



Departamento de Ingeniería de Telecomunicación
Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Jaén

TEMA 5

MODULACIONES DIGITALES (II)

Contenidos

1. Modulación QPSK coherente

2. Modulaciones digitales M-arias

A. Modulación M-PSK

B. Modulación M-QAM

C. Modulación M-FSK

Objetivos específicos

- Prestaciones (probabilidad de error y ancho de banda) de la modulación por manipulación por desplazamiento de fase en cuadratura coherente (QPSK)
- Prestaciones (probabilidad de error y ancho de banda) de la modulación por manipulación por desplazamiento de fase M-aria (M-PSK)
- Prestaciones (probabilidad de error y ancho de banda) de la modulación por amplitud en cuadratura M-aria (M-QAM)
- Prestaciones (probabilidad de error y ancho de banda) de las modulaciones por manipulación por desplazamiento de frecuencia (M-FSK)
- Análisis de sistemas de modulación digital en cuanto a probabilidad de error y eficiencia espectral

Modulación QPSK coherente (I)

- QPSK (Quadrature Phase Shift Keying) codifica la información en la **fase de la portadora**: $(\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4)$ utilizando $M = 4$ símbolos $s_i(t)$ diferentes

$$s_i(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos \left[2\pi f_c t + (2i-1) \cdot \frac{\pi}{4} \right] & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{Resto} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos \left((2i-1) \cdot \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos(2\pi f_c t) - \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cdot \sin \left((2i-1) \cdot \frac{\pi}{4} \right) \sin(2\pi f_c t) \quad 0 \leq t \leq T$$

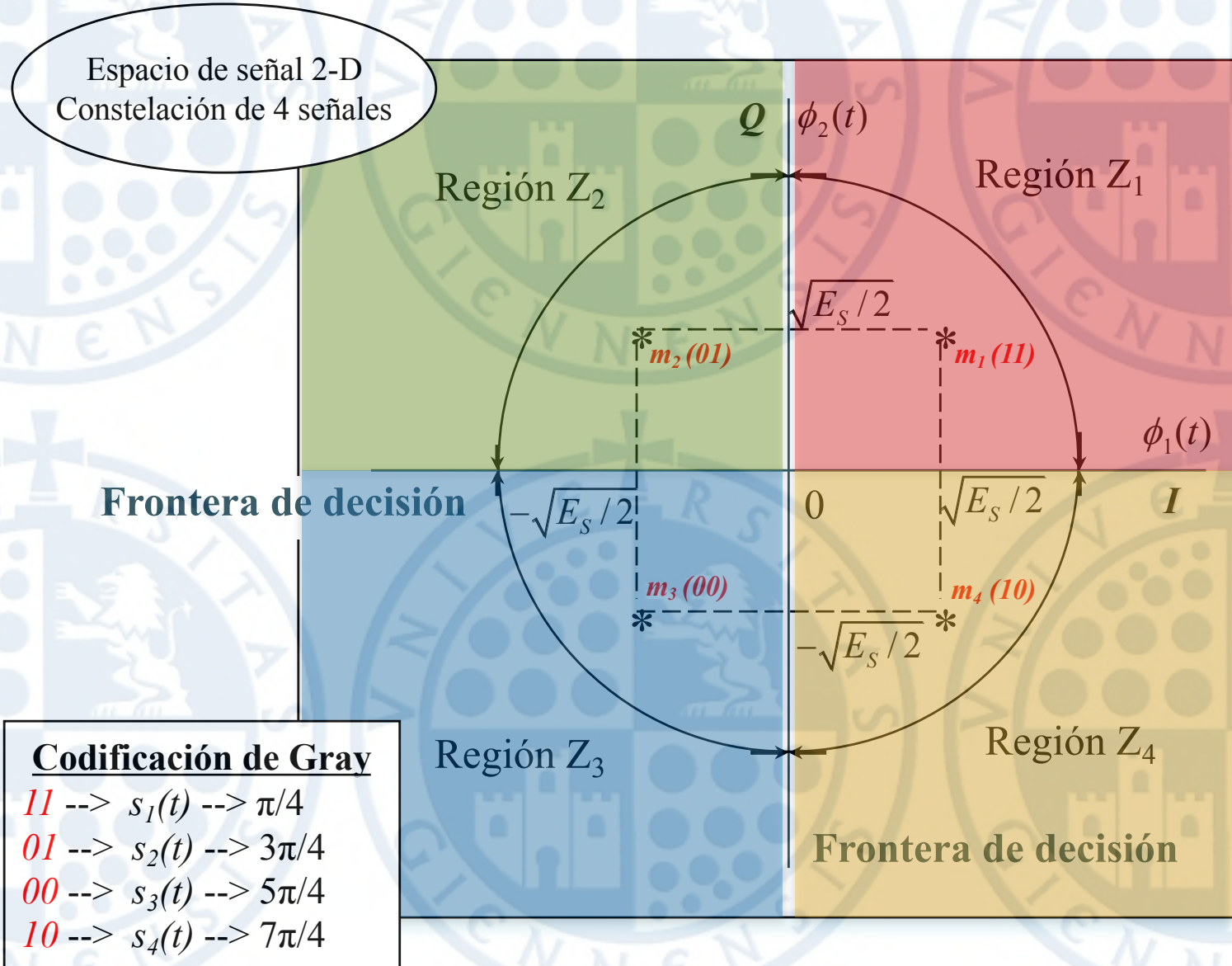
- Cada símbolo (dibit) transporta dos bits de información: $E_s = 2E_b$ $T = 2T_b$
- Existen 2 funciones base ortonormales (ortogonal) $\phi_1(t), \phi_2(t)$ en cuadratura,

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_c t) \quad \phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_c t) \quad 0 \leq t \leq T$$

- $M = 4$ puntos de mensaje s_{ij} ,

$$s_{ij} \Big|_{\substack{i=\{1,2,3,4\} \\ j=\{1,2\}}} = \int_0^T s_i \phi_j dt = \begin{bmatrix} \sqrt{E_s} \cos \left((2i-1) \frac{\pi}{4} \right) \\ -\sqrt{E_s} \sin \left((2i-1) \frac{\pi}{4} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{i1} \\ s_{i2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} s_{i1} & s_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\sqrt{\frac{E_s}{2}}, & -\sqrt{\frac{E_s}{2}} \\ -\sqrt{\frac{E_s}{2}}, & -\sqrt{\frac{E_s}{2}} \\ -\sqrt{\frac{E_s}{2}}, & +\sqrt{\frac{E_s}{2}} \\ +\sqrt{\frac{E_s}{2}}, & +\sqrt{\frac{E_s}{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow s(t) = s_{i1} \phi_1(t) + s_{i2} \phi_2(t)$$

Modulación QPSK coherente (II)



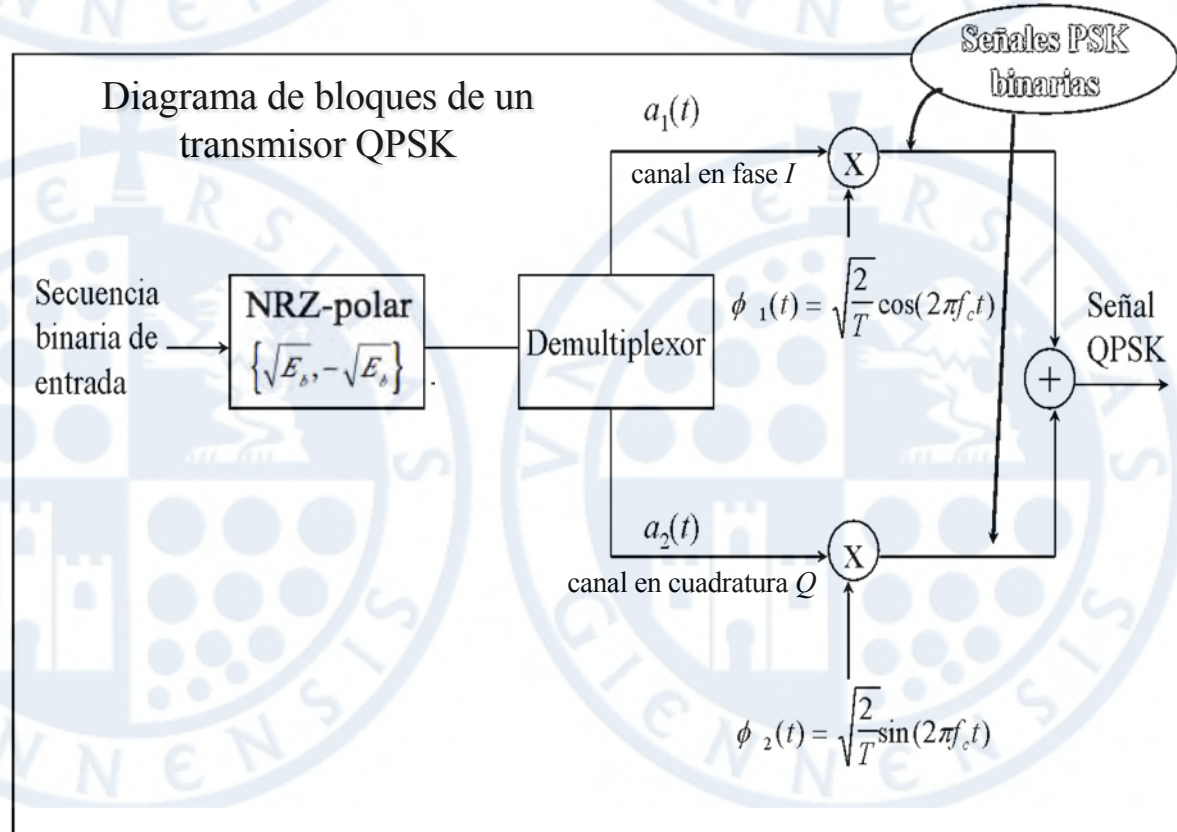
Modulación QPSK coherente (III)

- Utilizando codificación Gray, la tasa de bit erróneos es aproximadamente la mitad que la probabilidad de error por símbolo:

$$P_e \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right) = \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right) \xrightarrow{\text{cod. Gray}} \text{BER} \approx \frac{1}{2}P_e \approx Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right) = \frac{1}{2}\text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right)$$

$$\text{BER}_{\text{QPSK}} = \text{BER}_{\text{BPSK}} = \text{BER}_{\text{MSK}}$$

$$\text{BER}_{\text{QPSK}} = (1/2)\text{BER}_{\text{BFSK}} (\text{Sunde}) = (1/2)\text{BER}_{\text{ASK-2}}$$



Un sistema QPSK coherente (R_b) equivale a 2 sistemas BPSK en paralelo utilizando dos portadoras en cuadratura y cada canal a ($R_b/2$)

Canal en fase I: bits impar

Canal en cuadratura Q: bits par

Modulación QPSK coherente (IV)

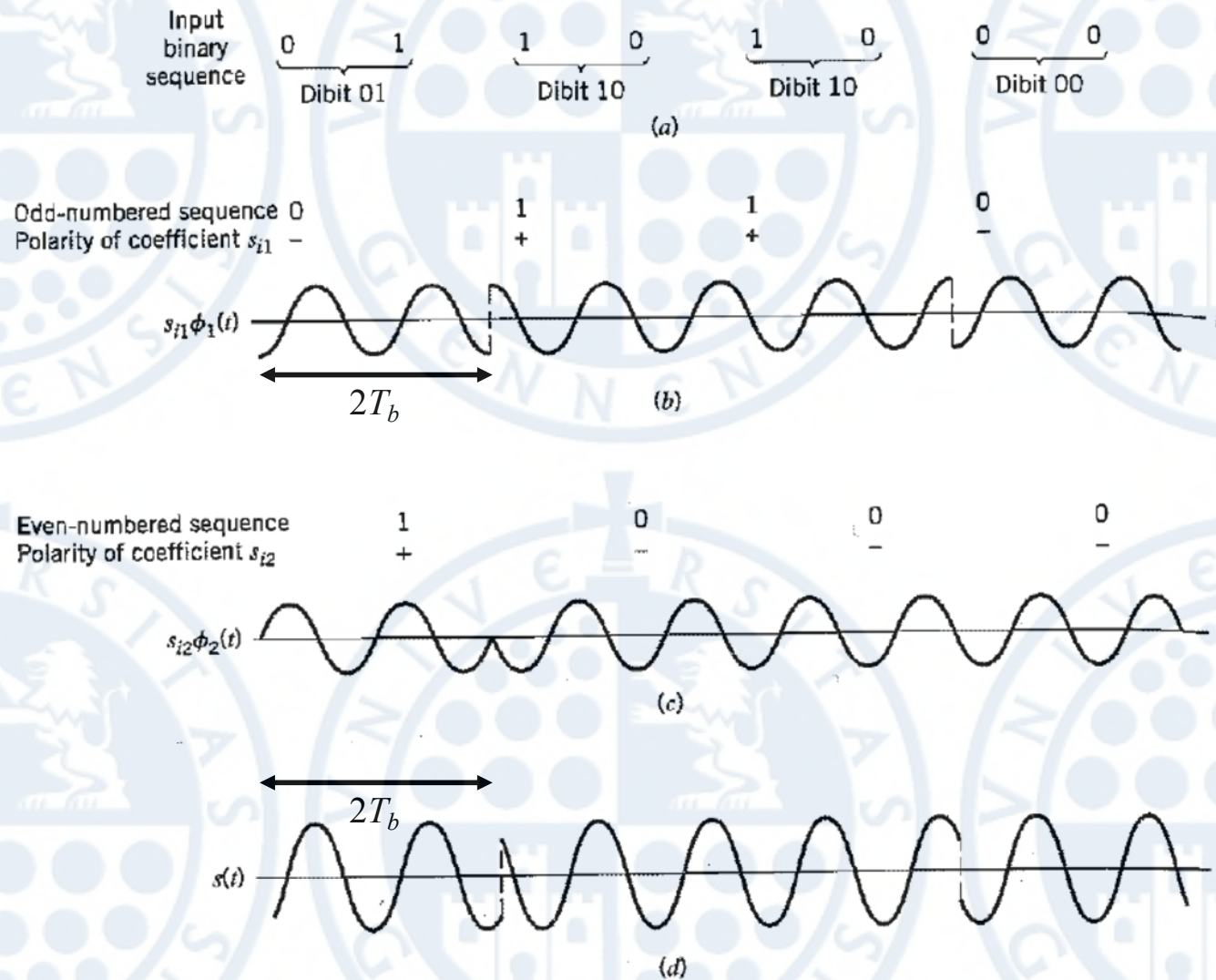
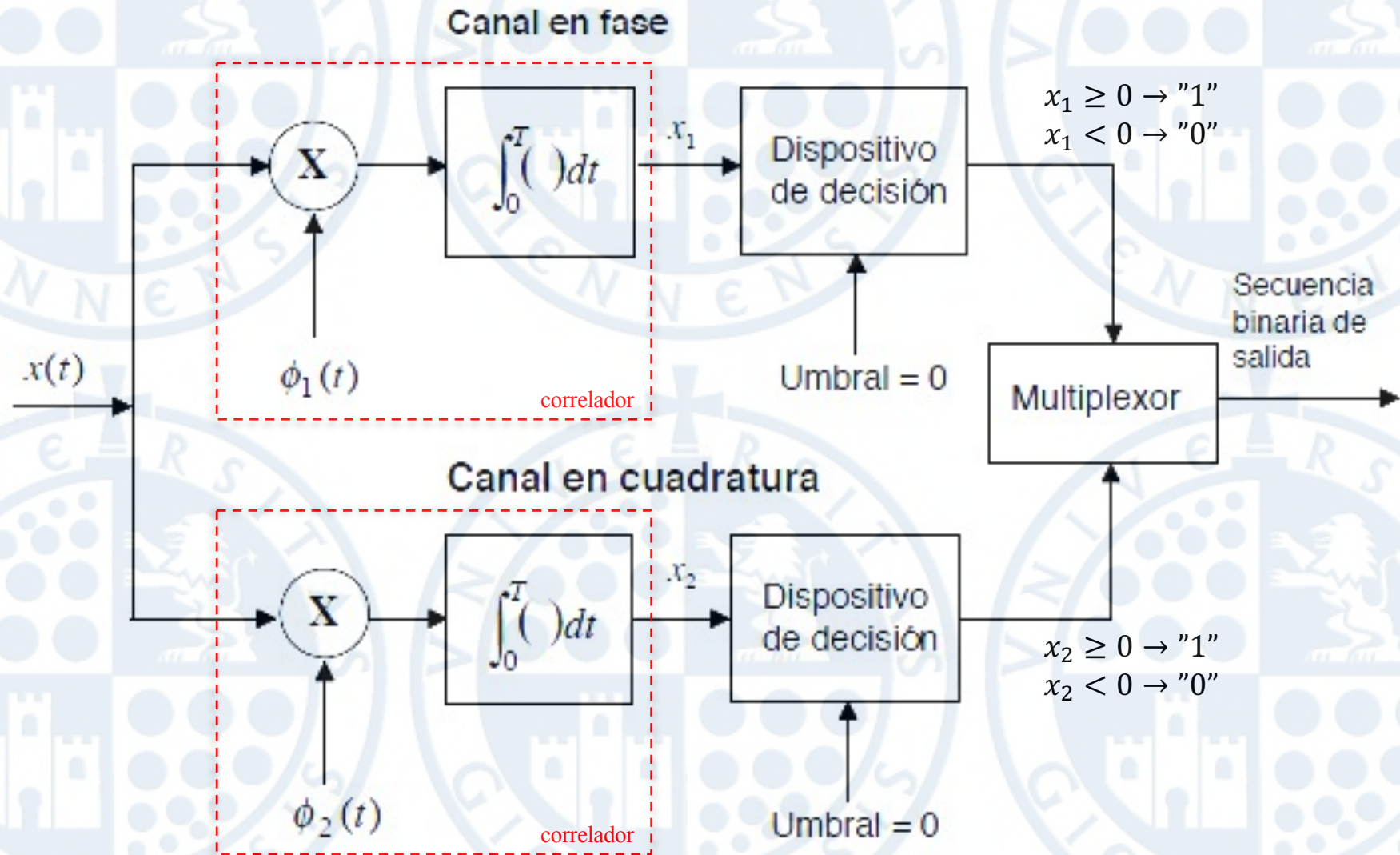


FIGURE 6.7 (a) Input binary sequence. (b) Odd-numbered bits of input sequence and associated binary PSK wave. (c) Even-numbered bits of input sequence and associated binary PSK wave. (d) QPSK waveform defined as $s(t) = s_{i1}\phi_1(t) + s_{i2}\phi_2(t)$.

