



Departamento de Ingeniería de Telecomunicación
Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad de Jaén

TEMA 5

MODULACIONES DIGITALES (I)

Contenidos

1. Clasificación de las técnicas básicas de modulación digital
2. Modulaciones **digitales binarias**
 - A. Manipulación por desplazamiento de amplitud binaria (Amplitude Shift Keying, ASK)
 - B. Manipulación por desplazamiento de fase binaria (Binary Phase Shift Keying, BPSK)
 - C. Manipulación por desplazamiento de frecuencia binaria (Binary Frequency Shift Keying, BFSK)
 - D. Manipulación por desplazamiento mínimo (Minimum Shift Keying, MSK)

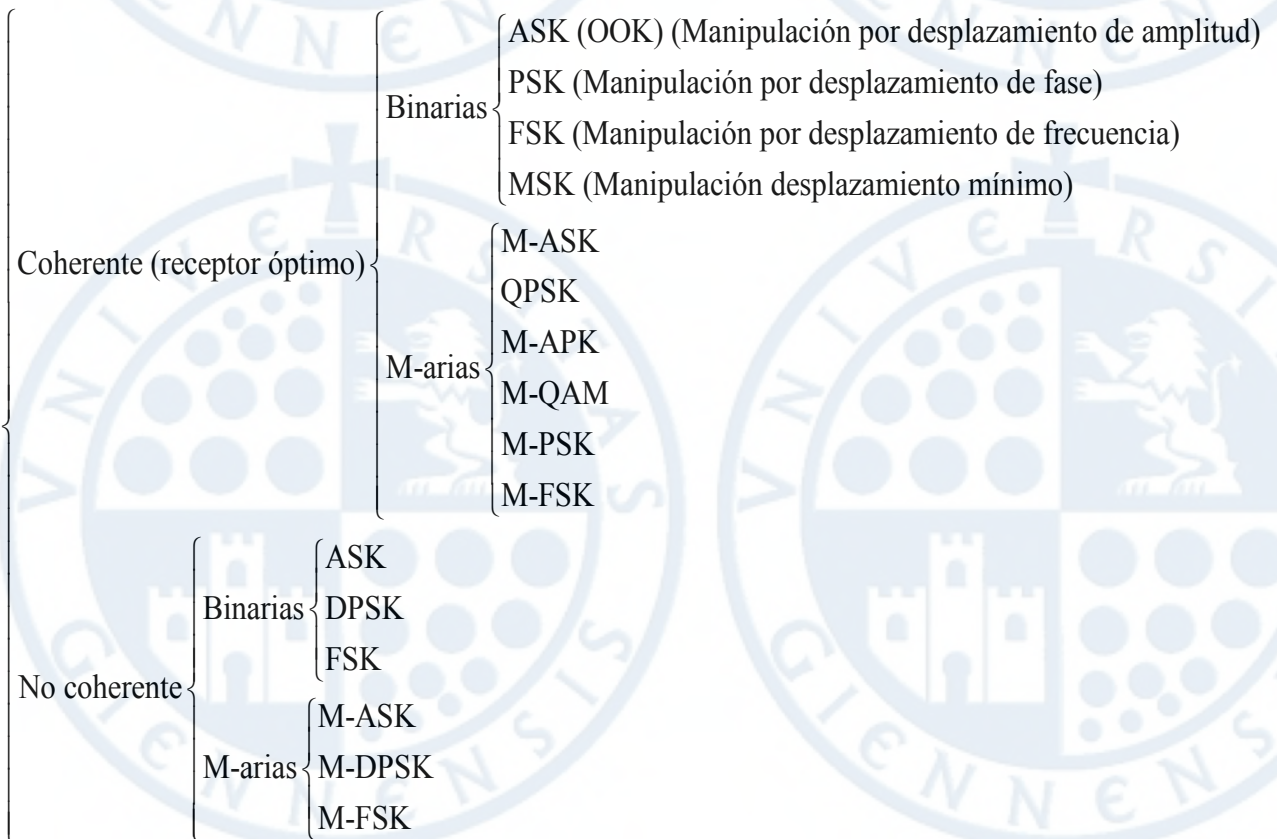
Objetivos específicos

- Determinar las prestaciones (en cuanto a probabilidad de error por símbolo y ancho de banda requerido) de la modulación **ASK binaria**.
- Determinar las prestaciones (en cuanto a probabilidad de error por símbolo y ancho de banda requerido) de la modulación **BPSK**
- Determinar las prestaciones (en cuanto a probabilidad de error por símbolo y ancho de banda requerido) de la modulación **BFSK**
- Determinar las prestaciones (en cuanto a probabilidad de error por símbolo y ancho de banda requerido) de la modulación **MSK**

Clasificación de las técnicas básicas de modulación digital

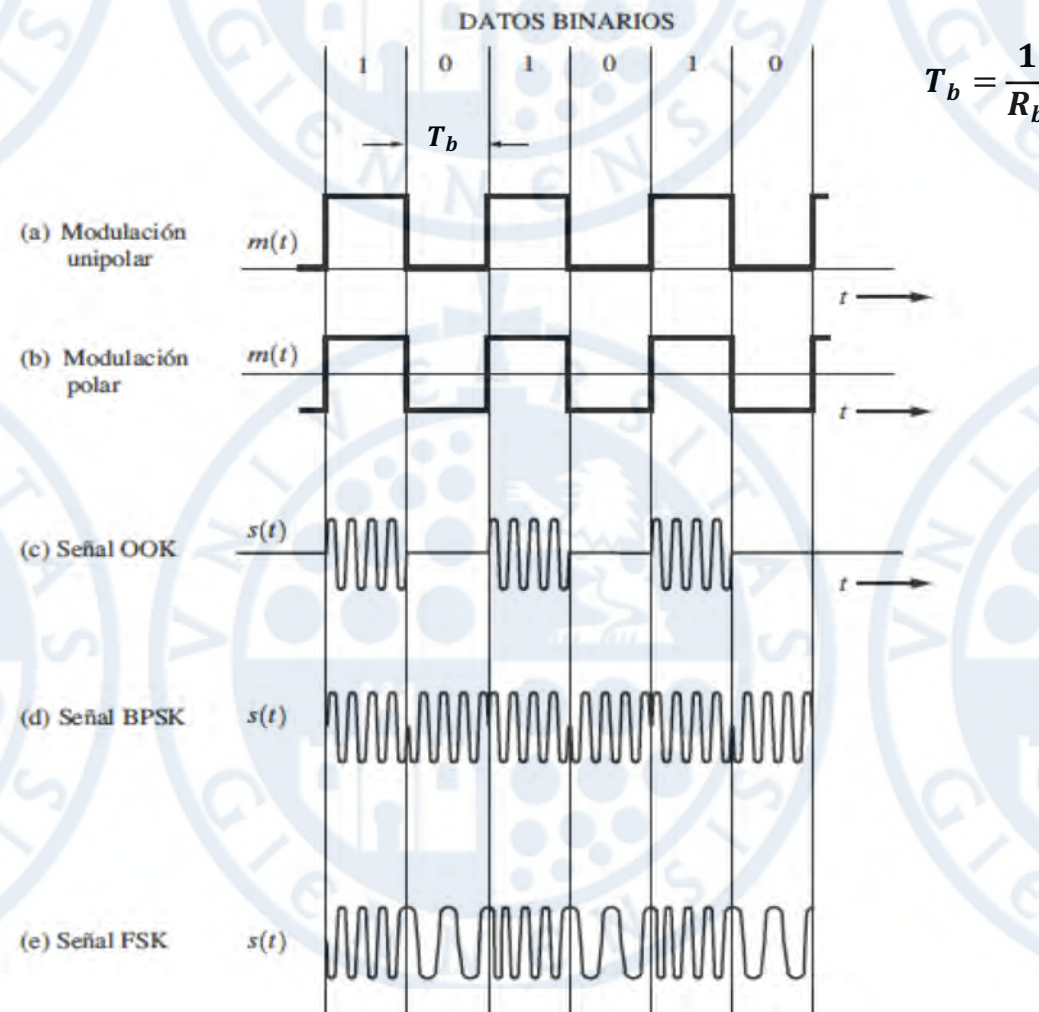
- En transmisión digital en banda base, la banda del canal se extendía desde 0 Hz hacia arriba. En este tema, se requiere **transmisión digital modulada (paso-banda)**
- Tipos de detección en el receptor: coherente y no-coherente.
 - **Coherencia** implica que el receptor utiliza, a partir de la señal recibida, la información de frecuencia y fase de la portadora utilizada en transmisión suponiendo que existe sincronización entre transmisor-receptor $\Rightarrow \uparrow$ complejidad del receptor $\Rightarrow \downarrow P_e$

Técnicas de modulación digital



Manipulación por desplazamiento de amplitud binaria (Amplitude Shift Keying, ASK) (I)

- A diferencia de las señales ASK, PSK y FSK tienen una envolvente constante. Esta propiedad hace que PSK y FSK sean **robustas** frente a las **no linealidades de amplitud** (como las que suelen encontrarse en los canales de radio de microondas y de satélite). Se prefieren las señales PSK y FSK sobre las ASK para la transmisión de datos paso-banda por canales no lineales.



