llegar a ser sumamente engorroso. En estos casos están especialmente indicados los métodos de Mecánica Analítica que tendremos ocasión de ver.

EJEMPLO I

Un disco homogéneo de radio a y masa m gira alrededor de su centro O que permanece fijo con velocidad angular ω. En un instante dado se fija bruscamente un punto M de su periferia y se libera el O con lo que pasa a girar alrededor de M.

Se pide:

1º) Averiguar la nueva velocidad ω' con la que girará alrededor de M.

2º) Calcular la energía cinética perdida.

Si se realiza de nuevo la operación inversa, es decir, se fija de nuevo O y se libera M, calcular:

3º) La nueva velocidad ω alrededor de O.

4º) La nueva energía cinética perdida.

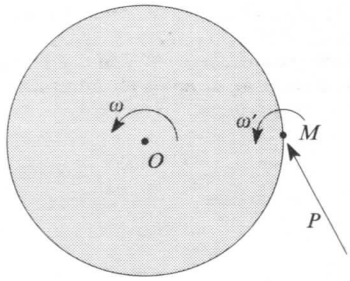

Fig. 20.6 Si un disco gira alrededor de O y se frena bruscamente en M, aparece en este punto una percusión **P** desconocida.

El disco va a sufrir una percusión en M. Si tomamos momentos respecto a este punto, la percusión no dará momento y por tanto se conservará el momento cinético respecto al mismo a través de la discontinuidad que establece la percusión.

Estableceremos la ecuación.

Momento cinético en M antes = Momento cinético en M después.

Para calcular el primer momento cinético aplicamos el teorema de Koenig

$$H_M = m\,a\,v_0 + I_0\omega$$

y como antes de la percusión $v_0 = 0$ nos queda

$$H_M = I_0\omega = ma^2\,\omega/2$$

Después de la percusión el disco gira respecto a M, luego su momento cinético lo podemos calcular como sólido con punto fijo

$$H_M = I_M\omega' = 3m\,a^2\,\omega'/2$$

Tenemos entonces

$$ma^2\,\omega/2 = 3m\,a^2\omega'/2 \Rightarrow \omega' = \omega/3$$

La energía cinética perdida vale

$$T_p = \frac{1}{2}I_0\omega^2 - \frac{1}{2}I_M\omega'^2 =$$

$$= \frac{1}{4}ma^2\omega^2 - \frac{3}{4}ma^2\frac{\omega^2}{9} = \frac{1}{6}ma^2\omega^2$$