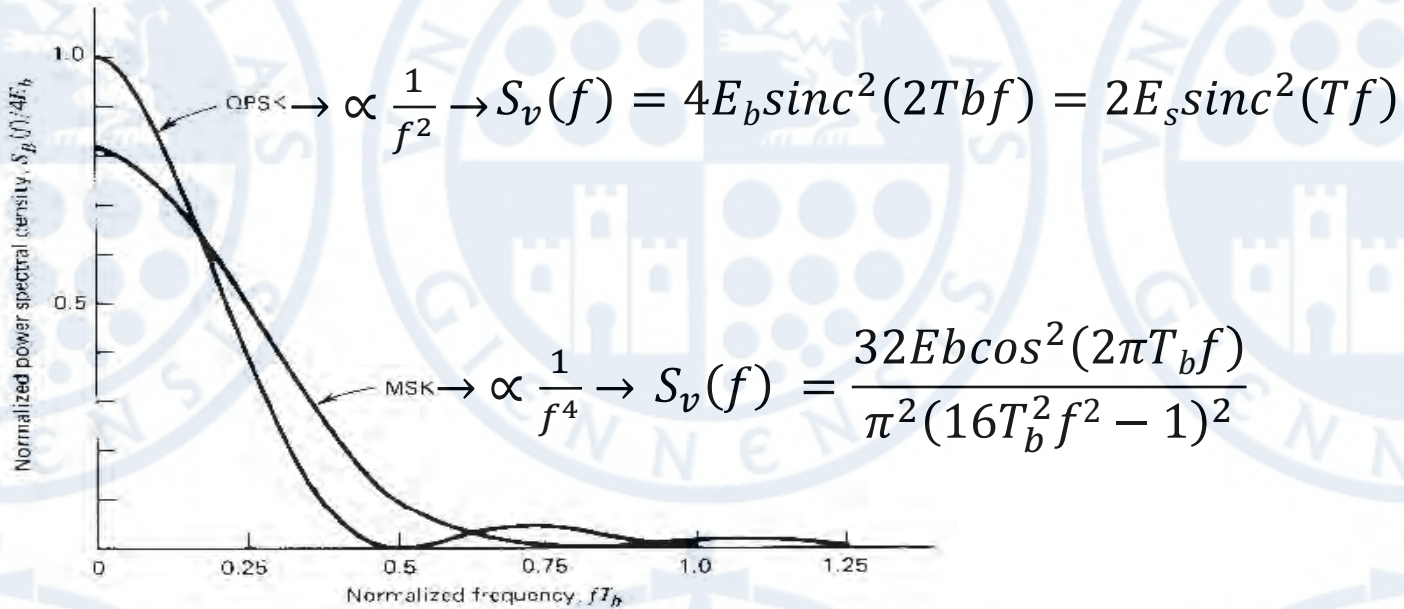
Modulación QPSK coherente (V)

Diagrama de bloques de un receptor QPSK coherente



A partir de la señal recibida QPSK, las dos señales BPSK transmitidas en paralelo pueden ser detectadas independiente debido a la ortogonalidad entre $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ generadas **localmente** en el receptor

Modulación QPSK coherente (VI)

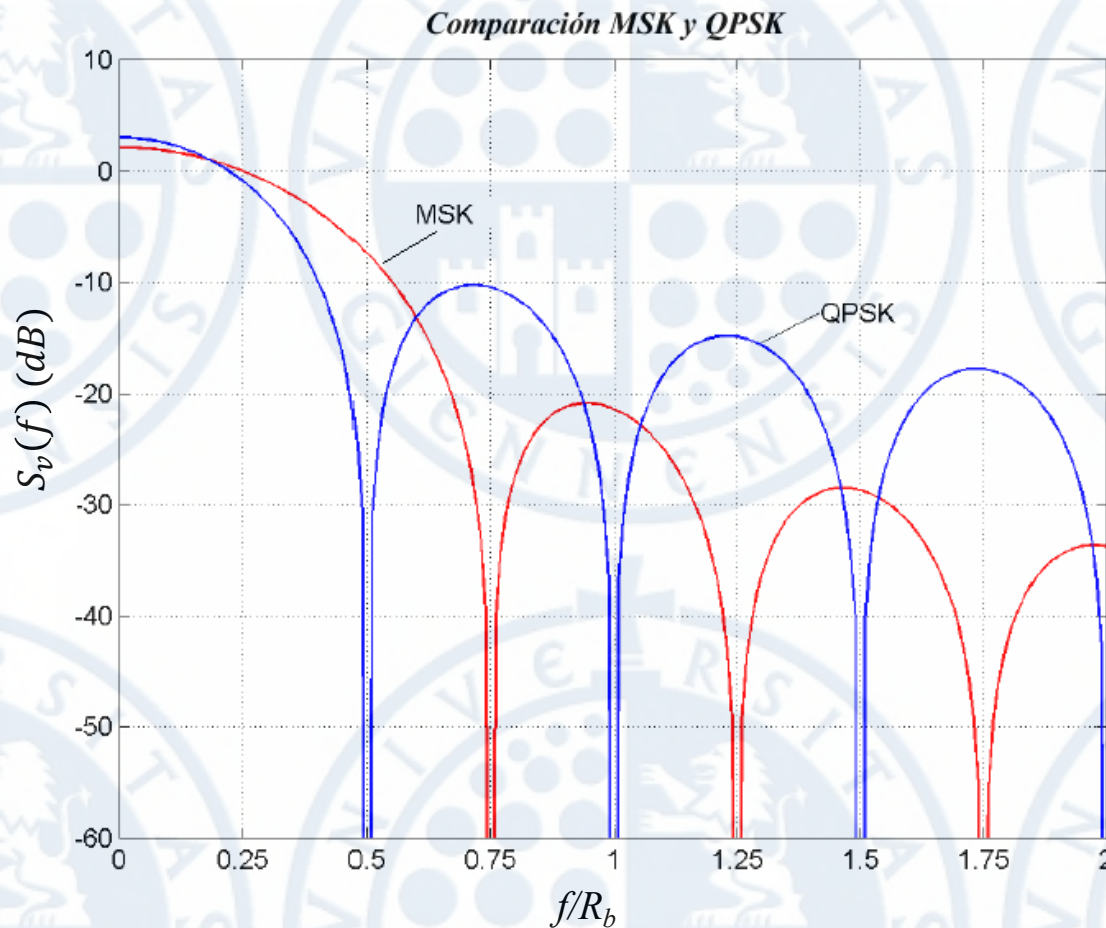


- El dibit implica transmitir en cada componente I , Q el pulso de conformación $+g(t)$ o $-g(t)$
- El canal en fase y cuadratura son estadísticamente **independientes** $\rightarrow S_v(f) = S_{v_I}(f) + S_{v_Q}(f)$

Pulsos conformadores $g(t)$ utilizados en modulaciones digitales (BPSK, BFSK, MSK y QPSK)

$$\left. \begin{aligned}
 g_{BPSK}(t) &= \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} & 0 \leq t \leq T_b \\ 0 & \text{resto} \end{cases} & g_{BFSK}(t) &= \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \sin\left(\frac{\pi t}{T_b}\right) & 0 \leq t \leq T_b \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \\
 g_{MSK_I}(t) &= \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos\left(\frac{\pi t}{2T_b}\right) & 0 \leq t \leq 2T_b \\ 0 & \text{resto} \end{cases} & g_{MSK_Q}(t) &= \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \sin\left(\frac{\pi t}{2T_b}\right) & 0 \leq t \leq 2T_b \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \\
 g_{QPSK}(t) &= \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_s}{T}} & 0 \leq t \leq 2T_b \\ 0 & \text{resto} \end{cases}
 \end{aligned}
 \right\}$$

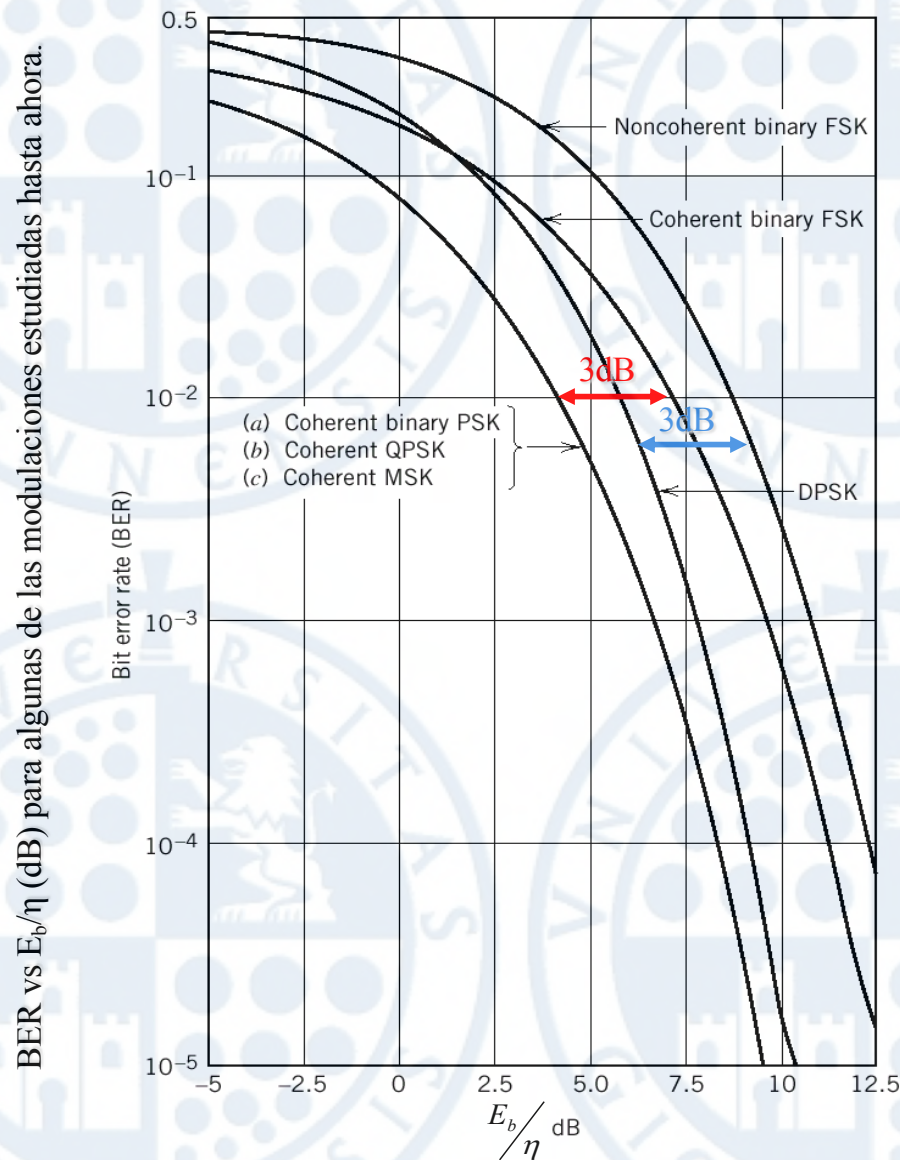
Modulación QPSK coherente (VII)



- Se observa que QPSK es más eficiente espectralmente comparada con MSK. Sin embargo, MSK muestra unos lóbulos secundarios menos interferentes \rightarrow mayor confinamiento espectral
- Eficiencia espectral QPSK:

$$B_{n-n} = \frac{2}{T} = \frac{2}{2T_b} = R_b \text{ Hz} \Rightarrow \rho_{QPSK} = \frac{R_b}{B_{n-n}} = 1 \text{ bits/s/Hz}$$

Estudio comparativo de la BER en las modulaciones BPSK, QPSK, MSK, DPSK, BFSK



OBSERVACIONES:

- BER se reduce si se aumenta la relación E_b/η .
- BPSK, QPSK y MSK proporcionan una BER inferior (codificación polar) que cualquiera de los otros sistemas comparados
- Los sistemas (BPSK coherente vs BFSK coherente) y (DPSK binario vs BFSK no coherente) utilizan una relación E_b/η que es 3dB menor para conseguir la misma BER.
- Para valores altos de la relación E_b/η , DPSK binaria y BFSK no coherente funcionan casi tan bien como las modulaciones BPSK coherente y BFSK coherente cuando se utiliza el mismo R_b y E_b/η .

Sistema de modulación	Tasa de error de bit (BER)
(a) PSK binaria coherente	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{E_b/\eta})$
QPSK coherente	
MSK coherente	$\frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{E_b/2\eta})$
(b) FSK binaria coherente	$\frac{1}{2} \exp(-E_b/\eta)$
(c) DPSK binaria	$\frac{1}{2} \exp(-E_b/2\eta)$
(d) FSK binaria no coherente	$\frac{1}{2} \exp(-E_b/2\eta)$

A continuación se presentan las modulaciones digitales M-arias (M-PSK, M-QAM y M-FSK), preferibles en canales paso-banda limitados en banda vs binarias

Modulación M-PSK (I)

En una modulación M-aria se envía una de M posibles señales: $s_1(t)$, $s_2(t)$, ..., $s_M(t)$ durante cada período de símbolo T

- $M = 2^k$, donde k es el número de bits que componen un símbolo
- La duración de símbolo $T = kT_b$, donde T_b es la duración de bit

En general, las técnicas de modulación M-arias son preferidas a las binarias cuando se pretende transmitir información digital en canales paso-banda limitados en banda ya que la mayoría de las modulaciones M-arias aprovechan el ancho de banda del canal de forma más eficiente.