Manipulación por desplazamiento de amplitud binaria (Amplitude Shift Keying, ASK) (II)

- Considerando los símbolos $m_0 = 0$ y $m_1 = 1$, las señales $s_0(t)$, $s_1(t)$ asociadas en ASK binario,

paso-banda

$$s_0(t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T_b$$

$$s_1(t) = A \cdot \cos(2\pi f_c t) \quad 0 \leq t \leq T_b$$

En general, $f_c = \frac{n_c}{T_b}$ ($n_c \in \mathbb{Z}$) \Rightarrow existe un n° entero de ciclos de portadora en T_b

- Si los símbolos son equiprobables, la energía media por bit E_b (o por símbolo es):

$$\left. \begin{array}{l} E_0 = 0 \\ E_1 = \int_0^{T_b} A^2 \cdot \cos^2(2\pi f_c t) dt = \frac{A^2}{2} \cdot T_b \end{array} \right\} \begin{cases} E_b = P_0 \cdot E_0 + P_1 \cdot E_1 = \frac{1}{2} \cdot E_0 + \frac{1}{2} \cdot E_1 = \frac{A^2}{4} T_b \Rightarrow E_1 = 2E_b \\ E_b = P_0 \cdot E_0 + P_1 \cdot E_1 = \frac{1}{2} \cdot E_0 + \frac{1}{2} \cdot E_1 = \frac{A^2}{4} T_b \Rightarrow A = 2\sqrt{\frac{E_b}{T_b}} \end{cases}$$

$$s_0(t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T_b$$

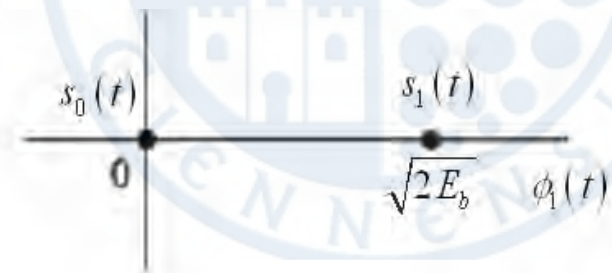
$$s_1(t) = A \cdot \cos(2\pi f_c t) = 2\sqrt{\frac{E_b}{T_b}} \cdot \cos(2\pi f_c t) \quad 0 \leq t \leq T_b$$

- Espacio de señal **unidimensional** y función base de energía unidad $\phi_1(t)$:

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}} = \frac{s_1(t)}{\sqrt{2E_b}} = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

$$s_1(t) = \sqrt{E_1} \cdot \phi_1(t) = \sqrt{2E_b} \cdot \phi_1(t) = s_{11} \cdot \phi_1(t) \Rightarrow s_{11} = \int_0^{T_b} s_1(t) \phi_1(t) dt$$

$$s_0(t) = \sqrt{E_0} \cdot \phi_1(t) = 0 \cdot \phi_1(t) = s_{21} \cdot \phi_1(t) \Rightarrow s_{21} = \int_0^{T_b} s_0(t) \phi_1(t) dt$$



Manipulación por desplazamiento de amplitud binaria (Amplitude Shift Keying, ASK) (III)

- Al ser una constelación binaria ($M=2$), la probabilidad de error por bit (Bit Error Rate, BER) coincide con la probabilidad de error por símbolo P_e :

$$P_e = BER = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{2\eta}}\right)$$

Este valor BER es el que proporcionaría un receptor óptimo (**coherente**) ya que en el receptor se requiere hacer una **correlación** utilizando la misma señal transmitida $\phi_1(t)$ incluida la fase: ASK COHERENTE

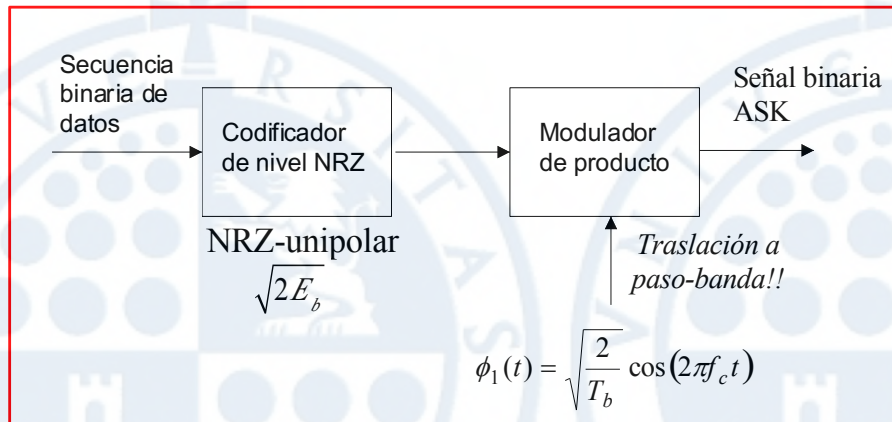


Diagrama de bloques de un **transmisor** ASK binario

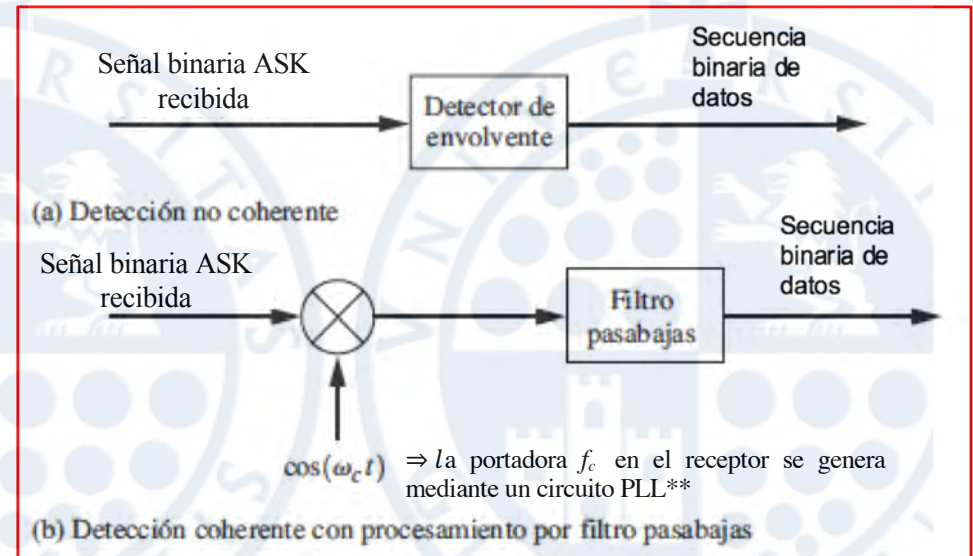
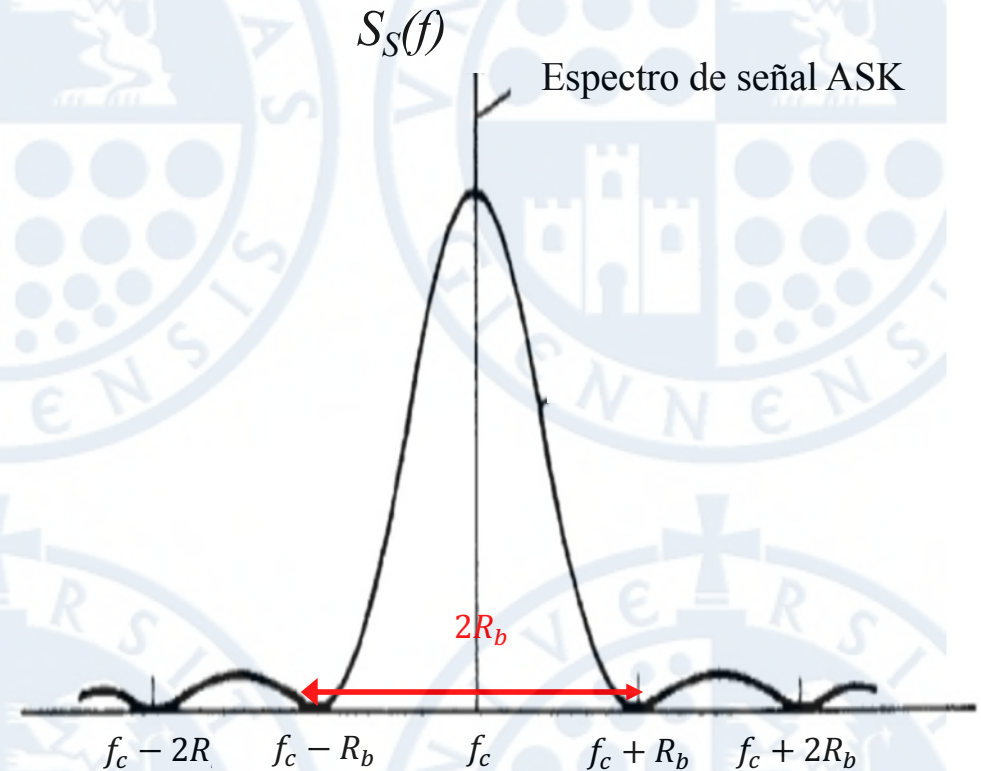
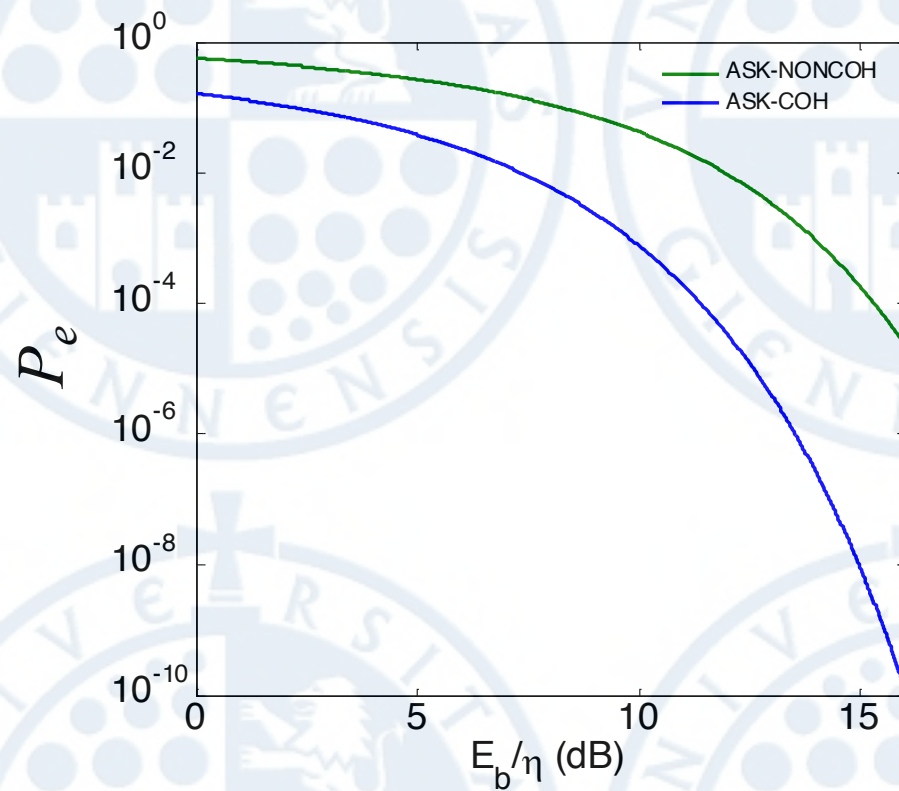


Diagrama de bloques de un **receptor** ASK binario

** PLL es un sistema realimentado cuyo objetivo consiste en la generación de una señal de salida de la misma frecuencia que la señal de entrada, dentro de un margen determinado.