M-PSK (M-Phase Shift Keying) codifica la información en la **fase de la portadora**

$$\theta_i = \frac{2\pi}{M}(i-1), \quad i = 1, 2, \dots, M$$

$$s_i(t)_{i=1,2,\dots,M} = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(2\pi f_c t + \theta_i) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos\left(2\pi f_c t + \frac{2\pi}{M}(i-1)\right), \quad 0 \leq t \leq T$$

$$s_1(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cdot \cos(2\pi f_c t + 0) \quad 0 \leq t \leq T$$

$$s_2(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cdot \cos\left(2\pi f_c t + \frac{2\pi}{M}\right) \quad 0 \leq t \leq T$$

...

$$s_M(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cdot \cos\left(2\pi f_c t + (M-1) \cdot \frac{2\pi}{M}\right) \quad 0 \leq t \leq T$$

Modulación M-PSK (II)

- Las funciones base $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ conforman una constelación bidimensional,

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_c t), \quad 0 \leq t \leq T \quad \phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_c t), \quad 0 \leq t \leq T$$

Los M puntos de mensaje s_i están equiespaciados sobre un círculo centrado en el origen y de radio igual a $\sqrt{E_s}$

$$s_1(t) = \sqrt{E_s} \cdot \phi_1(t)$$

$$s_2(t) = \sqrt{E_s} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{M}\right) \cdot \phi_1(t) - \sqrt{E_s} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{M}\right) \cdot \phi_2(t)$$

$$s_3(t) = \sqrt{E_s} \cdot \cos\left(\frac{4\pi}{M}\right) \cdot \phi_1(t) - \sqrt{E_s} \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{M}\right) \cdot \phi_2(t)$$

...

$$s_M(t) = \sqrt{E_s} \cdot \cos\left(\left(M-1\right)\frac{2\pi}{M}\right) \cdot \phi_1(t) - \sqrt{E_s} \cdot \sin\left(\left(M-1\right)\frac{2\pi}{M}\right) \cdot \phi_2(t)$$

Considerando $M=8$, se obtienen los siguientes puntos s_i que representan a las señales $s_i(t)$ en el diagrama de señal,

$$s_1 = \left[+\sqrt{E_s}, 0 \right]$$

$$s_2 = \left[+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{E_s}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{E_s} \right]$$

$$s_3 = \left[0, -\sqrt{E_s} \right]$$

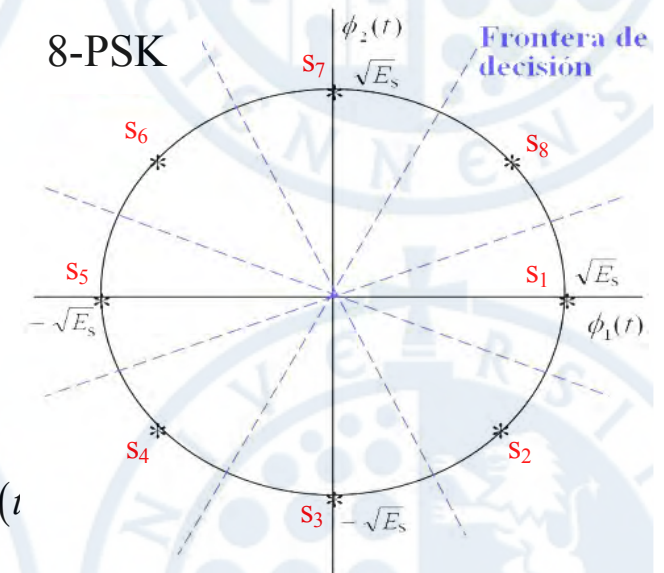
$$s_4 = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{E_s}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{E_s} \right]$$

$$s_5 = \left[-\sqrt{E_s}, 0 \right]$$

$$s_6 = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{E_s}, +\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{E_s} \right]$$

$$s_7 = \left[0, +\sqrt{E_s} \right]$$

$$s_8 = \left[+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{E_s}, +\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{E_s} \right]$$

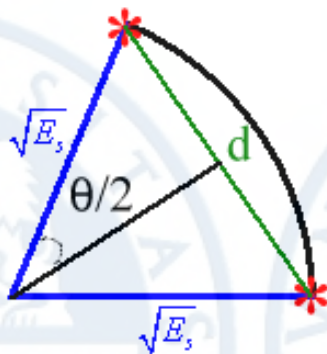


Modulación M-PSK (III)

- Regiones de decisión sectoriales con ángulo

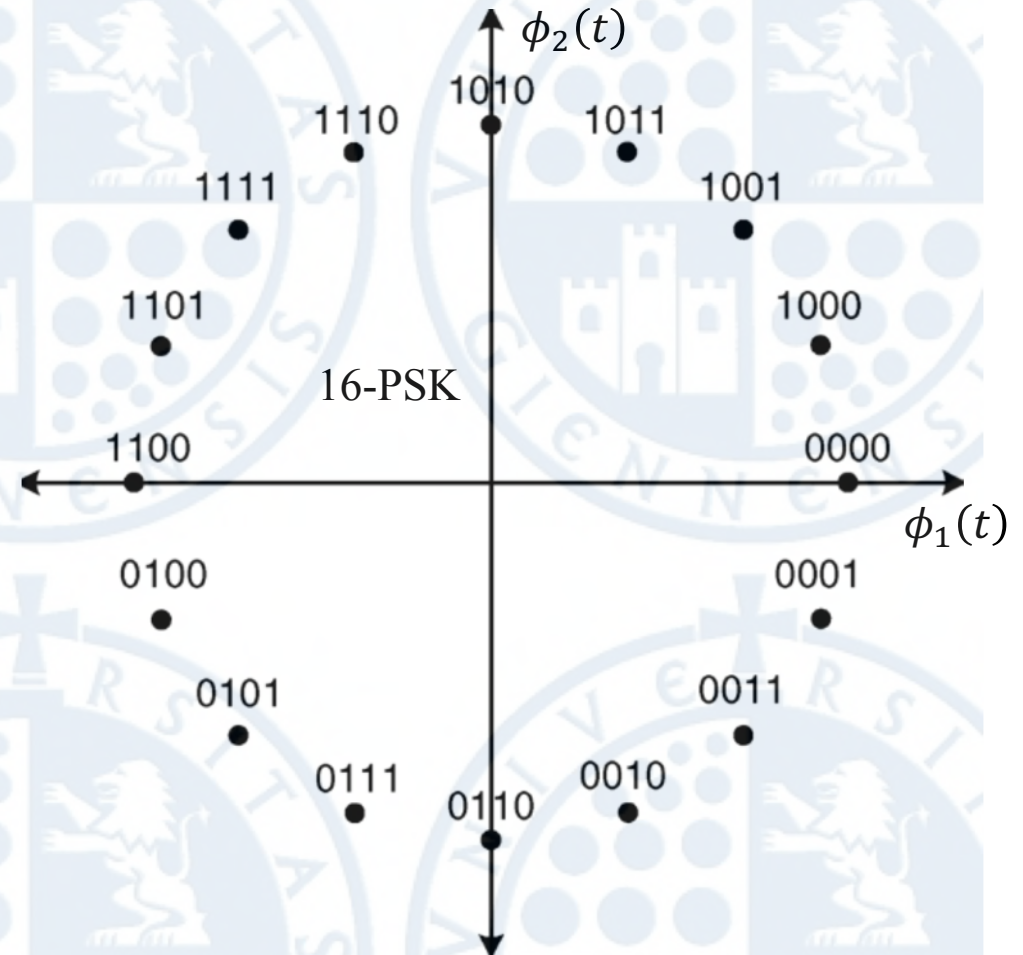
$$\theta = \frac{2\pi}{M}$$

- La distancia entre los dos símbolos más próximos se obtiene de:



$$\frac{d}{2} = \sqrt{E_s} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$d = 2 \cdot \sqrt{E_s} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)$$



En un sistema M-PSK las componentes en fase y cuadratura se relacionan de tal forma que la envolvente de la señal modulada es constante. Esta restricción implica una **constelación circular**

Si se elimina esta restricción y se permite independencia de la componente en fase y cuadratura aparece M-QAM (variación de la amplitud y fase de la portadora)

Modulación M-PSK (IV)

- Se puede demostrar mediante razonamiento geométricos que la probabilidad de error (**receptor óptimo**) para valores de M mayores que 4 se puede acotar por:

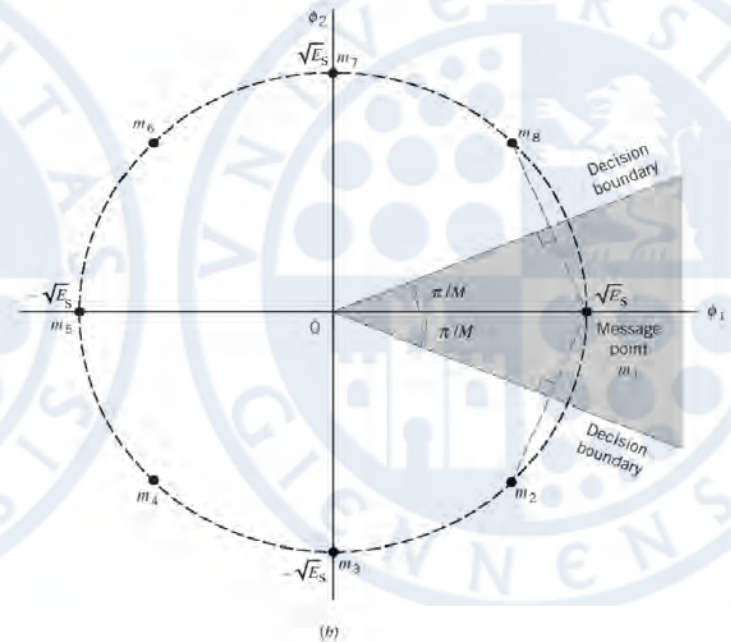
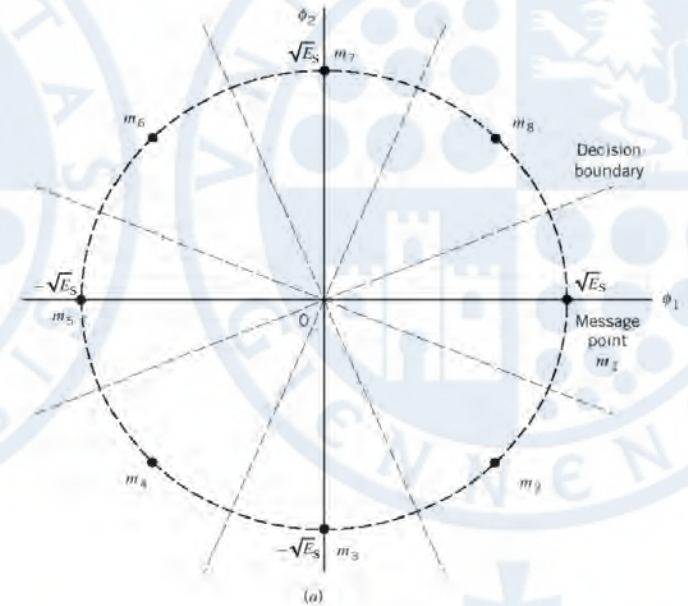
$$Q\left(\frac{d/2}{\sigma}\right) < P_e < 2 \cdot Q\left(\frac{d/2}{\sigma}\right) \quad M \geq 4$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d/2}{\sqrt{2}\sigma}\right) < P_e < \operatorname{erfc}\left(\frac{d/2}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\eta}{2}}$$

$$\frac{d}{2} = \sqrt{E_s} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)$$

Distancia a cada una de las "fronteras" de la región de decisión correspondiente a cada símbolo



Modulación M-PSK (V)

- Se puede demostrar mediante razonamiento geométricos que la probabilidad de error (**receptor óptimo**) para $M > 4$ se puede acotar por:

$$Q\left(\frac{d/2}{\sigma}\right) < P_e < 2 \cdot Q\left(\frac{d/2}{\sigma}\right) \quad M \geq 4$$

- En la práctica se considera el caso peor y se toma como expresión aproximada el límite superior

$$P_e \approx 2 \cdot Q\left(\frac{d/2}{\sigma}\right) = \operatorname{erfc}\left(\frac{d/2}{\sqrt{2} \cdot \sigma}\right)$$

$$P_e \approx 2 \cdot Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{\eta}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right) = \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_s}{\eta}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right) \quad M \geq 4$$

Hay dos “fronteras” ambas a distancia $d/2$ del símbolo

- Si cada símbolo se codifica utilizando codificación Gray,

$$\xrightarrow{\text{Gray}} \text{BER} \approx \frac{P_e}{\log_2 M}$$

$$\bullet \text{ Nota: } T = T_b \cdot \log_2(M) \quad E_s = E_b \cdot \log_2(M)$$

Modulación M-PSK (VI)

$$BER \approx \frac{2}{\log_2(M)} \cdot Q \left(\sqrt{\frac{2E_b \cdot \log_2(M)}{\eta}} \sin \left(\frac{\pi}{M} \right) \right) \quad M \geq 4$$

$$BER \approx \frac{1}{\log_2(M)} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b \cdot \log_2(M)}{\eta}} \sin \left(\frac{\pi}{M} \right) \right) \quad M \geq 4$$

- Es evidente que para **M-PSK** no se puede utilizar un detector no coherente, por tanto el **demodulador** será **siempre coherente**

- Método A: M correladores con cada una de las fases distintas seleccionando como símbolo aquel asociado a la salida máxima

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2 \cdot E_s}{T}} \cdot \cos \left(2\pi f_c t + \frac{2\pi}{M}(i-1) \right), \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, M \\ 0 \leq t \leq T \end{array}$$

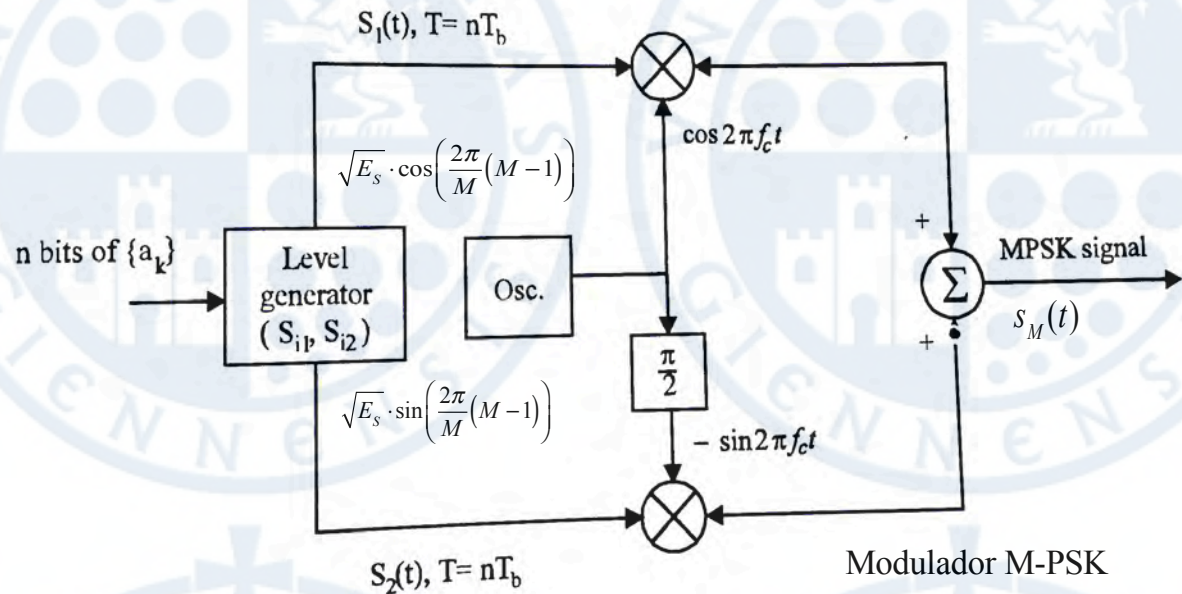
- **Método B**: 2 correladores en fase y cuadratura, se hallan las coordenadas (r_{1k}, r_{2k}) de la constelación y la fase asociada $\hat{\theta}_k$

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_c t), \quad 0 \leq t \leq T \quad \phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_c t), \quad 0 \leq t \leq T$$

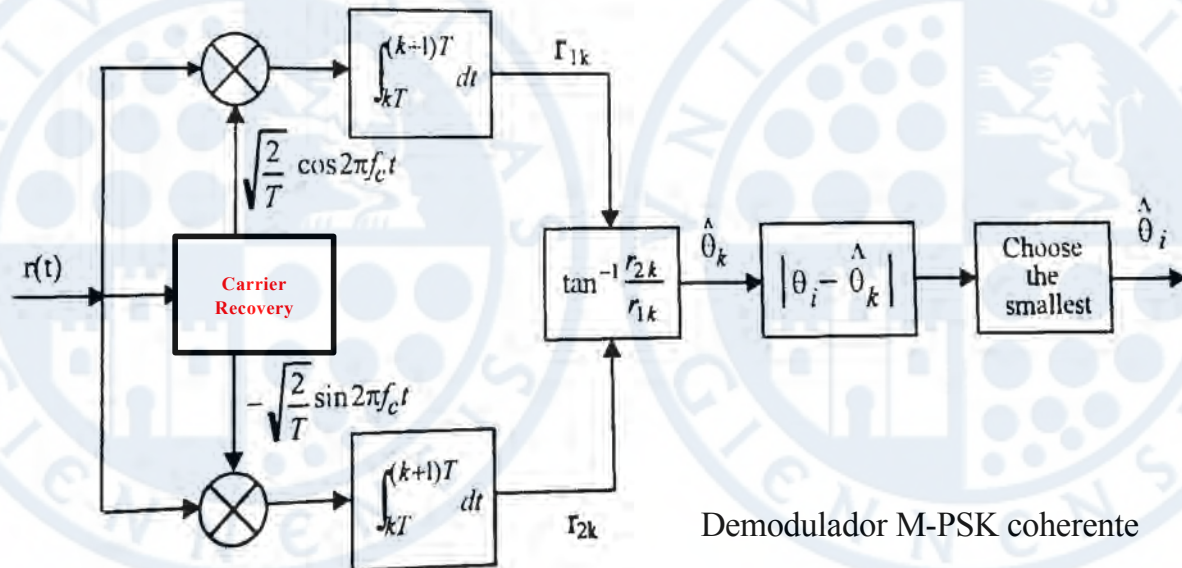
- Si se quiere utilizar detectores no coherentes hemos de utilizar **M-DPSK** (PSK diferencial M-aria) (ver al final de M-PSK)

Modulación M-PSK (VII)

En la **detección coherente**, el receptor necesita generar una **portadora local** f_c (oscilador) de la misma frecuencia y **sincronizada en fase** con la portadora de la señal PSK recibida utilizando algún circuito CR (carrier recovery)