Manipulación por desplazamiento de amplitud binaria (Amplitude Shift Keying, ASK) (IV)



- Se define la eficiencia espectral ρ de una modulación digital como el cociente entre el régimen binario R_b proporcionado y el ancho de banda nulo-nulo B_{n-n} necesario para su transmisión:

$$\rho = \frac{R_b}{B_{n-n}} \text{ bits / s / Hz} \Rightarrow B_{n-n} = \frac{2}{\tau} = \frac{2}{T_b} = 2 \cdot R_b \Rightarrow \rho = \frac{R_b}{B_{n-n}} = \frac{R_b}{2R_b} = 0.5 \text{ bits / s / Hz}$$

Manipulación por desplazamiento de fase binaria coherente (Binary Phase Shift Keying, BPSK) (I)

- En un sistema PSK binario (BPSK), el par de señales $s_0(t)$ y $s_1(t)$

$$s_0(t) = A \cdot \cos(2\pi f_c t + \pi) = -A \cdot \cos(2\pi f_c t) \quad 0 \leq t \leq T_b$$

$$s_1(t) = A \cdot \cos(2\pi f_c t + 0) = A \cdot \cos(2\pi f_c t) \quad 0 \leq t \leq T_b$$

En general, $f_c = \frac{nc}{T_b}$ ($n_c \in \mathbb{Z}$) \Rightarrow existe un n° entero de ciclos de portadora en T_b

$$E_0 = \int_0^{T_b} (-A)^2 \cdot \cos^2(2\pi f_c t) dt = \frac{A^2}{2} \cdot T_b$$

$$E_1 = \int_0^{T_b} A^2 \cdot \cos^2(2\pi f_c t) dt = \frac{A^2}{2} \cdot T_b$$

$$E_b = E_0 = E_1 = P_0 \cdot E_0 + P_1 \cdot E_1 = \frac{A^2}{2} T_b$$

$$s_0(t) = -A \cdot \cos(2\pi f_c t) = -\sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cdot \cos(2\pi f_c t) \quad 0 \leq t \leq T_b$$

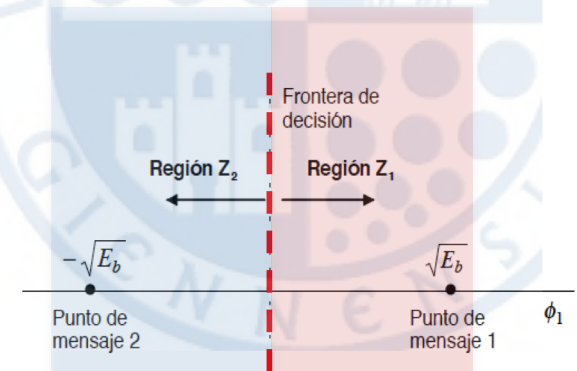
$$s_1(t) = A \cdot \cos(2\pi f_c t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cdot \cos(2\pi f_c t) \quad 0 \leq t \leq T_b$$

- Espacio de señal **unidimensional** con función base de energía unidad $\phi_1(t)$:

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}} = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_b}} = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

$$s_1(t) = \sqrt{E_1} \cdot \phi_1(t) = \sqrt{E_b} \cdot \phi_1(t) = s_{11} \cdot \phi_1(t) \Rightarrow s_{11} = \int_0^{T_b} s_1(t) \phi_1(t) dt$$

$$s_0(t) = -\sqrt{E_0} \cdot \phi_1(t) = -\sqrt{E_b} \cdot \phi_1(t) = s_{21} \cdot \phi_1(t) \Rightarrow s_{21} = \int_0^{T_b} s_0(t) \phi_1(t) dt$$



Manipulación por desplazamiento de fase binaria coherente (Binary Phase Shift Keying, BPSK) (II)

- Al ser una constelación binaria,

$$P_e = BER = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right)$$

- Esta BER es la que proporcionaría un receptor óptimo (**coherente**), ya que en el receptor se requiere hacer una correlación con la señal transmitida $\phi_1(t)$ conocida la fase. En principio, no es posible un receptor PSK no coherente debido a que una señal PSK transmite la información codificada en la fase. No obstante, se estudiará una modulación PSK no coherente, denominada PSK diferencial (DPSK)

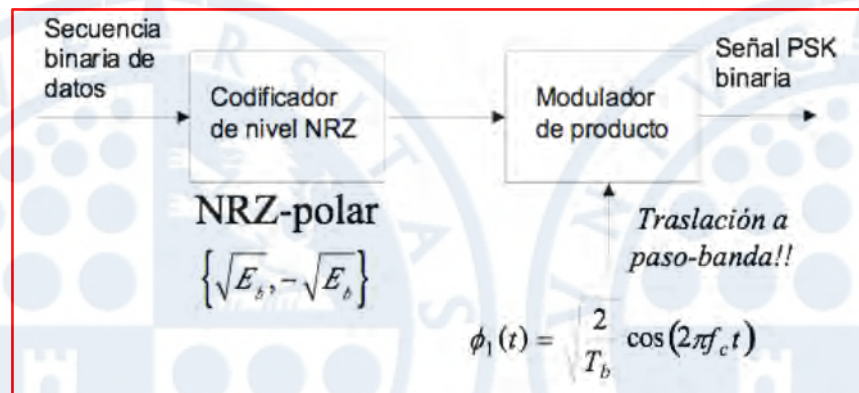
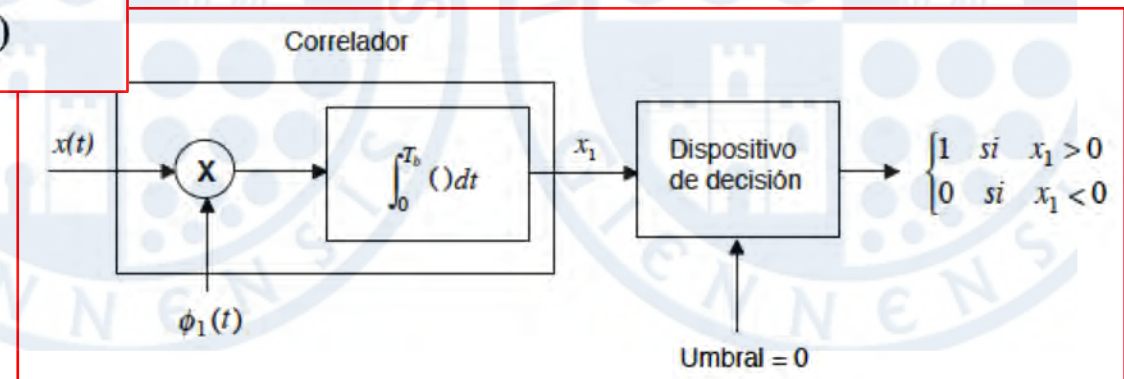


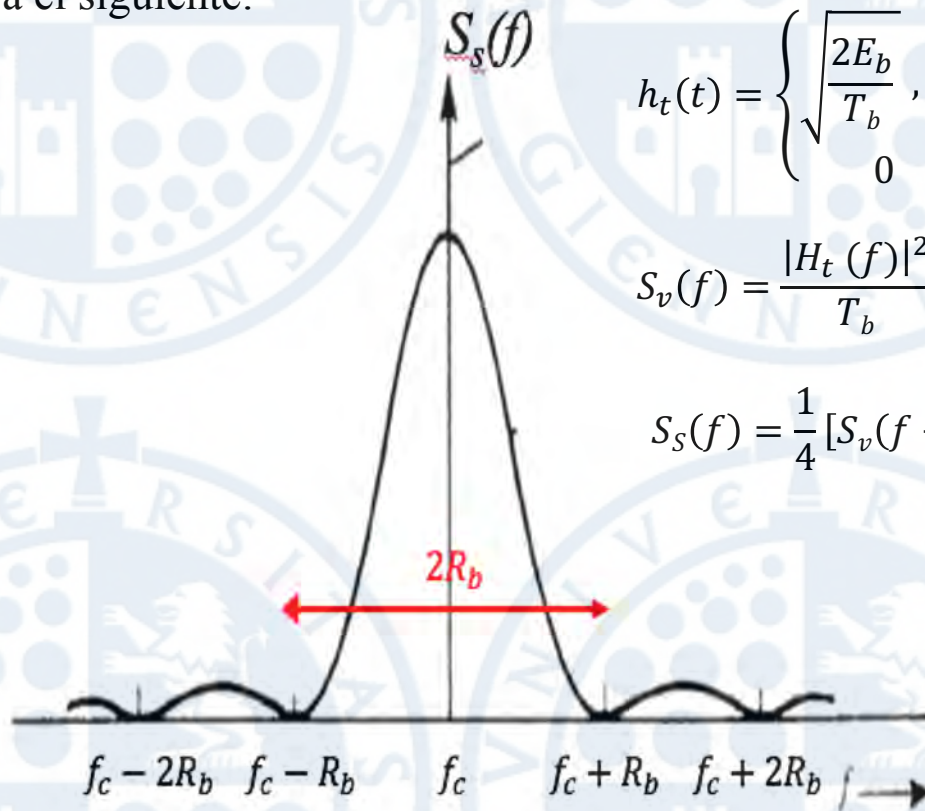
Diagrama de bloques de un **transmisor** PSK binario

Diagrama de bloques de un **receptor** PSK binario coherente



Manipulación por desplazamiento de fase binaria coherente (Binary Phase Shift Keying, BPSK) (III)

- Suponiendo que la secuencia binaria de entrada es aleatoria con símbolos equiprobables y que dichos símbolos son estadísticamente independientes en intervalos adyacentes, el espectro BPSK será el siguiente:



$$h_t(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}}, & 0 \leq t \leq T_b \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \Rightarrow h_t(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \Pi\left(\frac{t}{T_b}\right)$$

$$S_v(f) = \frac{|H_t(f)|^2}{T_b} = \frac{2E_b \sin^2(\pi T_b f)}{(\pi T_b f)^2} = 2E_b \text{sinc}^2(T_b f)$$

$$S_s(f) = \frac{1}{4} [S_v(f - f_c) + S_v(-f - f_c)]$$

$|H_t(f)|^2$: densidad espectral de energía del pulso de conformación (**Codificador de línea**)

$S_v(f)$: densidad espectral de potencia de la envolvente compleja $v(t)$ (banda base) → **el espectro de la envolvente compleja $v(t)$ es idéntico al de $s(t)$ salvo por un escalado y un desplazamiento a $f=0$ Hz**

Recuerde que la envolvente compleja

$S_s(f)$: densidad espectral de potencia de la señal modulada $s(t)$ (paso-banda)

Espectro ocupado por señal paso-banda BPSK

$$\rho = \frac{R_b}{B_{n-n}} \text{ bits / s / Hz} \Rightarrow B_{n-n} = \frac{2}{\tau} = \frac{2}{T_b} = 2 \cdot R_b \Rightarrow \rho = \frac{R_b}{B_{n-n}} = \frac{R_b}{2R_b} = 0.5 \text{ bits / s / Hz}$$

Manipulación por desplazamiento de frecuencia binaria coherente (Binary Frequency Shift Keying, BFSK) (I)

- En un sistema FSK binario (*BFSK*),

$$s_1(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_1 t) \quad 0 \leq t \leq T_b \quad s_0(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_2 t) \quad 0 \leq t \leq T_b$$

$$s(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos\left(2\pi f_c t \pm \frac{\pi t}{T_b}\right) \quad 0 \leq t \leq T_b \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{"1"} \Rightarrow f_1 = f_c + \frac{1}{2T_b} = \frac{n_{c1}}{T_b} = \frac{n_{c2} + 1}{T_b} = (n_{c2} + 1)R_b \\ \text{"0"} \Rightarrow f_2 = f_c - \frac{1}{2T_b} = \frac{n_{c2}}{T_b} = n_{c2}R_b \end{array} \right.$$

$$f_1 = n_{c1}R_b, f_2 = n_{c2}R_b \quad (n_{c1}, n_{c2} \in \mathbb{Z}) \Rightarrow f_c = \frac{(f_1 + f_2)}{2}$$

- La señal FSK binaria descrita arriba es conocida como **FSK de Sunde**

$$\Rightarrow (f_1 - f_2) = R_b$$

\Rightarrow la continuidad de fase siempre se mantiene, incluyendo los instantes entre períodos de bit (Continuous Phase FSK, CPFSK)

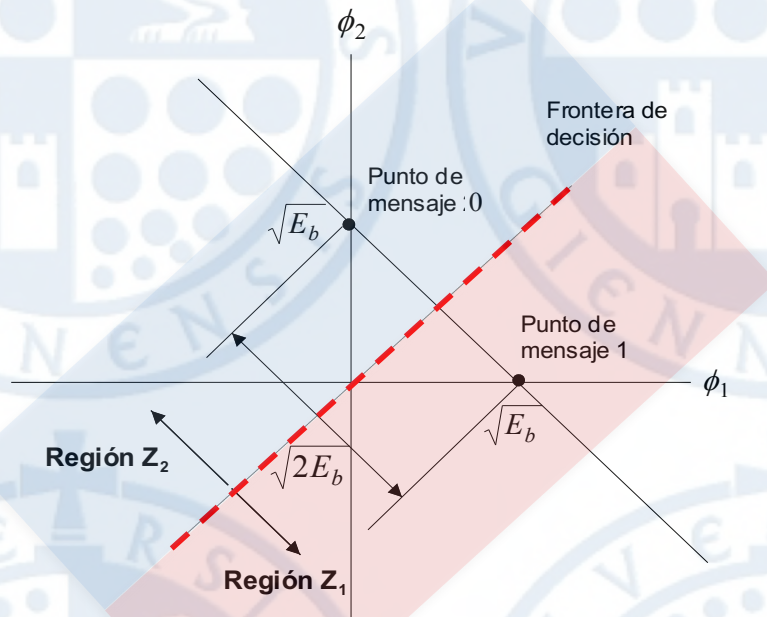
- Espacio de señal **bidimensional** y funciones base energía $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$

$$E_1 = \int_0^{T_b} s_1^2(t) dt = E_b \Rightarrow \phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}} = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cdot \cos(2\pi f_1 t) \Rightarrow s_1(t) = \sqrt{E_b} \cdot \phi_1(t) \Rightarrow \mathbf{s}_1 = [\sqrt{E_b}, 0]$$

$$E_0 = \int_0^{T_b} s_0^2(t) dt = E_b \Rightarrow \phi_2(t) = \frac{s_0(t)}{\sqrt{E_0}} = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cdot \cos(2\pi f_2 t) \Rightarrow s_0(t) = \sqrt{E_b} \cdot \phi_2(t) \Rightarrow \mathbf{s}_0 = [0, \sqrt{E_b}]$$

Manipulación por desplazamiento de frecuencia binaria coherente (Binary Frequency Shift Keying, BFSK) (II)

Diagrama del espacio de señal para modulación FSK binaria coherente



Símbolo recuperado en recepción $s_{ij}(t)$

$$s_{ij}(t)_{i=(0,1),j=(1,2)} = \int_0^{T_b} s_i(t)\phi_j(t)dt = \int_0^{T_b} \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_i t) \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos(2\pi f_j t) dt = \begin{cases} \sqrt{E_b} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{2\eta}}\right) \Rightarrow \text{comportamiento de señales ortogonales}$$