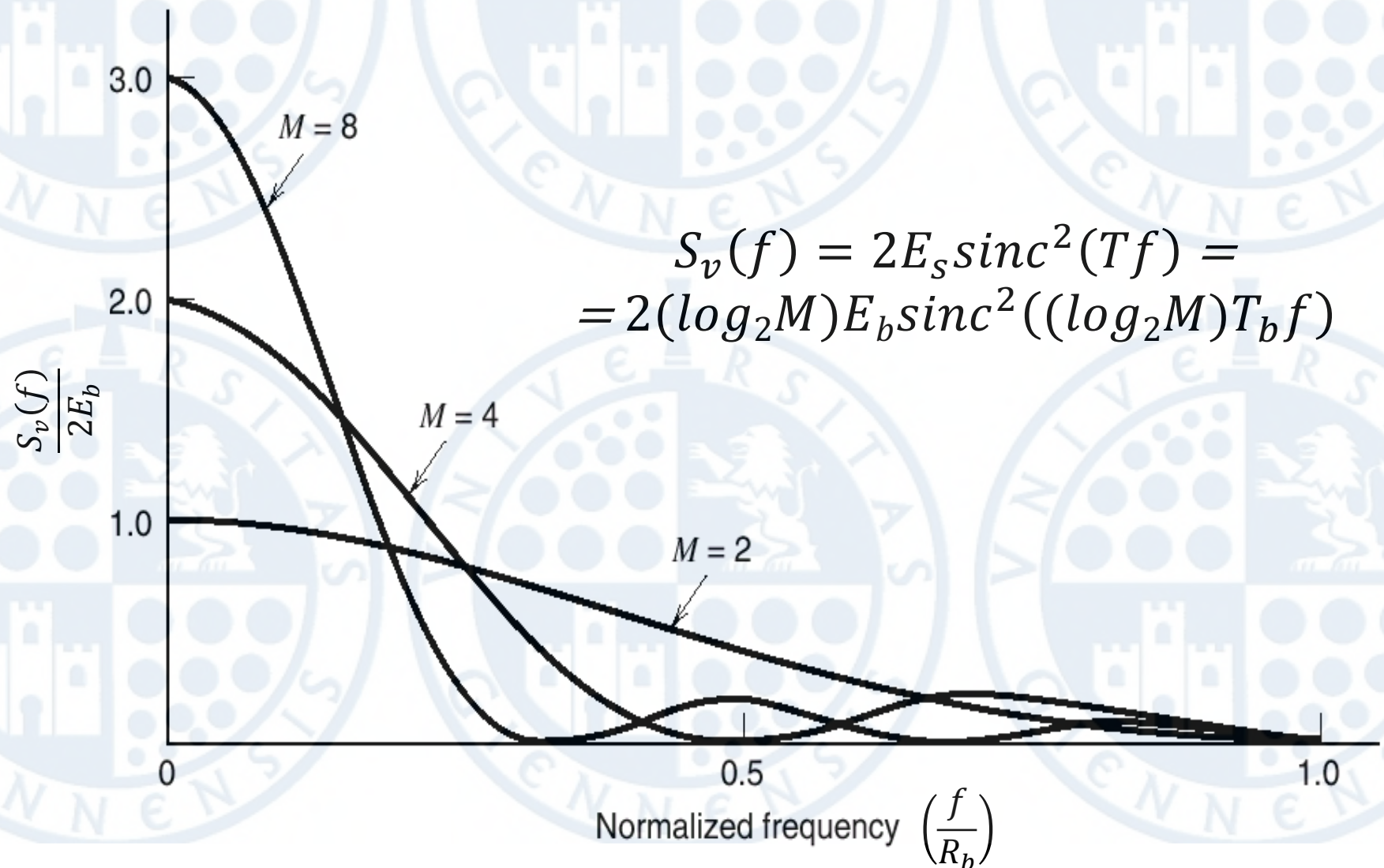


La **detección no coherente** implica utilizar M-DPSK (PSK diferencial). Esta modulación, **con memoria**, utiliza $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ de la misma frecuencia que en transmisión pero no necesitan estar sincronizados en fase con la portadora de la señal PSK recibida a cambio de degradar sus prestaciones mediante una mayor probabilidad de error.

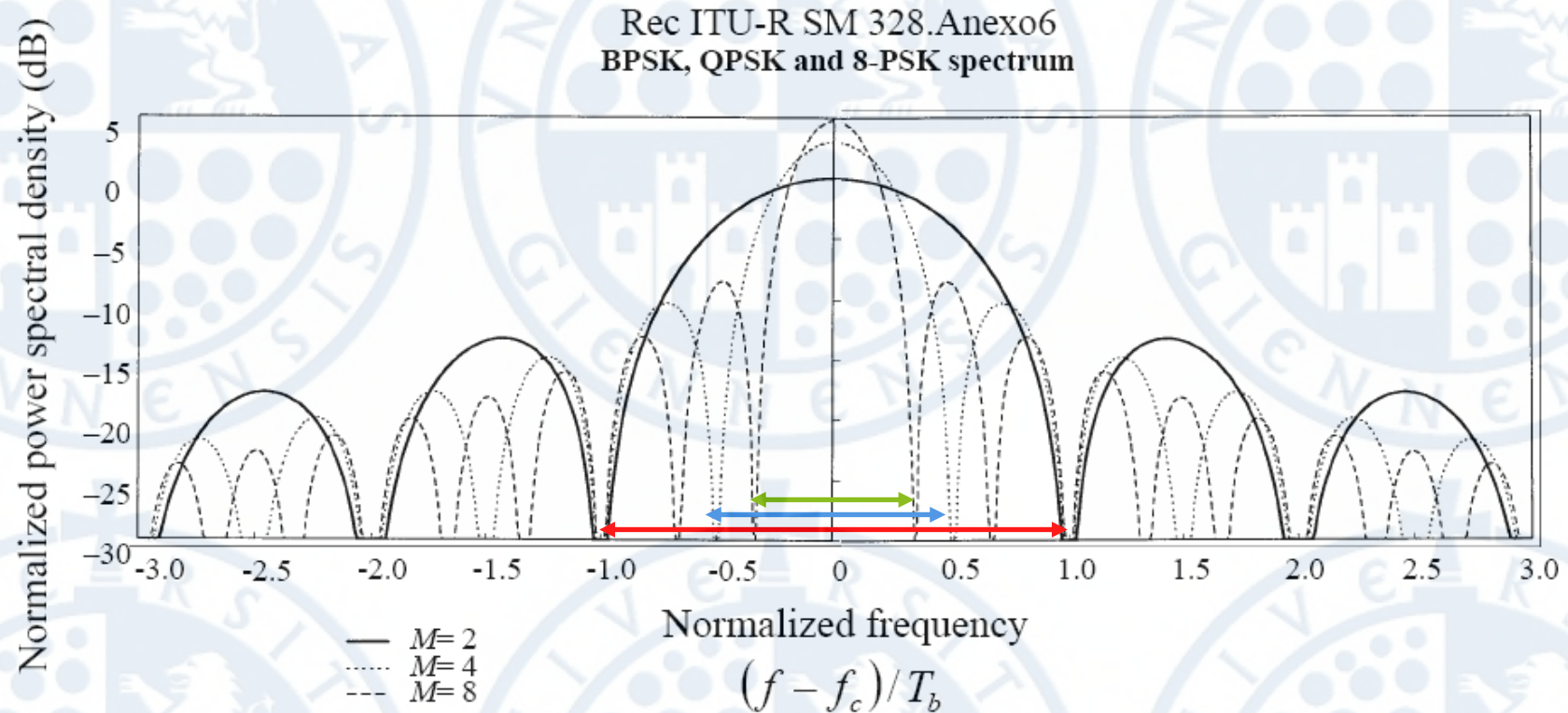


Modulación M-PSK (VIII)

- Para M-PSK la densidad espectral de potencia de la envolvente compleja $S_v(f)$ (equivalente paso-bajo),



Modulación M-PSK (IX)



- Para las modulaciones BPSK, QPSK y 8-PSK los anchos de banda nulo a nulo son:

$$B_{n-n} \Big|_{M=2} = \frac{2}{T_b} = 2R_b$$

$$B_{n-n} \Big|_{M=4} = \frac{1}{T_b} = R_b$$

$$B_{n-n} \Big|_{M=8} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{T_b} = \frac{2}{3} R_b = 0.66R_b$$

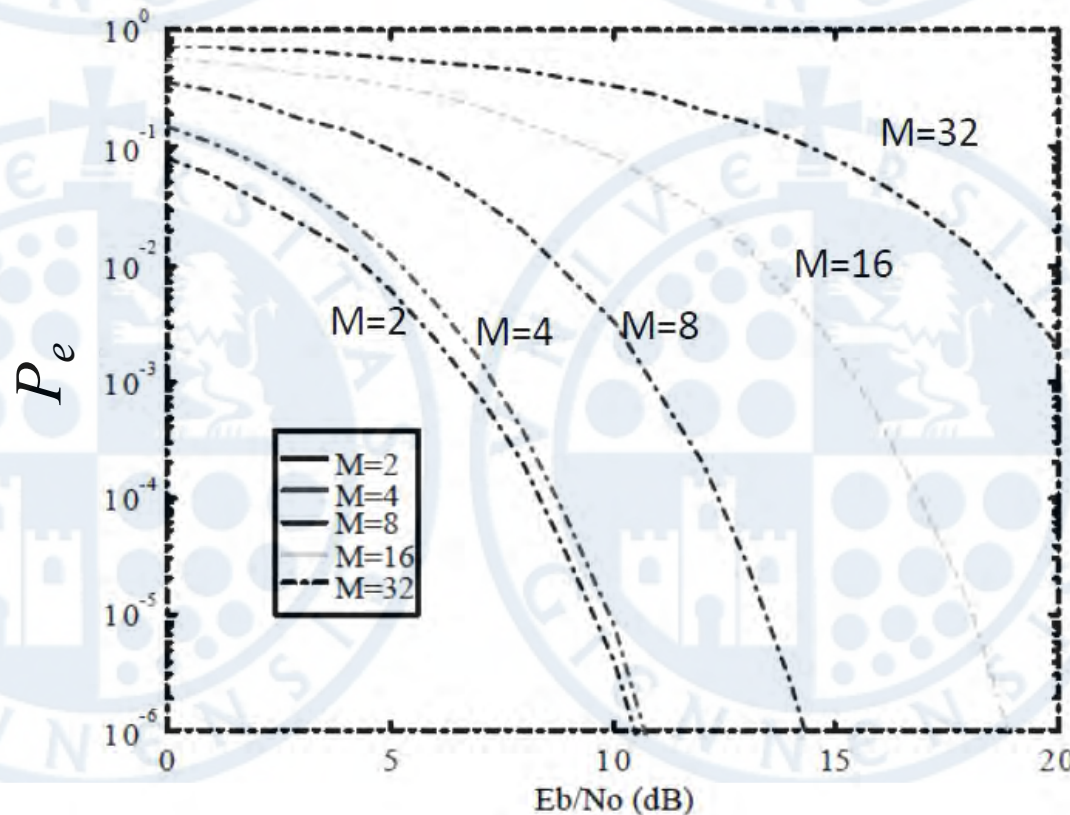
Modulación M-PSK (X)

$$B_{n-n}^{M-PSK} = \frac{2}{T} = \frac{2}{\log_2(M) \cdot T_b} = \frac{2R_b}{\log_2(M)} \text{ Hz}$$

$$\rho_{M-PSK} = \frac{\log_2(M)}{2} \text{ bits/s/Hz}$$

M	2	4	8	16	32	64
ρ	0.5	1	1.5	2	2.5	3

M-PSK permite obtener una alta eficiencia espectral a costa de aumentar la BER



$\uparrow M \Rightarrow \downarrow B_{n-n}$
 $\uparrow M \Rightarrow \uparrow \rho$
 $\uparrow M \Rightarrow \uparrow BER$

Modulación M-PSK (XI)

Comparación de los requisitos de potencia media y ancho de banda en M-PSK para $P_e = 10^{-4}$

Valor de M	$\frac{(\text{Ancho de banda})_{M\text{-ario}}}{(\text{Ancho de banda})_{\text{Binario}}}$	$\frac{(\text{Potencia media})_{M\text{-ario}}}{(\text{Potencia media})_{\text{Binario}}}$
4	0.5	0.34 dB
8	0.333	3.91 dB
16	0.25	8.52 dB
32	0.2	13.52 dB

$M = 4$ (QPSK): óptimo (mejor compactación espectral y menor aumento de potencia)

- UMTS (3G): downlink (despreading and demodulation using RC $\rightarrow \alpha = 0.22$)
- LTE (4G): downlink
- 802.11a (Wifi): 12-18 Mbps (Digital hierarchy II)
- DAB (Digital Audio Broadcasting)
- DVB-T (Digital Video Broadcasting-Terrestrial)

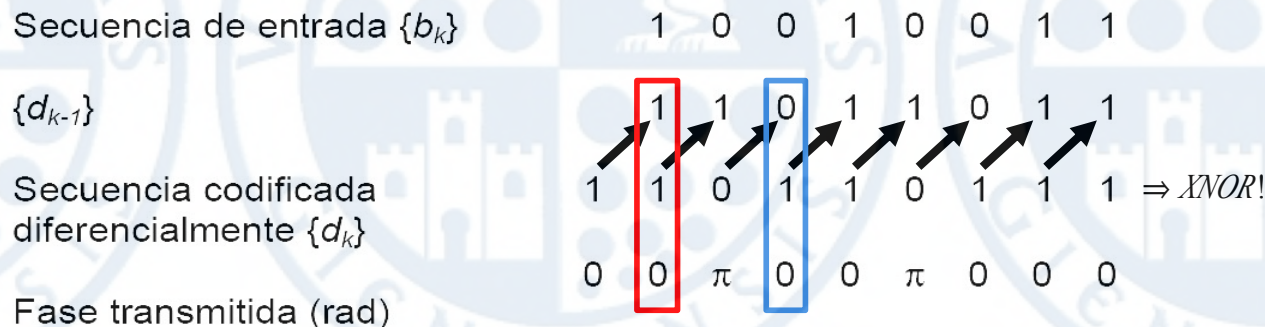
$M > 8$: $\uparrow\uparrow$ potencia media, $\downarrow\downarrow$ reducción ancho de banda, $\uparrow\uparrow$ complejidad receptores

Manipulación por desplazamiento diferencial de fase (DPSK) binaria (I)

- **DPSK** (Differential Phase Shift Keying) es una modulación ortogonal **no coherente**: no utiliza fases absolutas sino que codifica **la diferencia de fase entre símbolos consecutivos** a cambio de una degradación de las prestaciones $\Rightarrow \uparrow P_e$. En el caso binario DBPSK,
 - Si el bit que se recibe b_k es igual que el bit anterior codificado diferencialmente d_{k-1} , entonces la salida $d_k = 1$. En caso de ser distintos, $d_k = 0$ (adecuado si las variaciones de fase del canal son lentas en relación al periodo de bit).
 - La transmisión '1' ($d_k = 1$) no cambia la fase de la portadora mientras que la transmisión de '0' ($d_k = 0$) cambia la fase de la portadora 180°

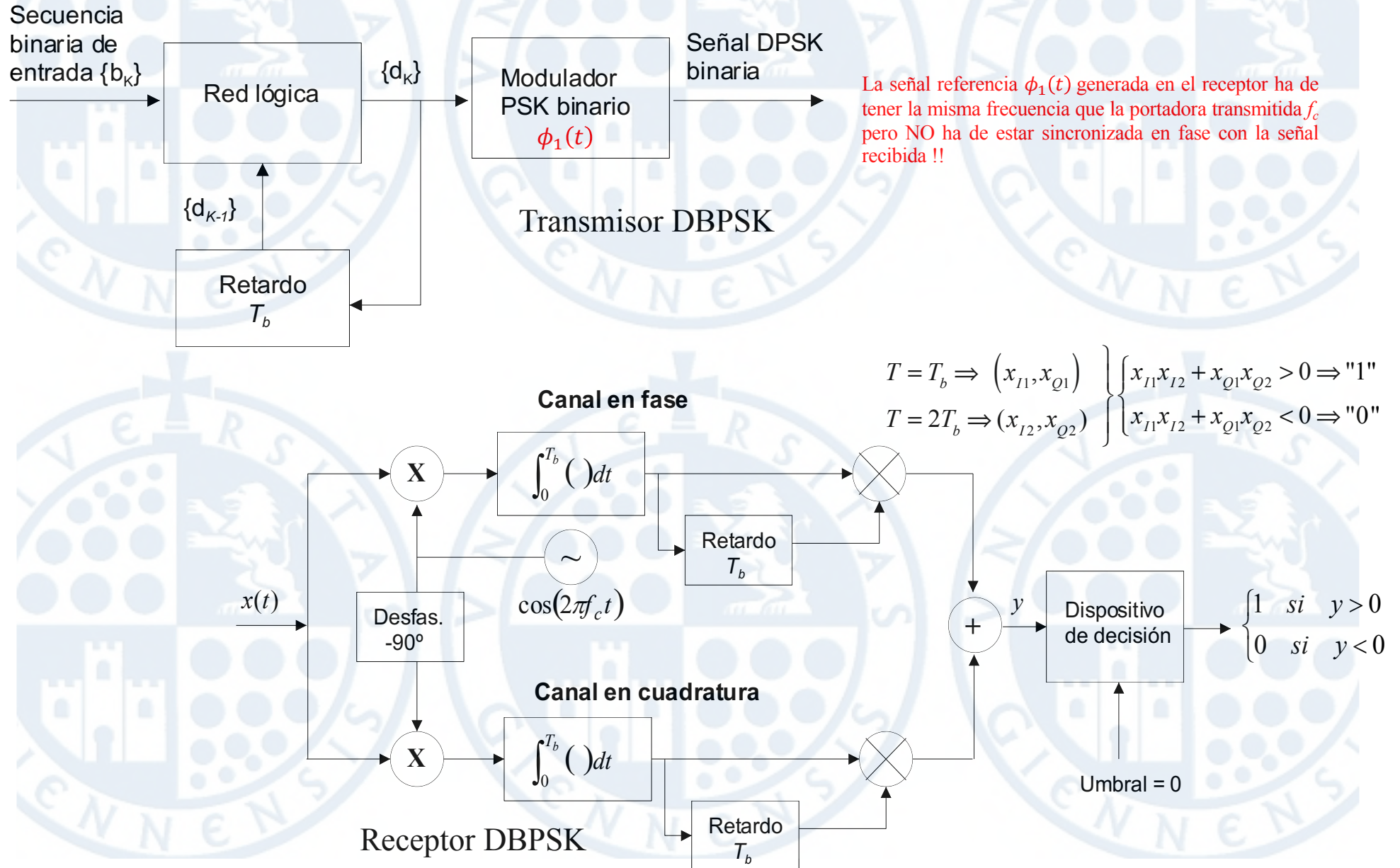
$$T = 2 \cdot T_b \quad E_s = 2 \cdot E_b$$

$$s_1(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{E_b}{2T_b}} \cos(2\pi f_c t) & 0 \leq t \leq T_b \\ \sqrt{\frac{E_b}{2T_b}} \cos(2\pi f_c t) & T_b \leq t \leq 2T_b \end{cases} \quad s_0(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{E_b}{2T_b}} \cos(2\pi f_c t) & 0 \leq t \leq T_b \\ \sqrt{\frac{E_b}{2T_b}} \cos(2\pi f_c t + \pi) = -\sqrt{\frac{E_b}{2T_b}} \cos(2\pi f_c t) & T_b \leq t \leq 2T_b \end{cases}$$