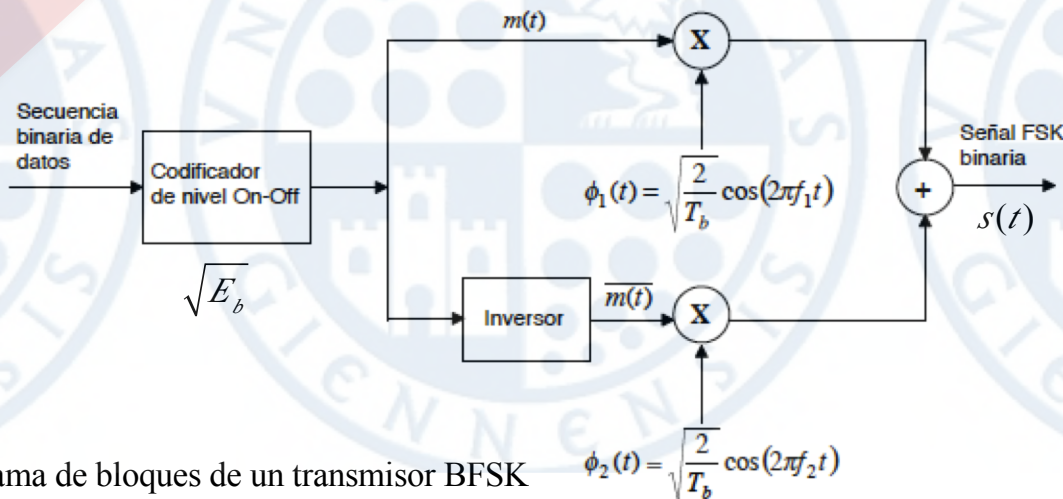
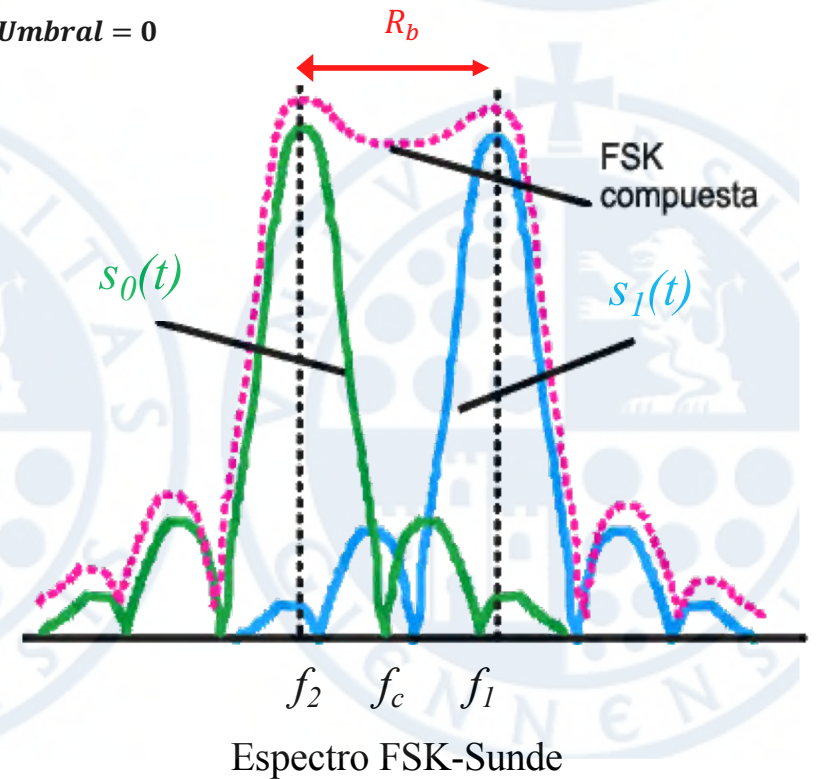
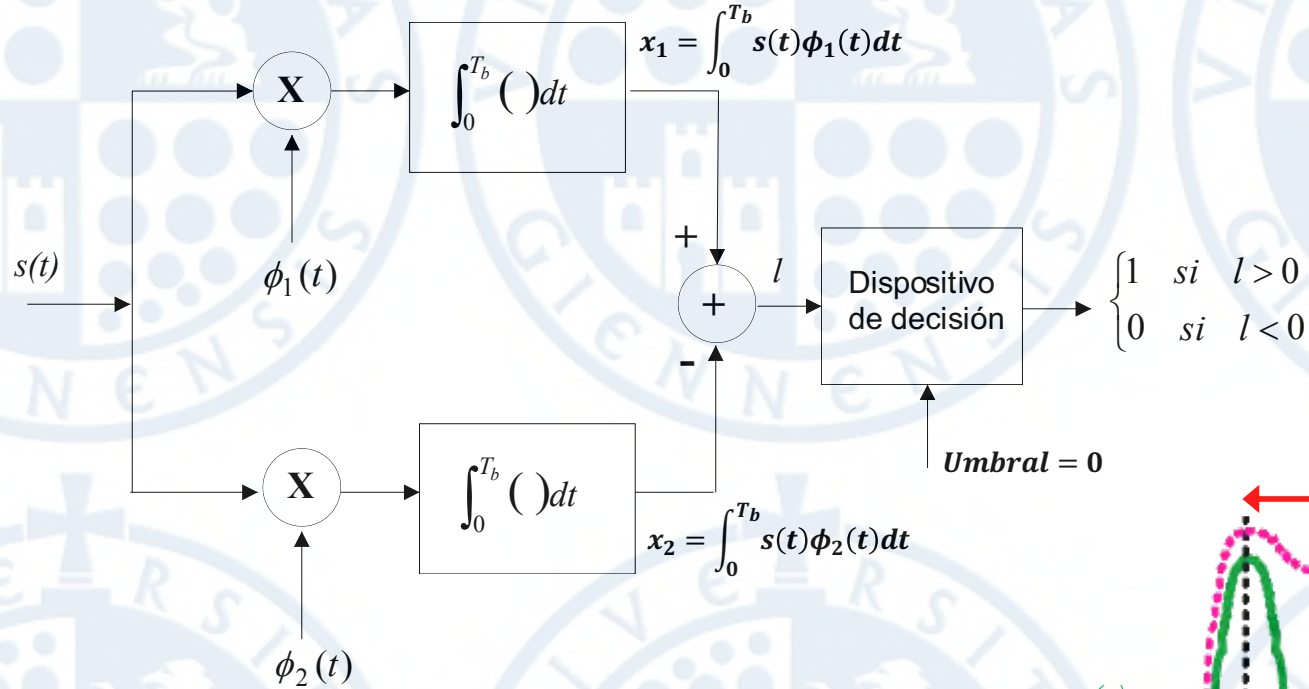


Diagrama de bloques de un transmisor BFSK

Manipulación por desplazamiento de frecuencia binaria coherente (Binary Frequency Shift Keying, BFSK) (III)

Diagrama de bloques de un receptor BFSK coherente



Manipulación por desplazamiento de frecuencia binaria coherente (Binary Frequency Shift Keying, BFSK) (IV)

- Suponiendo que la secuencia binaria de entrada es aleatoria con símbolos equiprobables y que dichos símbolos son estadísticamente independientes en intervalos adyacentes, el espectro BFSK será el siguiente:

$$s(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos\left(\pm \frac{\pi t}{T_b}\right) \cos(2\pi f_c t) - \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \sin\left(\pm \frac{\pi t}{T_b}\right) \sin(2\pi f_c t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos\left(\frac{\pi t}{T_b}\right) \cos(2\pi f_c t) \mp \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \sin\left(\frac{\pi t}{T_b}\right) \sin(2\pi f_c t)$$

- La **componente en fase** es independiente de la secuencia binaria transmitida

⇒ la densidad espectral de potencia $S_{v_I}(f)$ está compuesta por dos deltas

$$h_t(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos\left(\frac{\pi t}{T_b}\right) & 0 \leq t \leq T_b \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \Rightarrow S_{v_I}(f) = \frac{E_b}{2T_b} \left(\delta\left(f - \frac{1}{2T_b}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{2T_b}\right) \right)$$

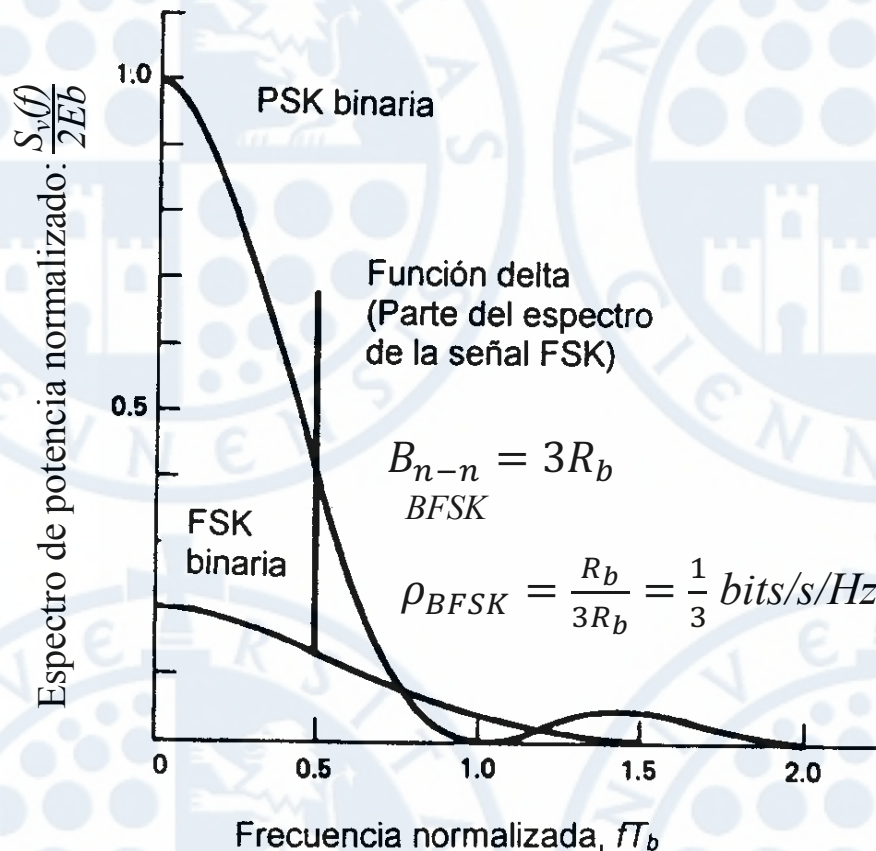
- La **componente en cuadratura** depende de la secuencia binaria transmitida ⇒ $f = f_c \pm \frac{1}{2T_b}$
⇒ la transmisión de bit 1 implica $-h_t(t)$ mientras que la del bit 0 implica $+h_t(t)$

$$h_t(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \sin\left(\frac{\pi t}{T_b}\right) & 0 \leq t \leq T_b \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \Rightarrow |H_t(f)|^2 = \frac{8E_b T_b \cos^2(\pi T_b f)}{\pi^2 (4T_b^2 f^2 - 1)^2} \Rightarrow S_{v_Q}(f) = \frac{|H_t(f)|^2}{T_b}$$

- La densidad espectral de potencia $S_v(f)$ en banda base de la FSK de Sunde es igual a la suma de las densidades espectrales de potencia de sus dos componentes,

$$S_v(f) = S_{v_I} + S_{v_Q} = \frac{E_b}{2T_b} \left(\delta\left(f - \frac{1}{2T_b}\right) + \delta\left(f + \frac{1}{2T_b}\right) \right) + \frac{8E_b \cos^2(\pi T_b f)}{\pi^2 (4T_b^2 f^2 - 1)^2}$$

Manipulación por desplazamiento de frecuencia binaria coherente (Binary Frequency Shift Keying, BFSK) (V)



Observaciones (IMPORTANTE):

- La presencia de dos señales de tipo delta en FSK se utiliza para sincronizar transmisor y receptor
- El espectro de potencia en banda base de FSK de Sunde (con fase continua) decrece con f^4 .
- El espectro de potencia en banda base de FSK con fase discontinua decrece con f^2 .
 - Una señal FSK de fase continua (CPFSK) produce menos interferencias fuera de banda que una señal FSK con fase discontinua.
- Cuanto más suave sea la función $h_i(t)$, más suave es la caída y menores son los lóbulos laterales (p.e., raised cosine, $\alpha > 0$).
 - Debido a que BFSK (CPFSK) con fase continua tiene una función $h_i(t)$ más suave que BPSK, sus lóbulos laterales son menos pronunciados

En general, el ancho de banda B_{n-n} de una señal paso-banda modulada dependerá del pulso de conformación utilizado (pulso $g(t) = h_i(t)$ estudiado en el Tema 4 banda base)

Aplicaciones:

- *ASK*: enlace por fibra óptica (*On-Off Keying*)
- *BPSK*: transmisión de datos binarios eficiente en presencia de ruido, ideal para comunicaciones síncronas, multiportadora (*IEEE 802.11a: 6-9 Mbps*)
- *BFSK*: enlaces asíncronos, baja velocidad, telemetría, módems...