Proceso de generación de una señal DPSK

Manipulación por desplazamiento diferencial de fase (DPSK) binaria (II)

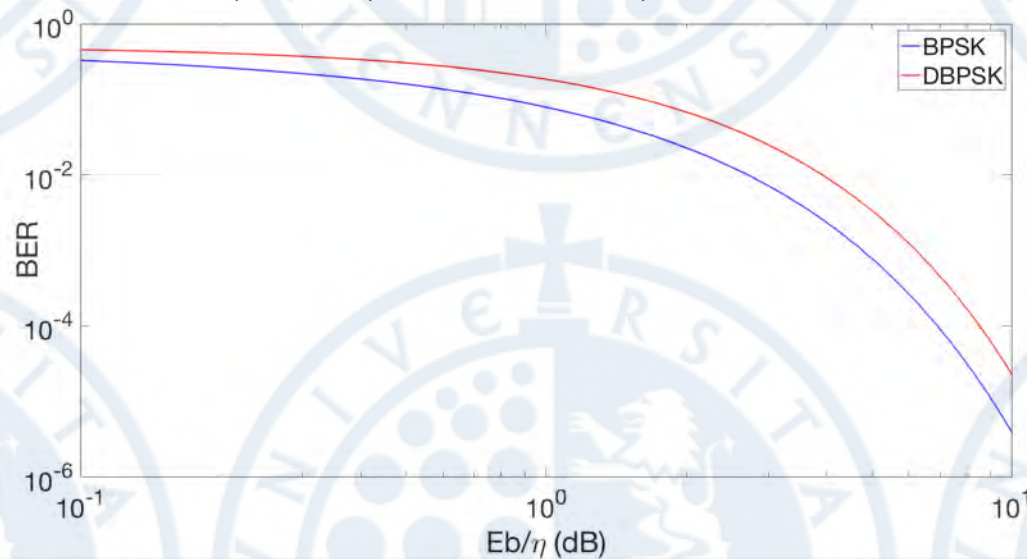


Manipulación por desplazamiento diferencial de fase (DPSK) binaria (III)

- La probabilidad de error para sistemas M-DPSK viene dada

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-\left(\frac{E_b}{\eta}\right)}, \quad M = 2$$

$$P_e \approx 2 \cdot Q\left(\sqrt{\frac{4E_s}{\eta}} \sin\left(\frac{\pi}{2M}\right)\right) = \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{2E_s}{\eta}} \sin\left(\frac{\pi}{2M}\right)\right) \quad M \geq 4$$



- Para obtener la misma probabilidad de error P_e , el sistema M-DPSK debe utilizar una relación E_b/η que sea k veces mayor que la utilizada en M-PSK,

$$k(M) = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)}{2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2M}\right)}, \quad M \geq 4$$

p.e., $k(4) = 1.7$ indica que 4-DPSK necesita 2.3dB más que el sistema $QPSK$ coherente para obtener el mismo rendimiento en probabilidad de error.

Modulación M-QAM (I)

En la modulación en amplitud en cuadratura M-QAM (Quadrature Amplitude Modulation), la información está codificada en la **amplitud** y **fase de la portadora**.

- Ortogonalidad: transmisión de dos canales independientes ortogonales ($\phi_1(t)$ en el canal I , $\phi_2(t)$ en el canal Q) en el mismo ancho de banda (única portadora f_c)

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_0}{T}} \cdot a_i \cos(2\pi f_c t) + \sqrt{\frac{2E_0}{T}} \cdot b_i \sin(2\pi f_c t), \quad i = 1, 2, \dots, M$$

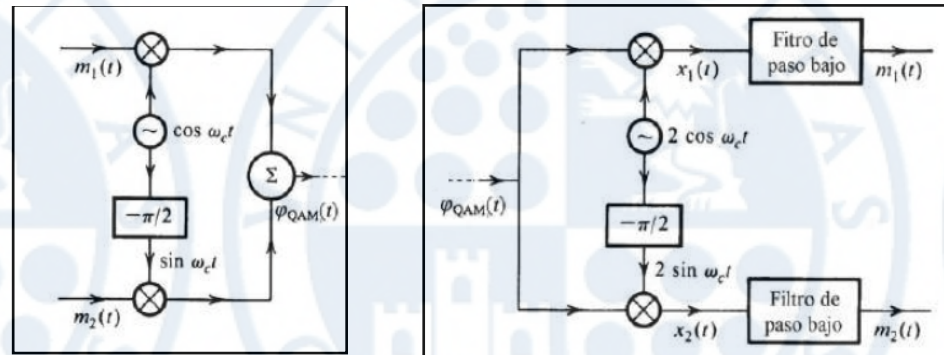
$$a_i = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots\} \in Z$$

$$b_i = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots\} \in Z$$

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(2\pi f_c t), \quad 0 \leq t \leq T \quad s_i(t) = a_i \sqrt{E_0} \phi_1(t) + b_i \sqrt{E_0} \phi_2(t)$$

$$\phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi f_c t), \quad 0 \leq t \leq T \quad \mathbf{s}_i = \left[a_i \sqrt{E_0}, b_i \sqrt{E_0} \right]$$

E_0 : energía de la señal con menor amplitud



- Suponer señales sinusoidales de entrada

$$x_1(t) = 2\phi_{QAM}(t) \cdot \cos \omega_c t = 2[m_1(t) \cdot \cos \omega_c t + m_2(t) \cdot \text{sen} \omega_c t] \cdot \cos \omega_c t = m_1(t) + m_1(t) \cdot \cos 2\omega_c t + m_2(t) \cdot \text{sen} 2\omega_c t$$

$$x_2(t) = 2\phi_{QAM}(t) \cdot \text{sen} \omega_c t = 2[m_1(t) \cdot \cos \omega_c t + m_2(t) \cdot \text{sen} \omega_c t] \cdot \text{sen} \omega_c t = m_2(t) + m_1(t) \cdot \text{sen} 2\omega_c t - m_2(t) \cdot \cos 2\omega_c t$$

$$m_1(t) = A \cdot \cos \omega_{m1} t$$

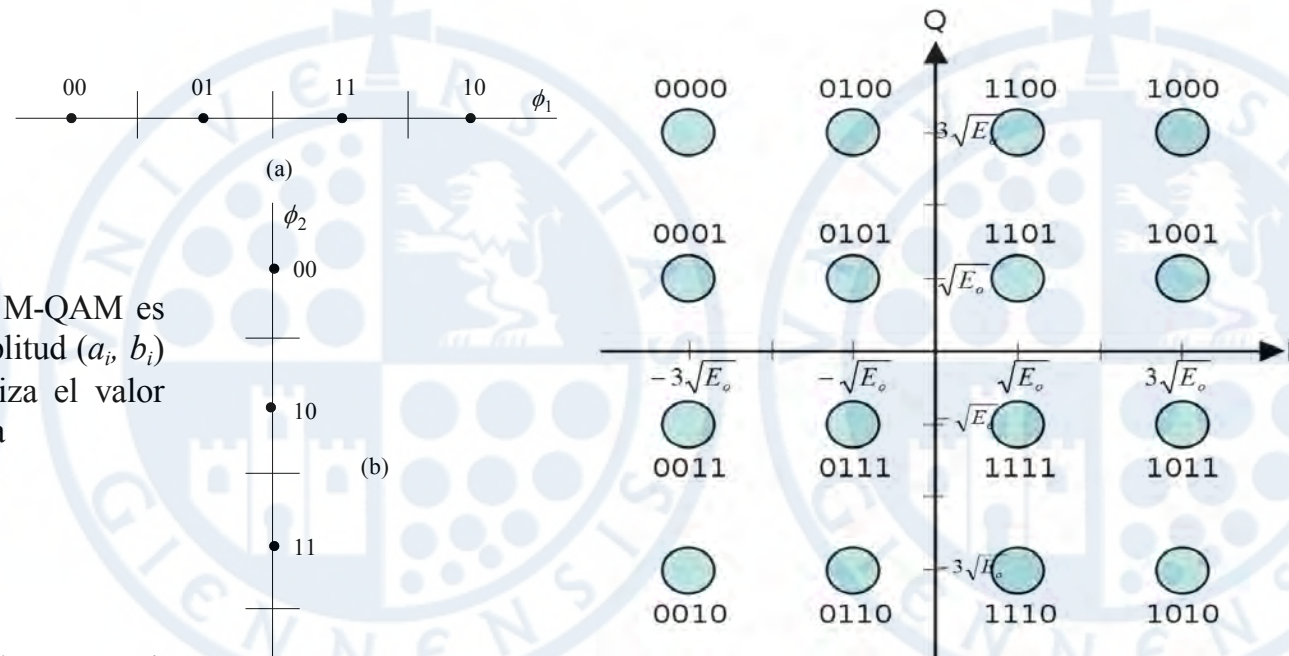
$$m_2(t) = A \cdot \cos \omega_{m2} t$$

Modulación M-QAM (II)

- Si se codifican los símbolos más próximos para diferir en un bit (código *Gray*), se minimiza la P_e

$$P_e \approx 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q \left(\sqrt{\frac{3E_{av}}{(M-1)\eta}} \right) \approx 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{3E_{av}}{2(M-1)\eta}} \right) \stackrel{\text{cod. Gray}}{\Rightarrow} BER \approx \frac{P_e}{\log_2(M)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BER \approx \frac{4}{\log_2(M)} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q \left(\sqrt{\frac{3E_{av}}{(M-1)\eta}} \right) \approx \frac{2}{\log_2(M)} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{3E_{av}}{2(M-1)\eta}} \right), \quad E_{av} = \frac{2(M-1)E_0}{3}$$



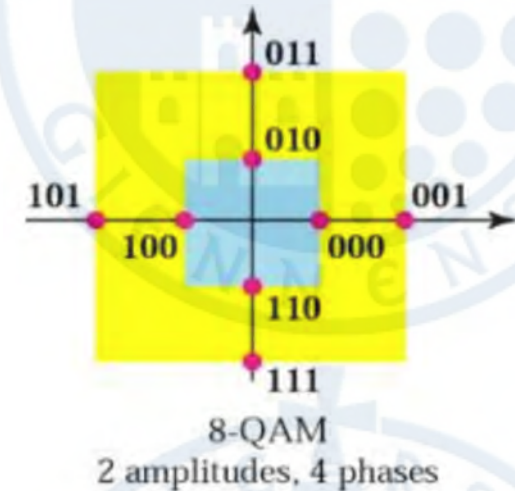
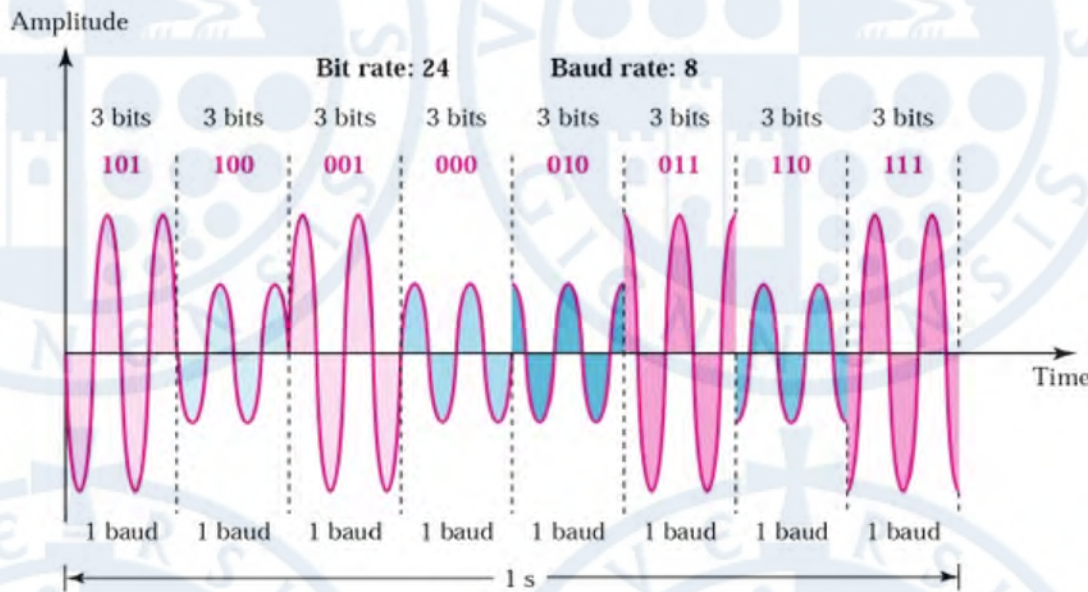
Debido a que la energía de la señal M-QAM es variable al depender del valor de amplitud (a_i , b_i) utilizado en el símbolo $s_i(t)$, se utiliza el valor promedio E_{av} de la energía transmitida

Gray coded 16-QAM

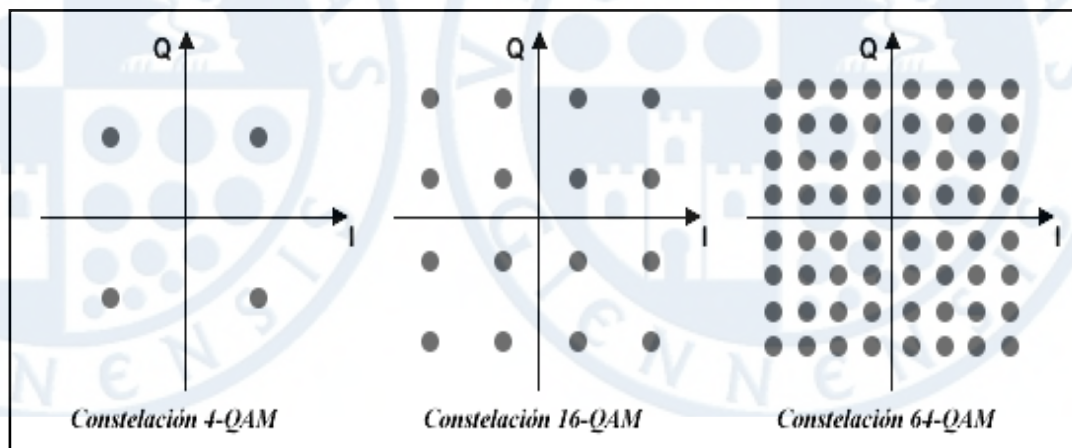
Diagrama del espacio-símbolo 16-QAM (los puntos de mensaje se identifican mediante códigos de Gray de 4 bits)

Modulación M-QAM (III)

➤ Esquema 8-QAM



▪ Mapeado de símbolos: $c_k = a_k + jb_k$ en constelaciones QAM



Constelaciones **rectangulares**:
símbolos compuestos por un número
par de bits, p.e: 16-QAM ($k=4$)

Constelaciones **estrella**:
símbolos compuestos por un número
impar de bits, p.e: 8-QAM ($k=3$)

Modulación M-QAM (IV)

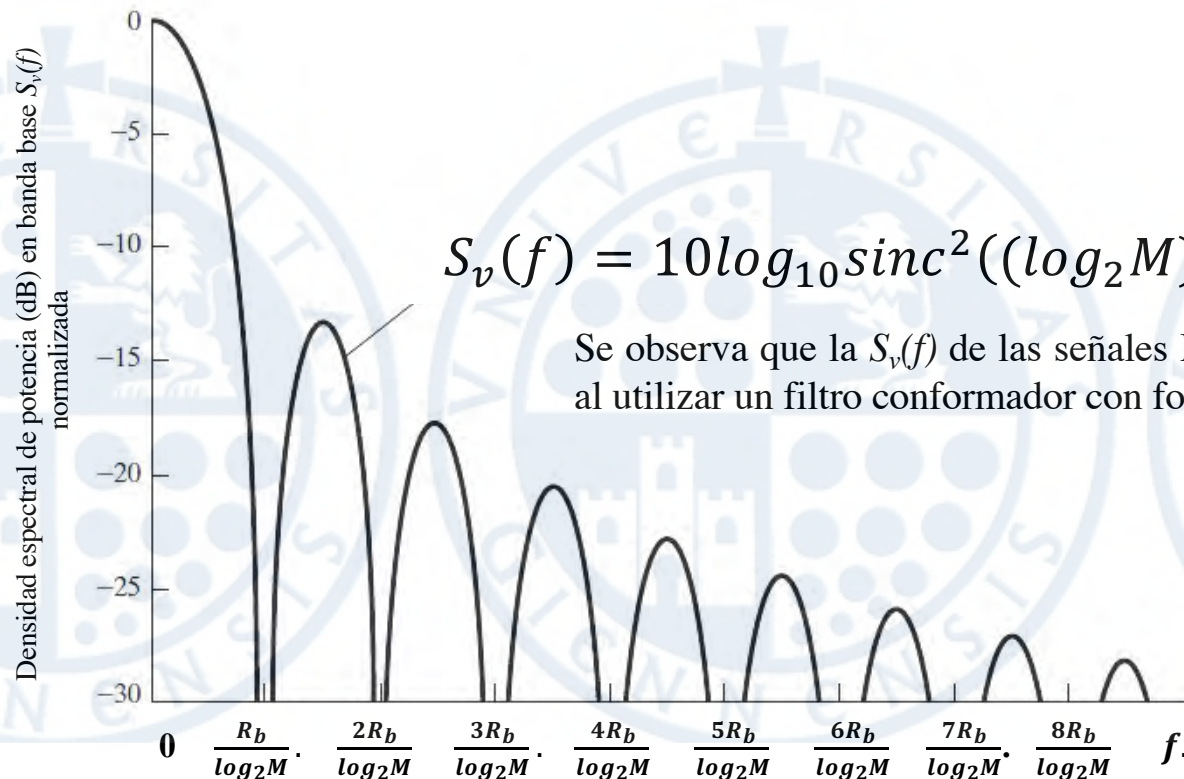
- El espectro M-QAM es similar a M-PSK

$$B_{n-n}^{\text{M-QAM}} = \frac{2}{T} = \frac{2}{T_b \log_2 M} = \frac{2R_b}{\log_2 M} \text{ Hz}$$

$$\rho^{\text{M-QAM}} = \frac{\log_2(M)}{2} \text{ bits/s/Hz}$$

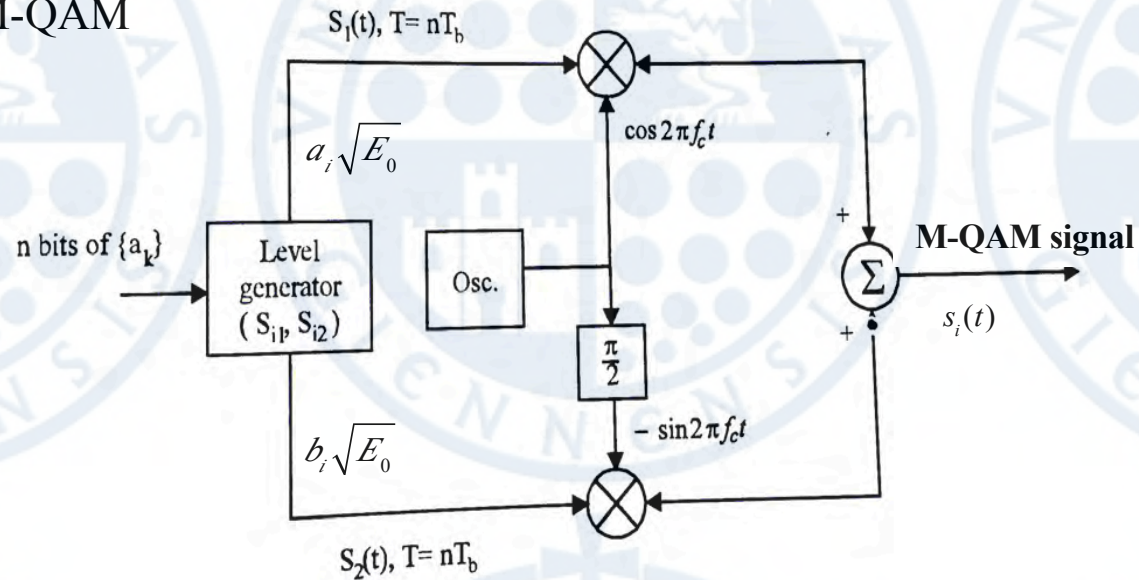
M	2	4	8	16	32	64
ρ	0.5	1	1.5	2	2.5	3

$\uparrow M \Rightarrow \downarrow B_{n-n}$
 $\uparrow M \Rightarrow \uparrow \rho$
 $\uparrow M \Rightarrow \uparrow BER$

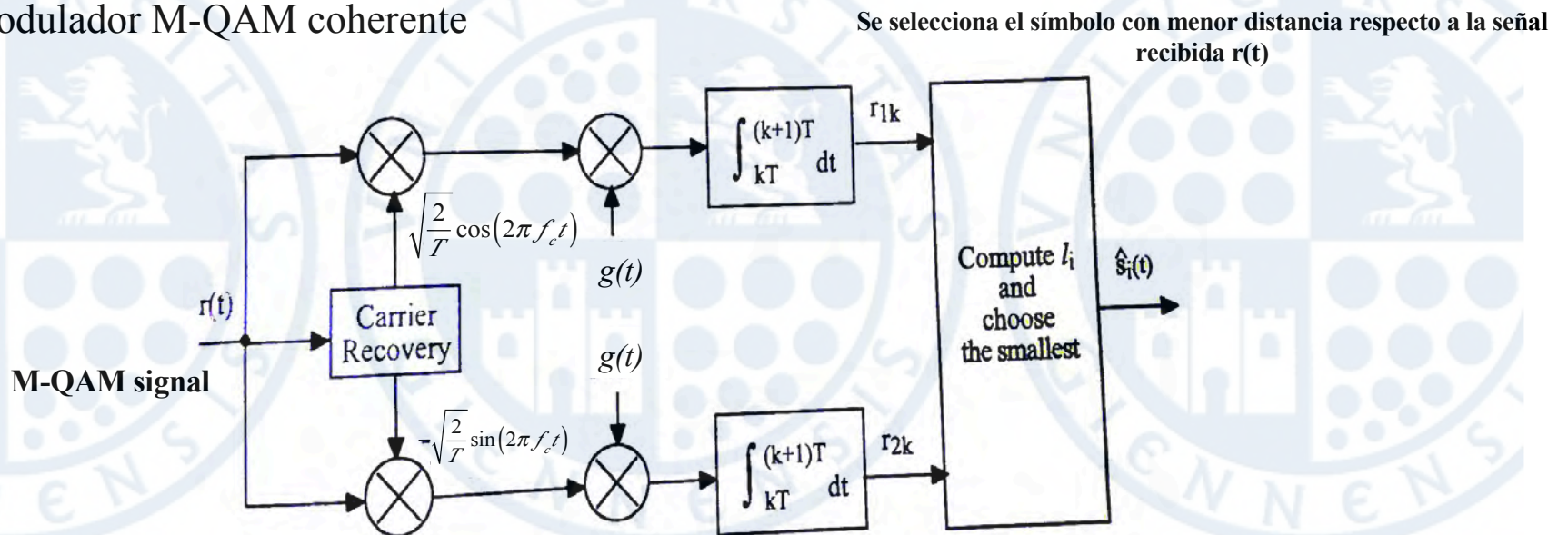


Modulación M-QAM (V)

Modulador M-QAM

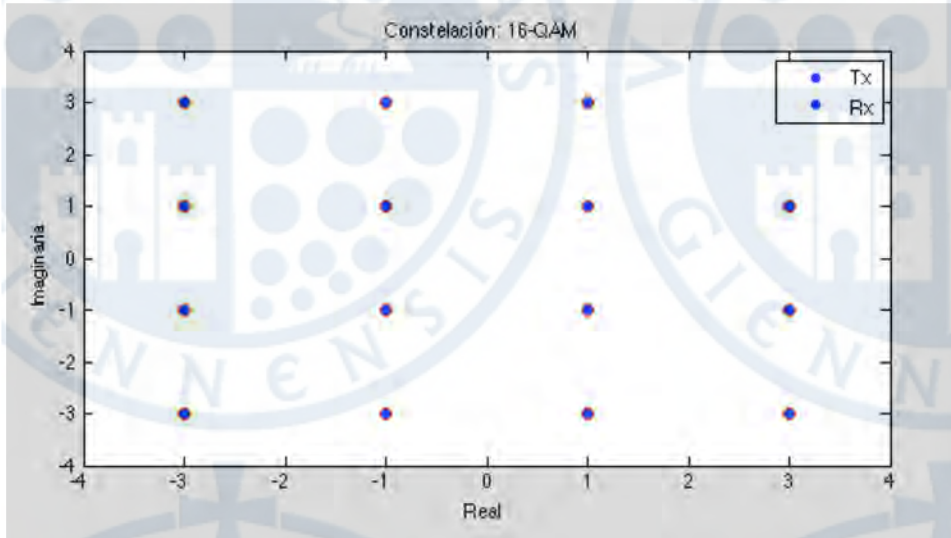


Demodulador M-QAM coherente



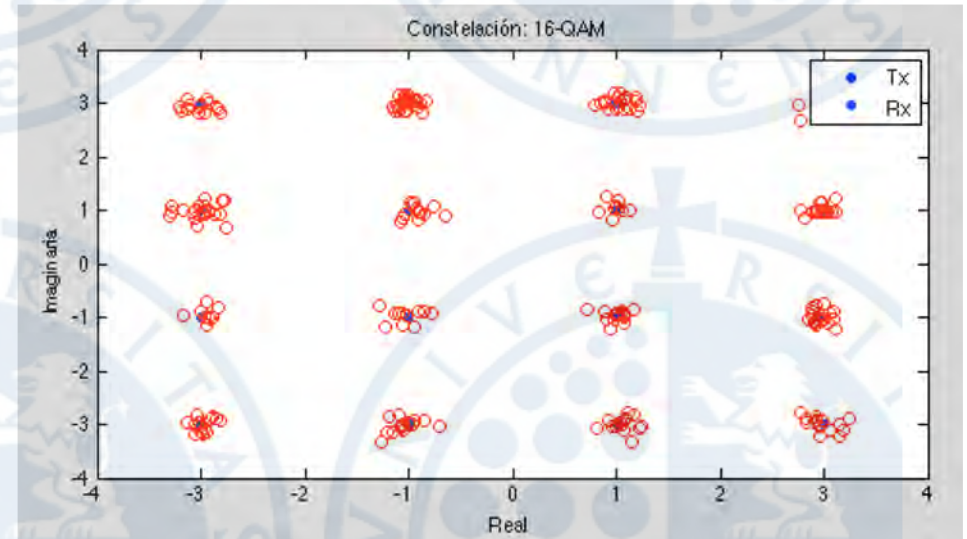
Modulación M-QAM (VI)

16-QAM. Ideal

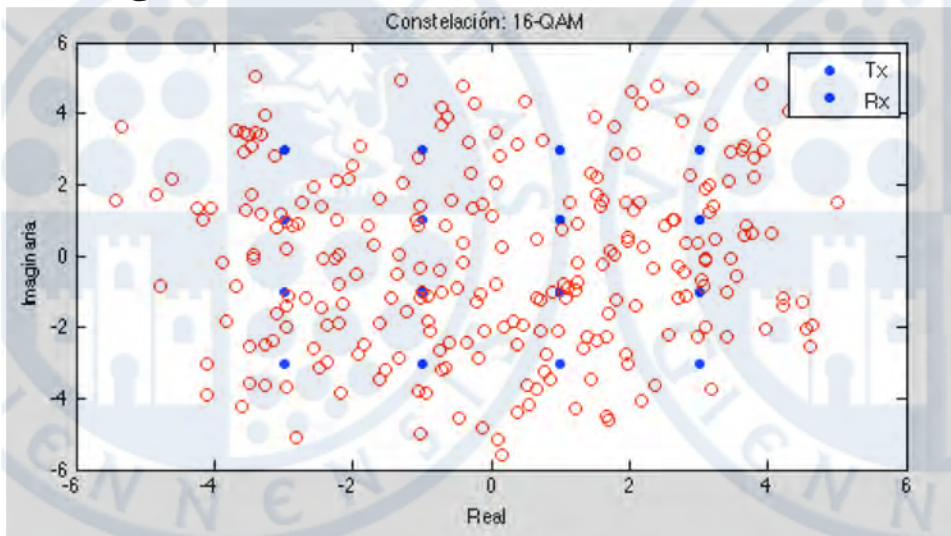


Transmitido: ●
Recibido: ○

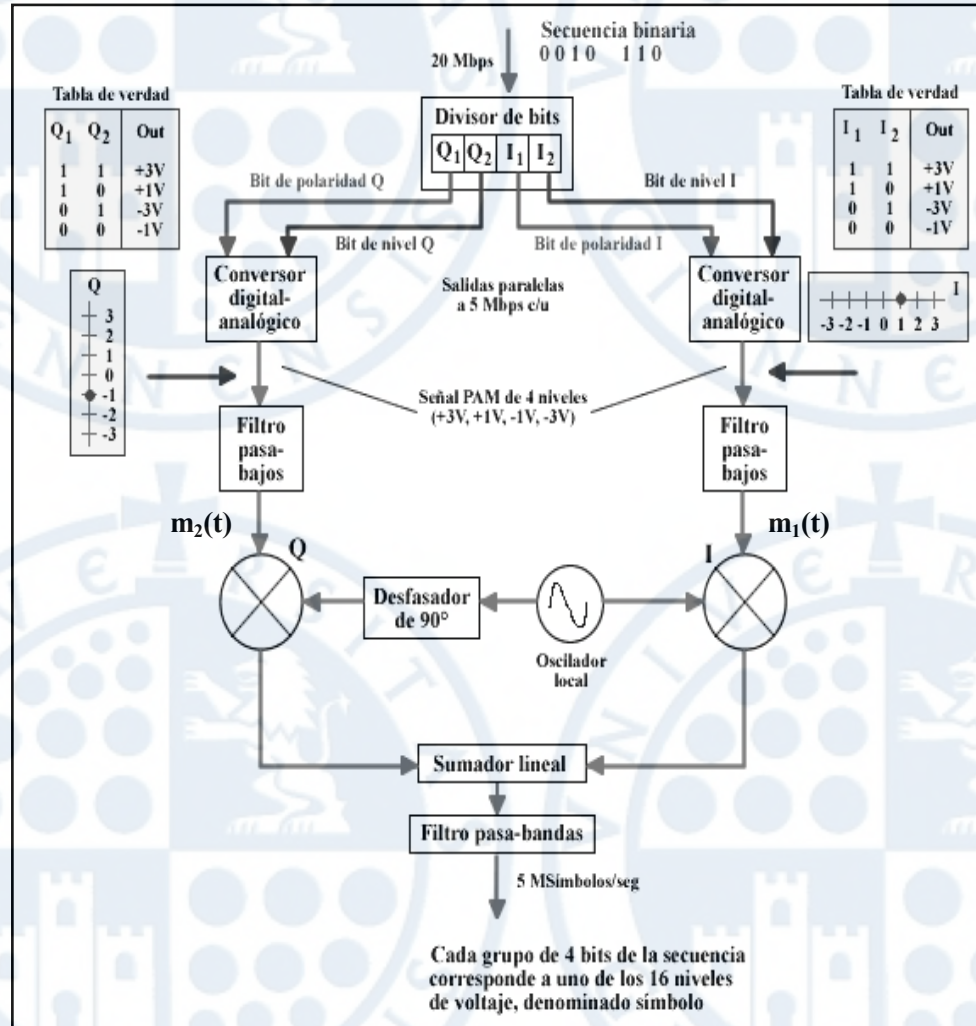
16-QAM. SNR = 10dB



16-QAM. SNR = -10dB



Modulación M-QAM (VII)



16 QAM ($k = 4$ bits, $M = 16$)

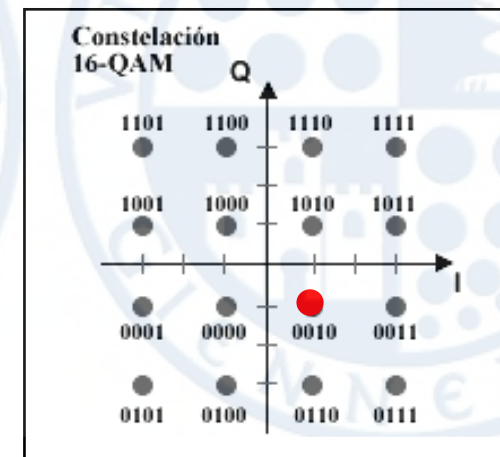
Características:

- Los primeros $\frac{\log_2 M}{2}$ bits son modulados en amplitud con la portadora en cuadratura (Q)
- Los últimos $\frac{\log_2 M}{2}$ bits son modulados en amplitud con la portadora en fase (I)