Manipulación por desplazamiento mínimo (Minimum Shift Keying, MSK) (I)

- **Objetivo:** mejora del comportamiento BFSK coherente respecto al ruido explotando la información de fase no solo para sincronización Tx-Rx
 - MSK es una modulación CPFSK que mejora las prestaciones de la FSK-Sunde mediante un receptor más complicado.
 - Telefonía celular Global System for Mobile GSM (2G, 1990). Digital modulation, high vocal rates and low data rates, higher spectral efficiency, higher robustness (interferences), TDMA and CDMA. Europe: 900-1800Mhz. Gaussian MSK (pulso de conformación gaussiano)
- En general, una señal CPFSK se puede representar mediante modulación en fase:

$$s(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos[2\pi f_1 t + \theta(0)] & 0 \leq t \leq T_b \quad \text{Símbolo 1} \\ \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos[2\pi f_2 t + \theta(0)] & 0 \leq t \leq T_b \quad \text{Símbolo 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos[2\pi f_c t + \theta(t)] \\ \theta(t) = \theta(0) \pm \frac{\pi h}{T_b} t, & 0 \leq t \leq T_b \\ \theta(t)_{\text{continuidad}} \Rightarrow s(t)_{\text{continuidad}} \Rightarrow \text{(incluida transición de bits)} \end{cases}$$

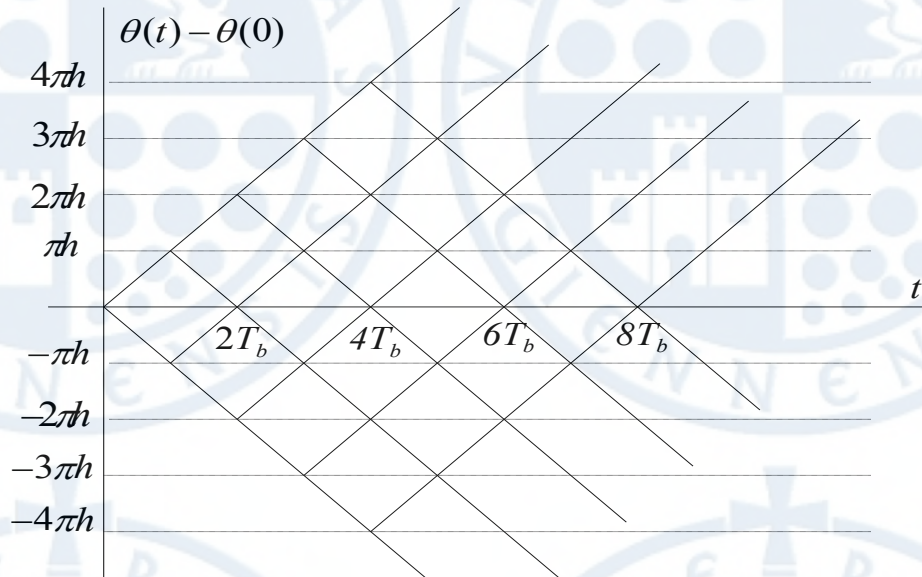
Convenio: el símbolo '1' implica signo '+' y el símbolo '0' implica signo '-'. Se observa que en MSK existe **memoria** ya que la fase depende de la historia pasada del proceso de modulación.

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= f_c + \frac{h}{2T_b} \\ f_2 &= f_c - \frac{h}{2T_b} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f_c = \frac{f_1 + f_2}{2} \Rightarrow h = \frac{f_1 - f_2}{R_b} = T_b \cdot (f_1 - f_2)$$

El parámetro h (**razón de desviación** o **índice de modulación**) mide la diferencia de frecuencias f_1 y f_2 normalizada con respecto el régimen binario R_b

Manipulación por desplazamiento mínimo (Minimum Shift Keying, MSK) (II)

- La modulación binaria CPFSK se representa mediante **Trellis de fase**:

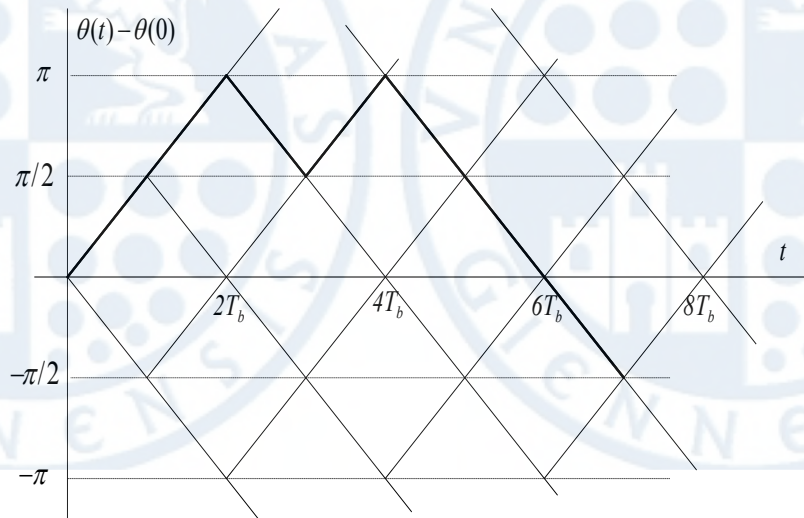


$$\theta(T_b) - \theta(0) = \begin{cases} +\pi h \text{ [rad]} & \text{Símbolo 1} \\ -\pi h \text{ [rad]} & \text{Símbolo 0} \end{cases}$$

(p.e., FSK Sunde = CPFSK sin memoria $\rightarrow h = 1$)

\rightarrow **MSK es una modulación CPFSK utilizando $h = 1/2$** \rightarrow produce variaciones de fase $\pm (\frac{\pi}{2}) \text{ rad}$ en cada T_b dependiendo del símbolo transmitido

El camino en negra representa la secuencia 1101000.



$$\left. \begin{aligned} \theta[(2i-1)T_b] &= \pm \frac{\pi}{2} \\ \theta[(2i)T_b] &= 0, \pi \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} f_1 &= f_c + \frac{1}{4T_b} \\ f_2 &= f_c - \frac{1}{4T_b} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (f_1 - f_2) = \frac{R_b}{2}$$

$\rightarrow \frac{R_b}{2} \text{ (Hz)}$ es la mínima separación de frecuencias para poder detectar coherentemente (ortogonal) una señal BFSK

Manipulación por desplazamiento mínimo (Minimum Shift Keying, MSK) (III)

- Suponiendo transmisión binaria $R_b = \frac{1}{T_b}$,

$$s(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos[\theta(t)] \cos(2\pi f_c t) - \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \sin[\theta(t)] \sin(2\pi f_c t)$$

al utilizar transmisión simultánea mediante dos canales (fase $s_I(t)$, cuadratura $s_Q(t)$) en paralelo, el periodo de símbolo $2T_b$ de cada componente ha de ser el doble de lento para mantener el régimen binario inicial R_b ,

$$h = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta(t) = \theta(0) \pm \frac{\pi}{2T_b} t, \quad 0 \leq t \leq T_b$$

$$s_I(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos[\theta(t)] = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos[\theta(0)] \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2T_b} t\right) = \pm \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2T_b} t\right) \quad \text{Instante central: } t=0$$

$$-T_b \leq t \leq T_b, \Rightarrow \begin{cases} \theta(0) = 0 \rightarrow + \\ \theta(0) = \pi \rightarrow - \end{cases}$$

$$s_Q(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \sin[\theta(t)] = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos[\theta(0)] \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2T_b} t\right) = \pm \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2T_b} t\right) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \sin[\theta(T_b)] \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2T_b} t\right) =$$

$$= \pm \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2T_b} t\right) \quad \text{Instante central: } t=T_b$$

$$0 \leq t \leq 2T_b, \Rightarrow \begin{cases} \theta(T_b) = \frac{\pi}{2} \rightarrow + \\ \theta(T_b) = -\frac{\pi}{2} \rightarrow - \end{cases}$$

$$s(t) = \left[\pm \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2T_b} t\right) \right] \cos(2\pi f_c t) - \left[\pm \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2T_b} t\right) \right] \sin(2\pi f_c t) \quad 0 \leq t \leq T_b$$

MSK^A

Manipulación por desplazamiento mínimo (Minimum Shift Keying, MSK) (IV)

- El espacio de señal MSK es **bidimensional** con base ortonormales $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$.
Expresando la señal MSK de la forma **MSK^A** mediante $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$,

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2T_b}t\right) \cdot \cos(2\pi f_c t) \quad 0 \leq t \leq T_b$$

$$\phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2T_b}t\right) \cdot \sin(2\pi f_c t) \quad 0 \leq t \leq T_b$$

$$s(t) = s_1 \phi_1(t) + s_2 \phi_2(t) = \left(\sqrt{E_b} \cos[\theta(0)]\right) \phi_1(t) + \left(-\sqrt{E_b} \sin[\theta(T_b)]\right) \phi_2(t) \quad 0 \leq t \leq T_b$$

$$s_1 = \int_{-T_b}^{T_b} s(t) \cdot \phi_1(t) dt = \sqrt{E_b} \cos[\theta(0)] \quad -T_b \leq t \leq T_b$$

$$s_2 = \int_0^{2T_b} s(t) \cdot \phi_2(t) dt = -\sqrt{E_b} \sin[\theta(T_b)] \quad 0 \leq t \leq 2T_b$$