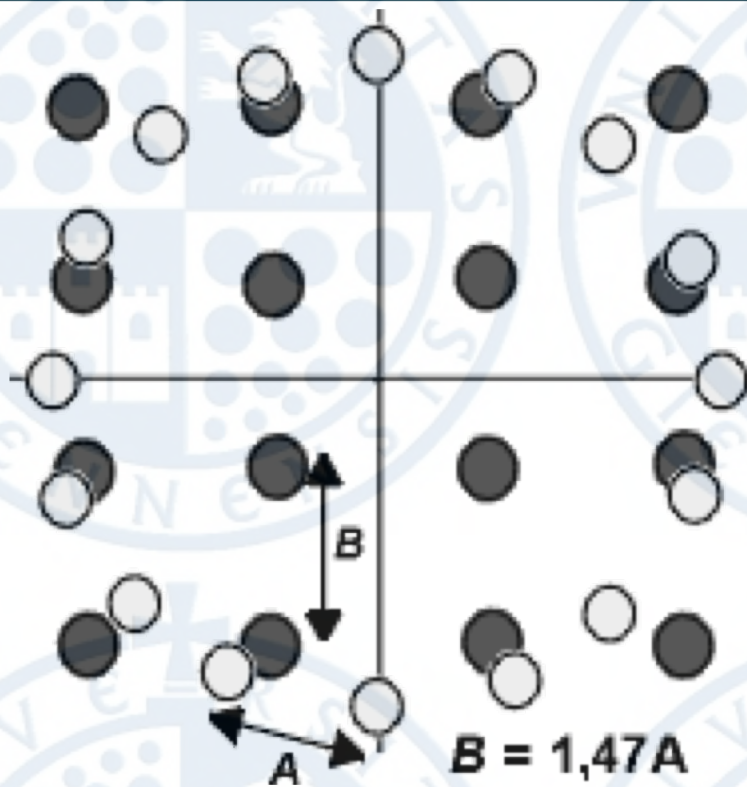
Convenio de bits:

- 1^{er} bit: polaridad
- Resto de bits: nivel (eficiencia)

Ruido: modifica la posición de la señal en la constelación



Modulación M-QAM (VIII)



Comparativa entre
16PSK vs 16QAM
con la misma E_s

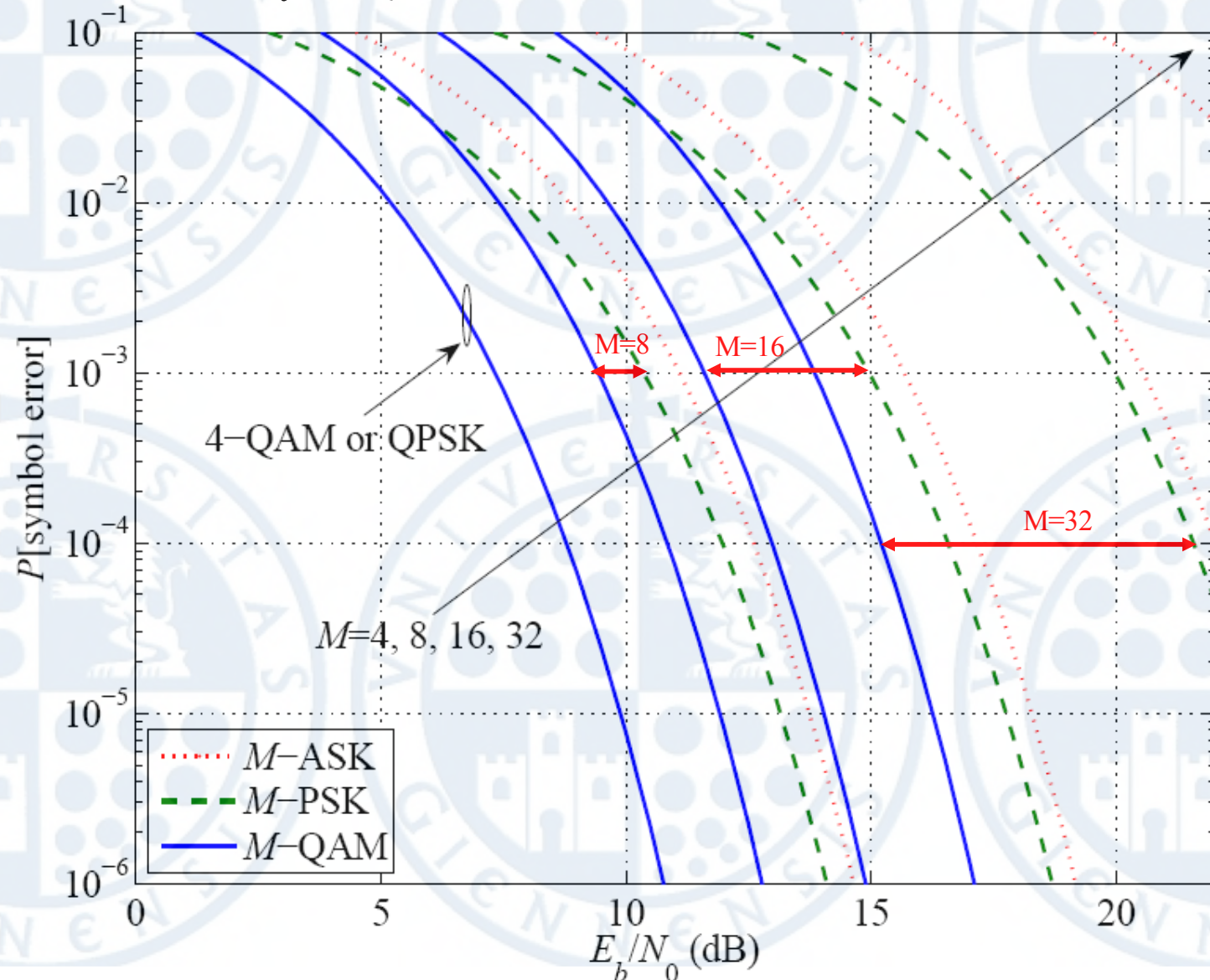
$$R_M = \frac{E_{s_{M-PSK}}}{E_{av_{M-QAM}}} = \frac{3}{2(M-1)\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)}$$

M	R_M	$10\log R_M$ (dB)
4	1	0
8	1.463	1.65
16	2.627	4.20
32	5.036	7.02
64	9.889	9.95
128	19.61	12.92
256	39.06	15.92

- M-PSK: constelación **circular** (se puede emplear en canales no lineales, ya que la envolvente es constante)
- M-QAM: constelación **rectangular**. La distancia entre los puntos de mensaje de la constelación M-QAM es **mayor** M-PSK utilizando los mismos valores M y P_e
 \Rightarrow M-QAM presenta mayor robustez frente al ruido AWGN ($M > 4$) comparado con M-PSK siempre que no existan no linealidades en el canal

Modulación M-QAM (IX)

A continuación, se muestra un análisis, en términos de P_e , comparando las familias de modulaciones M-PSK y M-QAM considerando transmisión a través de un canal lineal,



Modulación M-FSK (I)

En la modulación M-FSK (M-Frequency Shift Keying) la información se encuentra codificada en la **frecuencia** de la portadora.

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(2\pi f_i t), \quad 0 \leq t \leq T \quad i = 1, 2, \dots, M$$

- Las frecuencias portadoras f_i deben garantizar la **ortogonalidad** de los símbolos:

$$\int_0^T s_i(t) s_j(t) dt = 0 \Rightarrow \int_0^T \left(\sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(2\pi f_i t) \right) \left(\sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(2\pi f_j t) \right) dt = 0 \Rightarrow f_i \neq f_j$$

- Para utilizar detección FSK **coherente** (ortogonalidad), las frecuencias f_i se eligen con una diferencia de frecuencia múltiplo de $1/(2T)$. Esta diferencia en frecuencia $1/(2T)$ da lugar a **M-FSK con mínima variación de frecuencia**. Las señales transmitidas en este caso vienen dadas por:

$$\Delta f = \frac{n}{2T}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} n_c t + \frac{2\pi}{2T} i t\right) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos\left(2\pi \left(\frac{n_c}{T} + \frac{i}{2T}\right) t\right) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos\left(2\pi \left(f_c + \frac{i}{2T}\right) t\right) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(2\pi f_i t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(\omega_i t), \quad 0 \leq t \leq T$$

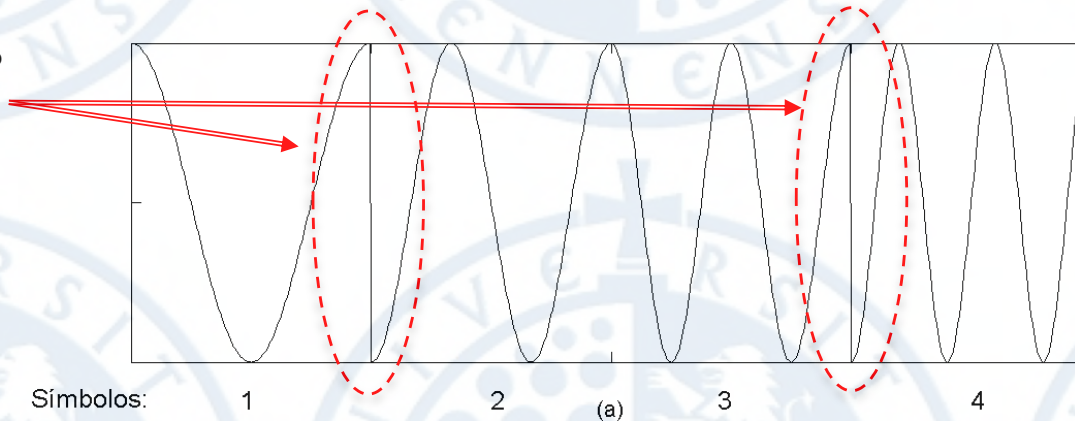
$i = 1, 2, \dots, M \quad f_c = \frac{n_c}{T}$

Modulación M-FSK (II)

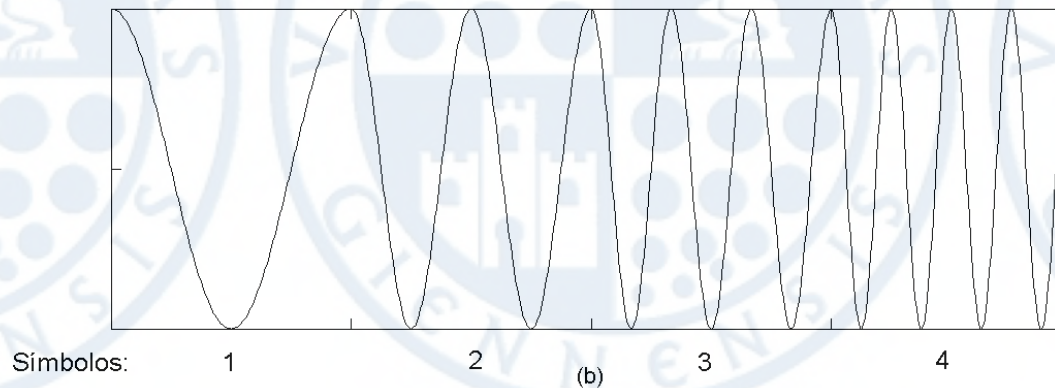
- Se suele utilizar **M-FSK de Sunde** que ocurre cuando $\Delta f = 1/T$ ya que presenta fase continua. En este caso, también muy habitual, las señales transmitidas son:

$$s_i(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos\left(\frac{2\pi}{T} n_c t + \frac{2\pi}{T} i t\right) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos\left(2\pi\left(f_c + \frac{i}{T}\right)t\right) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(\omega_i t), \quad \begin{matrix} 0 \leq t \leq T \\ i = 1, 2, \dots, M \end{matrix} \quad f_c = \frac{n_c}{T}$$

Aumento de ancho de banda



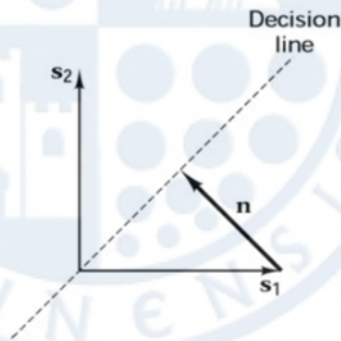
4-FSK, $\Delta f = 1/(2T)$



4-FSK (Sunde), $\Delta f = 1/T$

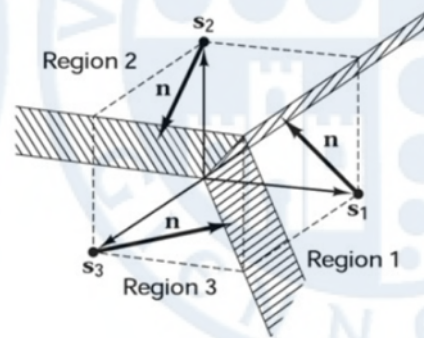
Modulación M-FSK (III)

- El diagrama de espacio-señal M-FSK se caracteriza por estar representado mediante M ejes perpendiculares entre sí (ortogonalidad)



$M = 2$

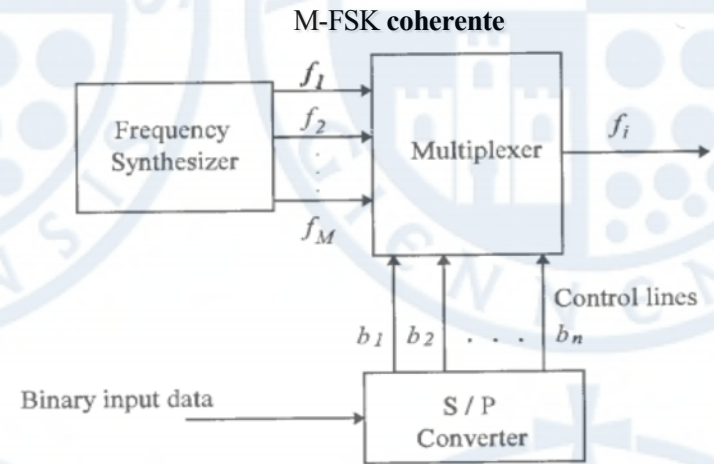
(a)



$M = 3$

(b)

Diagrama de bloques de un transmisor



M-FSK coherente

Diagrama de bloques de un receptor

M-FSK coherente (mediante correladores)

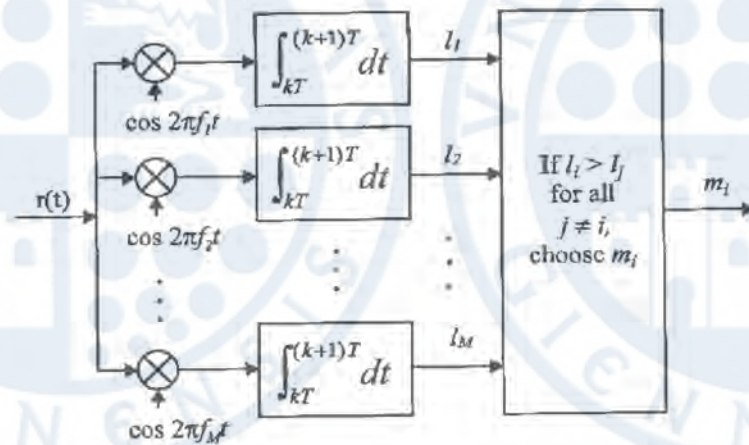
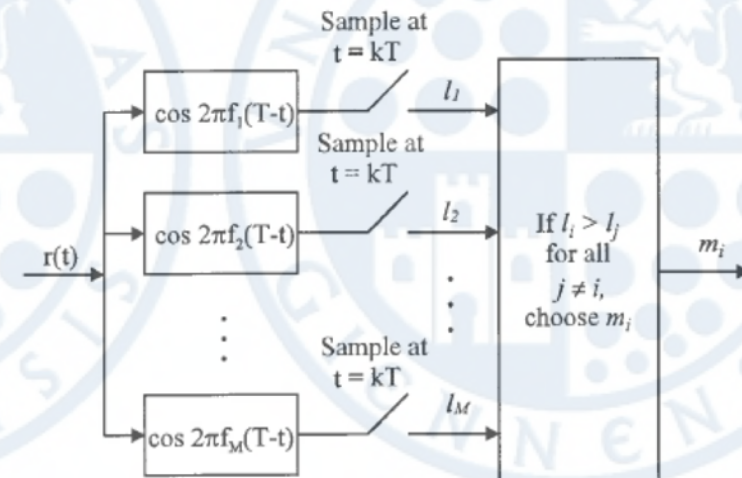


Diagrama de bloques de un receptor

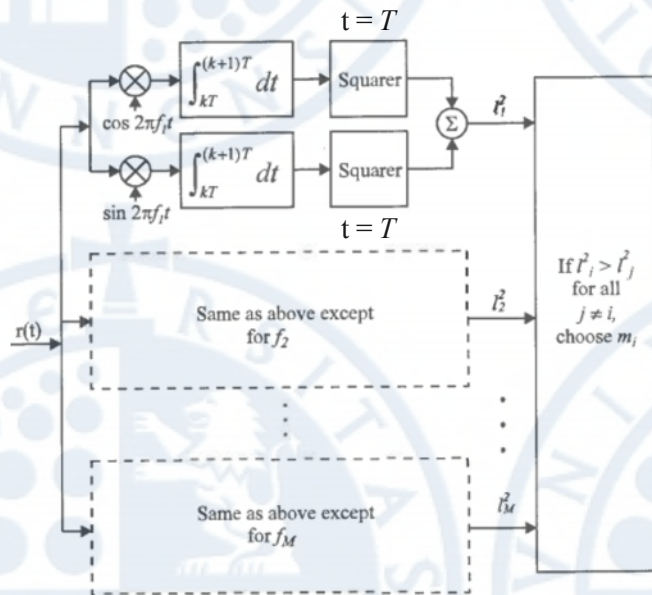
M-FSK coherente (mediante filtro adaptados)