Símbolo transmitido $0 \leq t \leq T_b$	Fase $\theta(0)$ (rad)	Fase $\theta(T_b)$ (rad)	Coordenadas	
			s_1	s_2
1	0	$+\pi/2$	$+\sqrt{E_b}$	$-\sqrt{E_b}$
0	π	$+\pi/2$	$-\sqrt{E_b}$	$-\sqrt{E_b}$
1	π	$-\pi/2$	$-\sqrt{E_b}$	$+\sqrt{E_b}$
0	0	$-\pi/2$	$+\sqrt{E_b}$	$+\sqrt{E_b}$

Manipulación por desplazamiento mínimo (Minimum Shift Keying, MSK) (V)

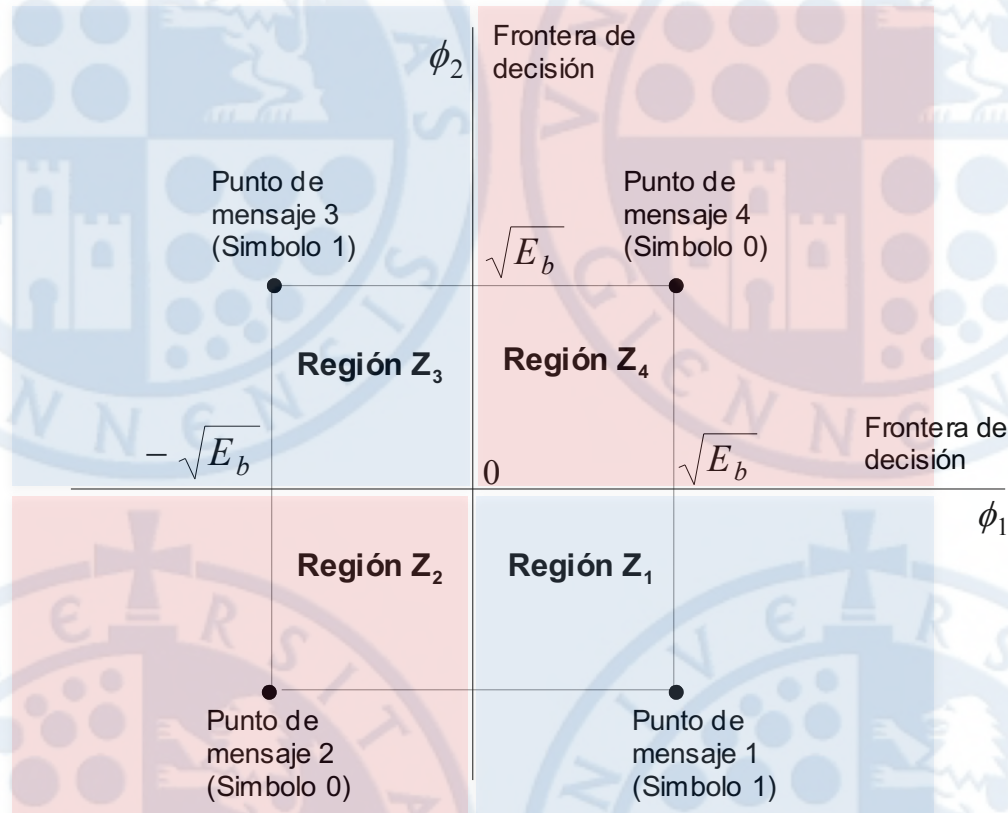


Diagrama del espacio de señal MSK

$$BER = \frac{1}{2} P_e \approx Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{\eta}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}}\right)$$

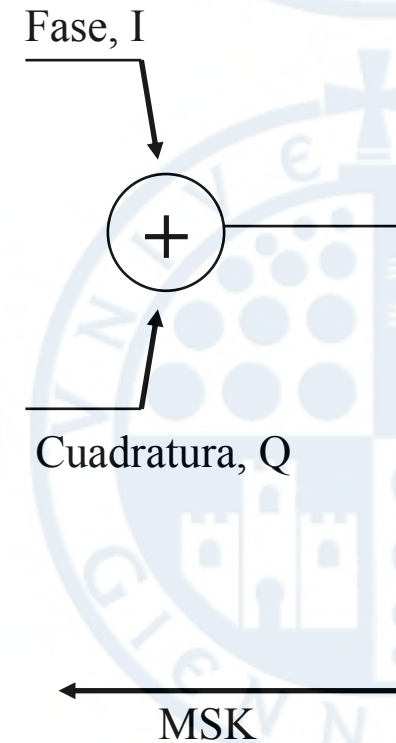
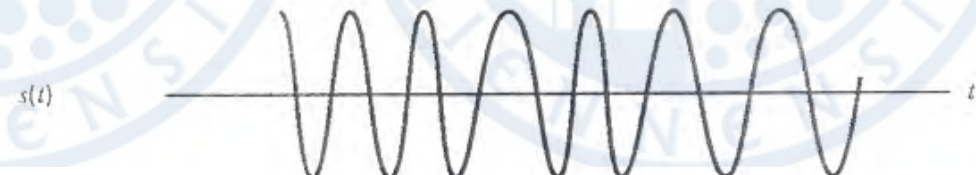
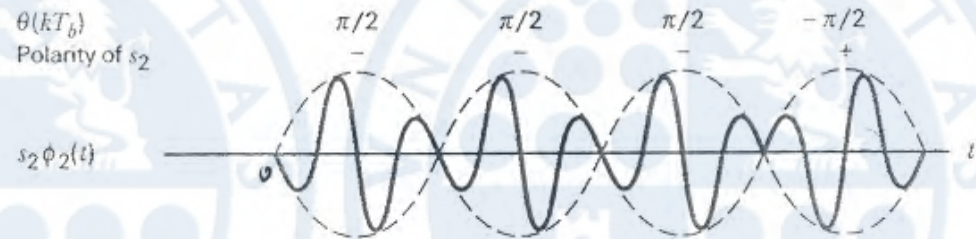
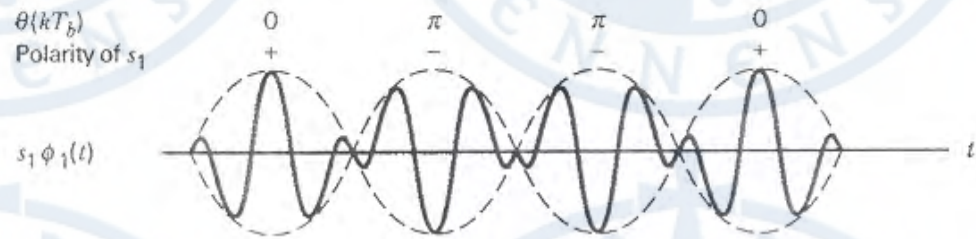
Se puede observar que MSK mejora el comportamiento en términos de P_e comparada con FSK-Sunde:

- $BER_{FSK-Sunde} \cong \text{codificación ortogonales}$
- $BER_{MSK} \cong \text{codificación polar}$

- MSK utiliza dos puntos de mensaje para representar al mismo símbolo: 4 posibles combinaciones de fase inicio-fin del intervalo de bit mediante incremento o decremento de la fase
- MSK: mínima separación de frecuencias para que estas sean ortogonales y fase continua

Manipulación por desplazamiento mínimo (Minimum Shift Keying, MSK) (VI)

Descomposición de la señal MSK $s(t)$ en sus componentes en fase y cuadratura al transmitir la secuencia binaria 1101000 suponiendo que en $t = 0 \rightarrow \vartheta(0) = 0$



Manipulación por desplazamiento mínimo (Minimum Shift Keying, MSK) (VII)

- Detección de $\theta(0)$. (Notar que $x(t)$ es la señal recibida)

$$x_1 = \int_{-T_b}^{T_b} x(t)\phi_1(t)dt = s_1 + \omega_1 \quad (-T_b \leq t \leq T_b)$$

$$s_1 = \int_{-T_b}^{T_b} s(t)\phi_1(t)dt = \sqrt{E_b} \cos[\theta(0)] \quad (-T_b \leq t \leq T_b)$$

Observando las coordenadas de s_1
 si $x_1 > 0$, entonces $\hat{\theta}(0) = 0$
 si $x_1 < 0$, entonces $\hat{\theta}(0) = \pi$

- Detección de $\theta(T_b)$

$$x_2 = \int_0^{2T_b} x(t)\phi_2(t)dt = s_2 + \omega_2 \quad (0 \leq t \leq 2T_b)$$

$$s_2 = \int_0^{2T_b} s(t)\phi_2(t)dt = -\sqrt{E_b} \text{sen}[\theta(T_b)] \quad (0 \leq t \leq 2T_b)$$

Observando las coordenadas de s_2
 si $x_2 > 0$, entonces $\hat{\theta}(T_b) = -\pi/2$
 si $x_2 < 0$, entonces $\hat{\theta}(T_b) = +\pi/2$

$$(\omega_1, \omega_2) \in v. a. g \quad (\eta_n = 0, G_n(f) = \frac{\eta}{2})$$

- Reconstrucción: intercalado estimación de fase

- Las decisiones correspondientes a los estados de fase $\hat{\theta}(0)$ y $\hat{\theta}(T_b)$ son tomadas de forma alternativa en los canales I, Q. La señal se evalúa durante $2T_b$

$\hat{\theta}(0) = 0, \hat{\theta}(T_b) = -\pi/2$	Símbolo 0	Z_2 o Z_4
$\hat{\theta}(0) = \pi, \hat{\theta}(T_b) = \pi/2$		
$\hat{\theta}(0) = \pi, \hat{\theta}(T_b) = -\pi/2$	Símbolo 1	Z_1 o Z_3
$\hat{\theta}(0) = 0, \hat{\theta}(T_b) = \pi/2$		