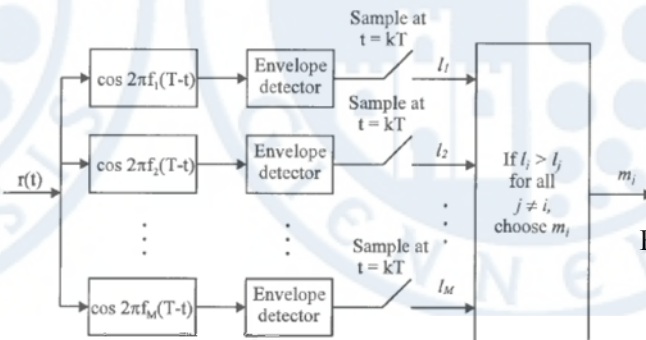
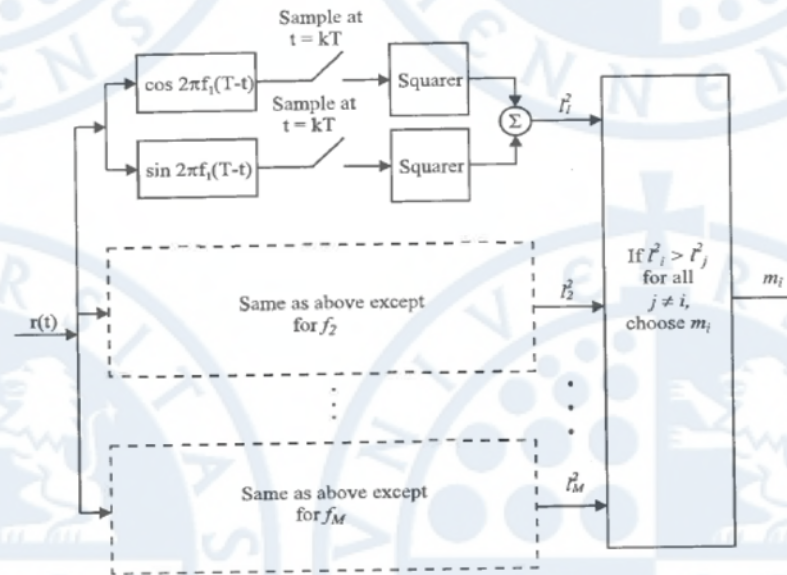
Modulación M-FSK (IV)

- Considerando M-FSK no coherente $\Rightarrow P_e \leq \frac{1}{2}(M-1)e^{\left(\frac{-E_s}{2\eta}\right)} \Rightarrow P_e \approx \frac{1}{2}(M-1)e^{\left(\frac{-E_s}{2\eta}\right)}$
 - Los receptores M-FSK no coherentes se pueden implementar utilizando dos esquemas equivalentes: Esquema 1 y 2.

Esquema 1: receptor MFSK **no coherente** en cuadratura utilizando correlators + squarer (Xiong, p. 113)



Esquema 2: receptor MFSK **no coherente** con matched filter + squarer (Haykin p. 406, Xiong p.114)

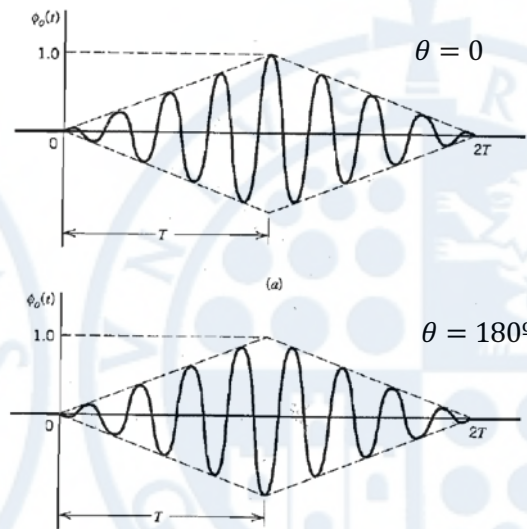


Esquema 2: receptor MFSK **no coherente** con filtro adaptado y detector de envoltura (matched filter + envelope detector)

(Haykin p. 406, Xiong p.114)

Modulación M-FSK (V)

- Analizando el Esquema 2:
 - Si el filtro adaptado y la señal recibida no están en fase, el pico máximo puede ocurrir en un instante $t \neq T$
 - Casos límites:
 - Si el filtro y la señal recibida se encuentran en fase $\Rightarrow \theta = 0$, entonces la salida del filtro adaptado es máxima con un valor positivo en $t = T$
 - Si el filtro y la señal recibida se encuentran en contrafase $\Rightarrow \theta = 180^\circ$, entonces la salida del filtro adaptado es máxima con un valor negativo en $t = T$



Salida del filtro adaptado del receptor para una señal recibida M-FSK

\Rightarrow se utiliza solamente la información de la envolvente de la salida del filtro adaptado al ser independiente de la fase θ existente entre el filtro adaptado del receptor y fase de la señal M-FSK recibida

Modulación M-FSK (VI)

- Considerando M-FSK coherente,

$$P_e \leq (M-1) \cdot Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{\eta}}\right) \leq (M-1) \cdot P_{e_{M=2}} \Rightarrow P_e \leq (M-1) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_s}{2\eta}}\right) \leq (M-1) \cdot P_{e_{M=2}} \Rightarrow P_e \approx \frac{1}{2}(M-1) \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_s}{2\eta}}\right)$$

En este caso con la codificación en binario no se puede conseguir que los símbolos más próximos sólo difieran en 1 bit (¡¡ todos los símbolos están igual de próximos!!). Podemos codificar como queramos, pero la relación entre P_e y BER será más complicada que en los casos que hemos visto hasta ahora.

$$BER = \frac{k}{\log_2(M)} \cdot P_e, \quad k = \frac{M}{2(M-1)} \cdot \log_2 M, \quad \text{, siendo } k \text{ el número medio de bits erróneos por símbolo detectado erróneamente}$$

M	2	4	8	16	32	64
k	1	4/3	12/7	32/15	80/31	192/63

$$\begin{aligned} \uparrow M &\Rightarrow \uparrow B_{n-n} \\ \uparrow M &\Rightarrow \downarrow \rho \\ \uparrow M &\Rightarrow \downarrow BER \end{aligned}$$

a) Eficiencia espectral con M-FSK de Sunde $\Delta f = 1/T$

$$B_{n-n} = \frac{M+1}{T} = \frac{M+1}{\log_2(M) T_b} = \frac{M+1}{\log_2(M)} \cdot R_b \Rightarrow \rho = \frac{R_b}{B_{n-n}} = \frac{\log_2 M}{M+1}$$

M	2	4	8	16	32	64
ρ	0.3333	0.4000	0.3333	0.2354	0.1515	0.0923

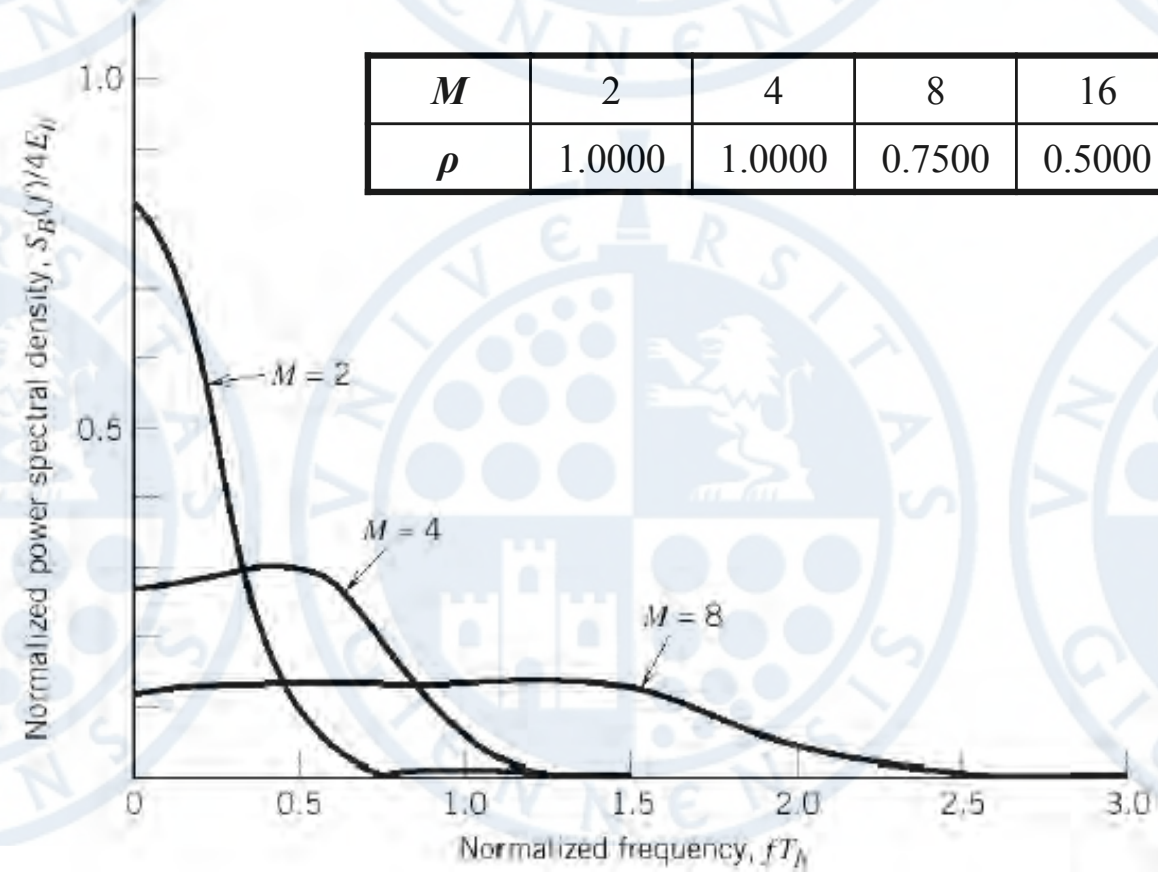
Modulación M-FSK (VII)

b) Eficiencia espectral con M-FSK con mínima separación en frecuencia $\Delta f=1/(2T)$

No produce nulos espectrales equiespaciados, por lo que no se puede hablar de ancho de banda de nulo a nulo. De forma alternativa, se puede **estimar** el ancho de banda B requerido para transmitir la señal modulada,

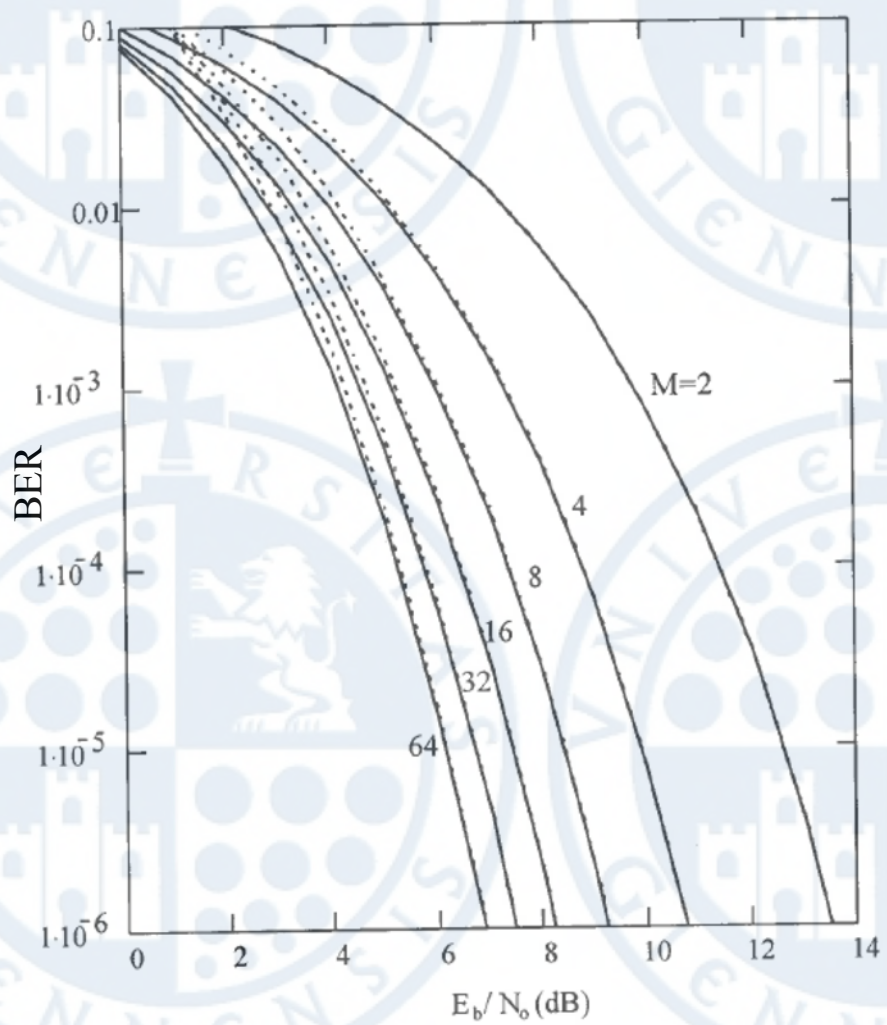
$$B = \frac{M}{2T} = \frac{M}{2 \log_2(M) T_b} = \frac{M}{\log_2(M)} \cdot \frac{R_b}{2} \Rightarrow \rho = \frac{R_b}{B} = 2 \cdot \frac{\log_2 M}{M}$$

M	2	4	8	16	32	64
ρ	1.0000	1.0000	0.7500	0.5000	0.3125	0.1875

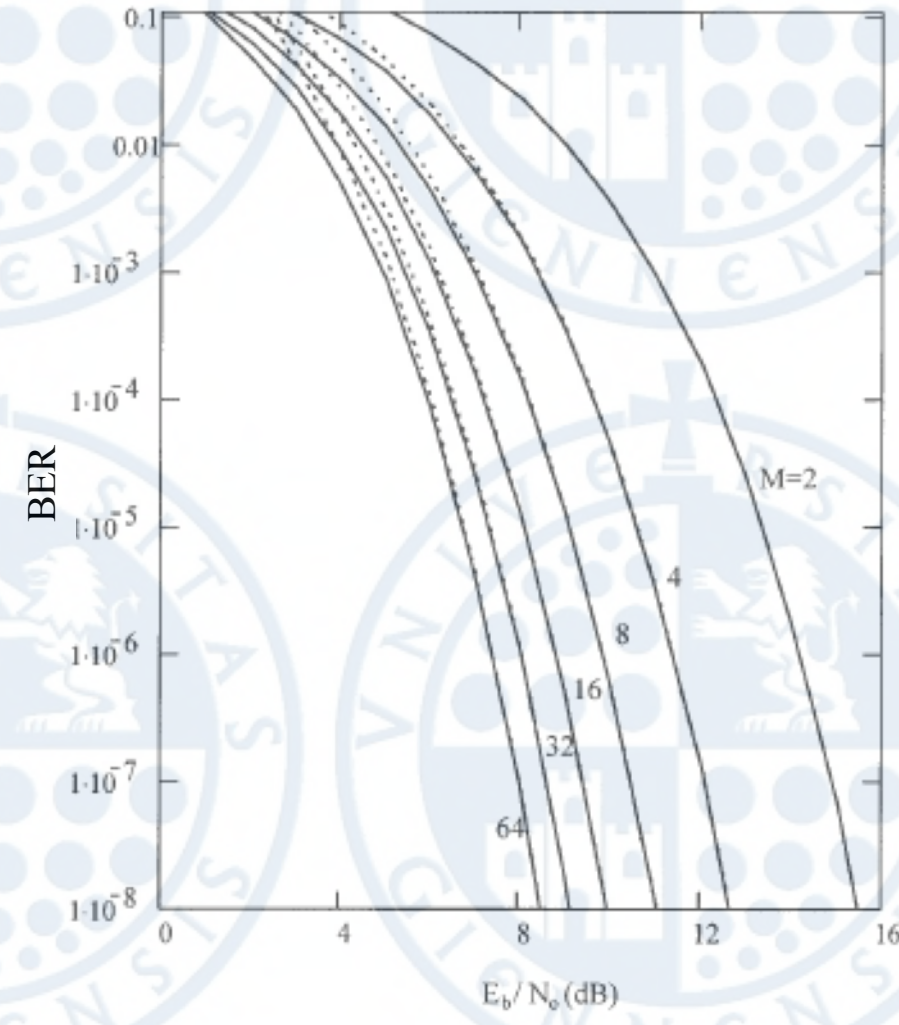


Modulación M-FSK (VIII)

A continuación, se muestra un análisis, en términos de BER, comparando las familias de modulaciones M-FSK coherentes y no coherentes asumiendo símbolos equiprobables,



MFSK coherente



MFSK no coherente