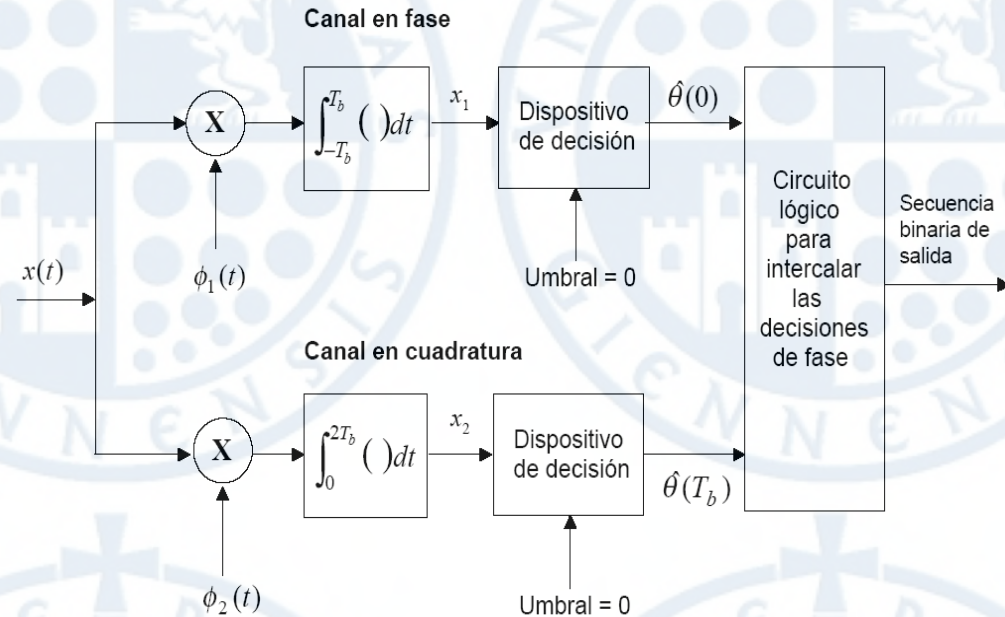
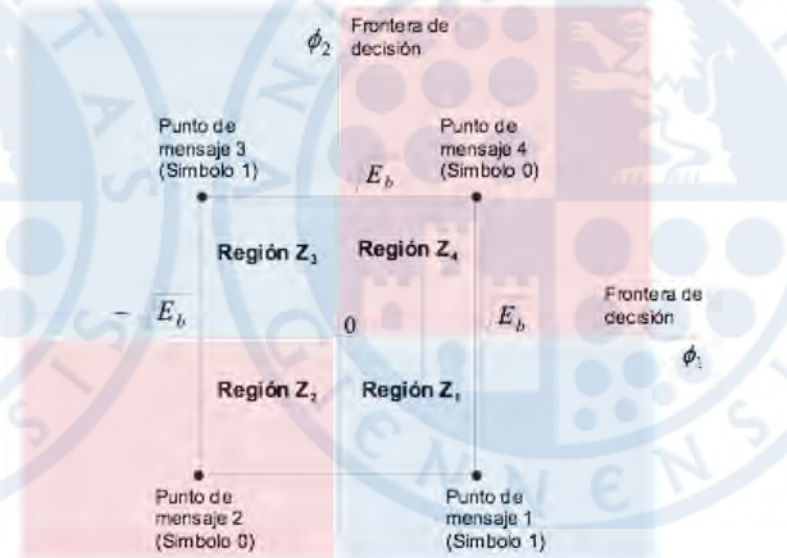


Diagrama de bloques de un receptor MSK



Manipulación por desplazamiento mínimo (Minimum Shift Keying, MSK) (VIII)

• Suponiendo que la secuencia binaria de entrada es aleatoria con símbolos equiprobables y que dichos símbolos son estadísticamente independientes en intervalos adyacentes, el espectro MSK será el siguiente:

- La **componente en fase** depende de la secuencia binaria transmitida. La transmisión de bit 1 implica $+h_t(t)$ y la del bit 0 implica $-h_t(t)$

$$h_t(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos\left(\frac{\pi t}{2T_b}\right) & -T_b \leq t \leq T_b \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \Rightarrow |H_t(f)|^2 = \frac{32E_b T_b \cos^2(2\pi T_b f)}{\pi^2(16T_b^2 f^2 - 1)^2} \Rightarrow S_{v_I}(f) = \frac{|H_t(f)|^2}{2T_b}$$

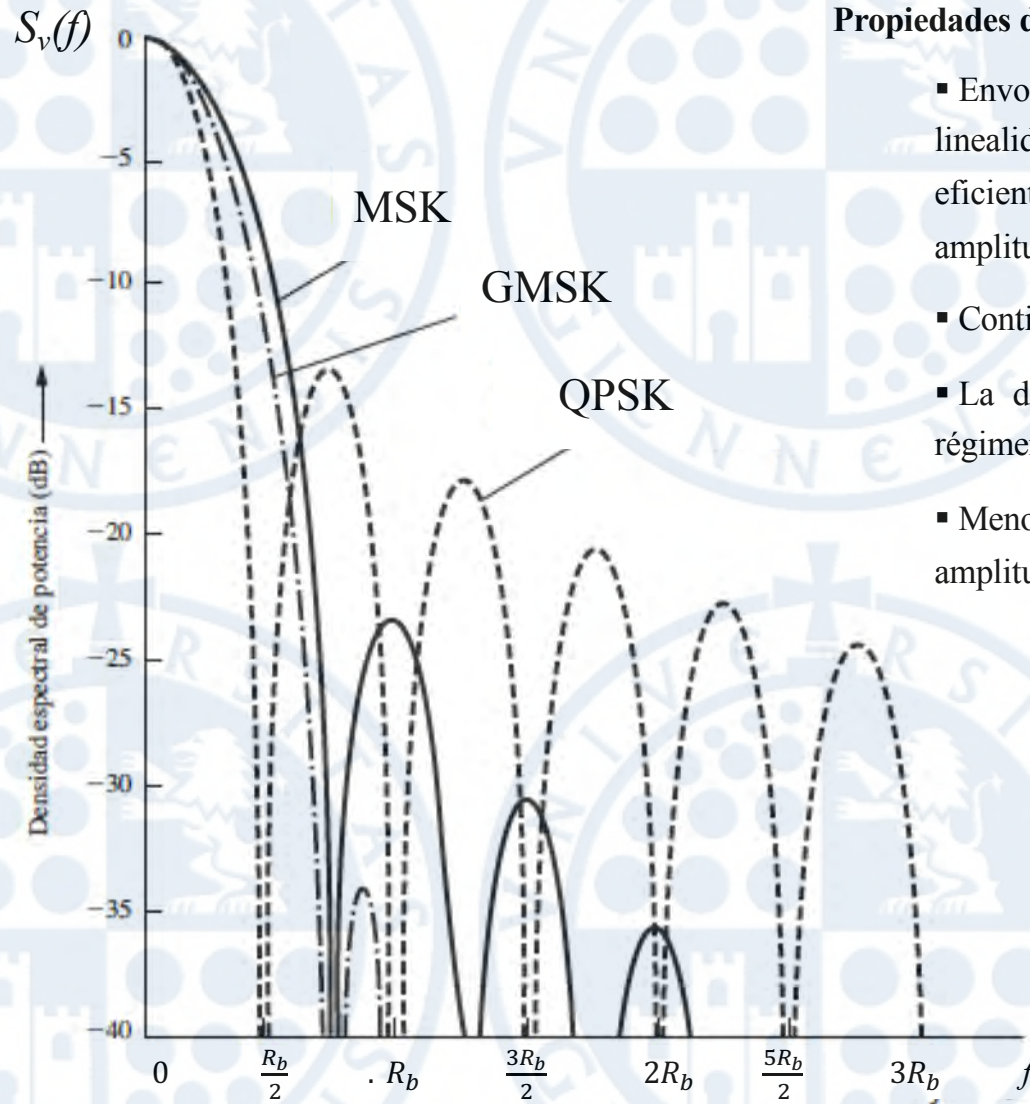
- La **componente en cuadratura** depende de la secuencia binaria transmitida. La transmisión de bit 1 implica $-h_t(t)$ y la del bit 0 implica $+h_t(t)$

$$h_t(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \sin\left(\frac{\pi t}{2T_b}\right) & 0 \leq t \leq 2T_b \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \Rightarrow |H_t(f)|^2 = \frac{32E_b T_b \cos^2(2\pi T_b f)}{\pi^2(16T_b^2 f^2 - 1)^2} \Rightarrow S_{v_Q}(f) = \frac{|H_t(f)|^2}{2T_b}$$

- Debido a que las **componente en fase y cuadratura** de una señal MSK son estadísticamente independientes, la densidad espectral de potencia $S_v(f)$ en banda base de una señal MSK es igual a la suma de las densidades espectrales de potencia de la componente en fase $S_{v_I}(f)$ y cuadratura $S_{v_Q}(f)$

$$S_v(f) = S_{v_I}(f) + S_{v_Q}(f) = \frac{32E_b \cos^2(2\pi T_b f)}{\pi^2(16T_b^2 f^2 - 1)^2} \rightarrow \text{los lóbulos secundarios son prácticamente despreciables} \rightarrow \text{gran confinamiento espectral}$$

Manipulación por desplazamiento mínimo (Minimum Shift Keying, MSK) (IX)



Propiedades de MSK

- Envolvente constante: menor distorsión efecto no-linealidad. Utilización de amplificadores de alta potencia eficientemente en consumo: zona saturación \rightarrow cambios amplitud de señal (comunicaciones satélite)
- Continuidad de fase en las transiciones de bit
- La desviación de frecuencia es igual a la mitad del régimen binario
- Menor interferencia fuera de banda (no fluctuaciones de amplitud): adecuado para canales limitados en banda

$$B_{n-n}^{MSK} = \frac{3}{2} R_b \Rightarrow \rho_{MSK} = \frac{R_b}{B_{n-n}} = \frac{R_b}{1.5R_b} = \frac{2}{3} \approx 0.66 \text{ bits/s/Hz}$$