



Departamento de Ingeniería de Telecomunicación  
Teoría de la Señal y Comunicaciones  
Universidad de Jaén

## TEMA 2

# SEÑALES DETERMINÍSTICAS (III)

# Contenidos

---

1. Transformada de Hilbert
2. Señales analíticas
3. Señales paso-banda

# Objetivos específicos

---

- Señal **paso-bajo** y **paso-banda**
- Señal **analítica**
- Señal **envolvente compleja** para señales **paso banda** reales
- Señal **equivalente paso-bajo** de una señal **paso-banda** real



# Transformada de Hilbert (I)

---

- La transformada de Fourier permite separar señales según su contenido espectral (frecuencia). Otra forma de separar señales es considerando la fase de las mismas. Este tipo de cambios en la fase es lo que permite calcular la **Transformada de Hilbert**  $\hat{x}(t)$  de la señal  $x(t)$ ,

$$\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

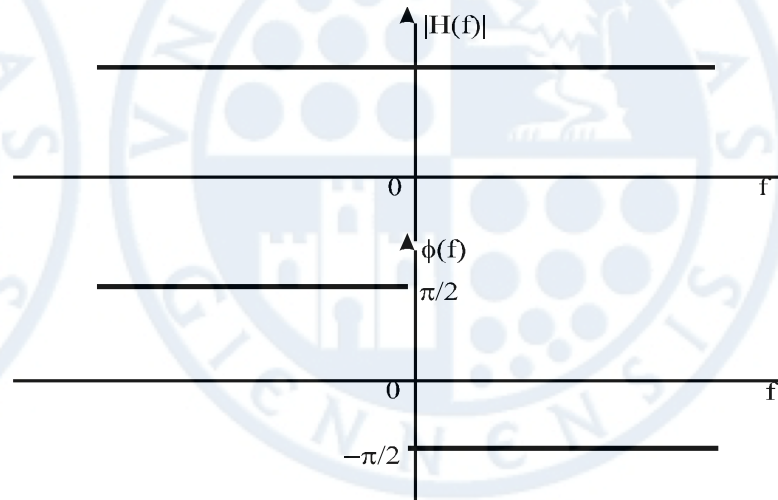
- La transformada de Hilbert  $\hat{x}(t)$ , no es en sentido estricto una “transformación” ya que no cambia a otro dominio. En realidad la **transformada de Hilbert**  $\hat{x}(t)$  puede verse más como una operación de **filtrado** donde  $h_{TH}(t)$  (transformador Hilbert o **filtro en cuadratura**) adelanta (desfase)  $90^\circ$  la señal de entrada  $x(t)$  manteniendo sin alterar el espectro en amplitud

$$h_{TH}(t) = \frac{1}{\pi t} \Rightarrow H_{TH}(f) = -j \cdot \text{sgn}(f) = \begin{cases} -j & f > 0 \\ +j & f < 0 \end{cases}$$

- Resumiendo, una señal  $x(t)$  y su transformada de Hilbert  $\hat{x}(t)$  se dice que se encuentran en cuadratura



# Transformada de Hilbert (II)



$$H_{TH}(f) = -j \cdot \text{sgn}(f)$$

La respuesta en frecuencia del filtro en cuadratura.

- La deconvolución y la autocorrelación de la señal  $x(t)$  coincide con la deconvolución y la autocorrelación de su transformada de Hilbert  $\hat{x}(t)$

$$\mathcal{F}(\hat{x}(t)) = \hat{X}(f) = \mathcal{F}(x(t)) \cdot \mathcal{F}\left(\frac{1}{\pi t}\right) = X(f) \cdot (-j \cdot \text{sgn}(f))$$

$$S_{\hat{x}}(f) = |X(f)|^2 \cdot |(-j \cdot \text{sgn}(f))|^2 = S_x(f) \Rightarrow \rho_{\hat{x}}(\tau) = \rho_x(\tau)$$

- La **densidad espectral cruzada de energía (o de potencia)**  $S_{\hat{x}x}(f)$  de la señal de entrada  $x(t)$  y salida  $\hat{x}(t)$  del filtro en cuadratura  $h_{TH}(t)$ ,

$$\begin{aligned} S_{\hat{x}x}(f) &= \mathcal{F}(\hat{x}(\tau) * x^*(-\tau)) = \hat{X}(f) \cdot X^*(f) = \\ &= X(f) \cdot H_{TH}(f) \cdot X^*(f) = S_x(f) \cdot (-j \cdot \text{sgn}(f)) \end{aligned}$$

si  $x(t)$  es real  
 $\Rightarrow S_{\hat{x}x}(f)$  es imaginaria pura !!

# Transformada de Hilbert (III)

---

- La **correlación cruzada** de la señal  $x(t)$  y su transformada de Hilbert,

$$\begin{aligned}\rho_{\hat{x}x}(\tau) &= \mathcal{F}^{-1} \left( S_x(f) \cdot (-j \cdot \text{sgn}(f)) \right) = \mathcal{F}^{-1} \left( S_x(f) \right) * \mathcal{F}^{-1} \left( -j \cdot \text{sgn}(f) \right) = \\ &= \rho_x(\tau) * \frac{1}{\pi\tau} = \mathcal{H}(\rho_x) = \hat{\rho}_x(\tau)\end{aligned}$$

- **Propiedades**

- La señal  $x(t)$  y  $\hat{x}(t)$  tienen la misma densidad espectral  $S_{\hat{x}}(f) = S_x(f)$  ( $G_{\hat{x}}(f) = G_x(f)$ ) y función de autocorrelación  $\rho_{\hat{x}}(\tau) = \rho_x(\tau)$  ( $R_{\hat{x}}(\tau) = R_x(\tau)$ )
- $\mathcal{H}(x(t)) = \hat{x}(t)$
- $\mathcal{H}(\hat{x}(t)) = -x(t)$ . Al aplicar dos veces la transformada de Hilbert a la señal  $x(t)$ , ésta desfasa  $180^\circ$  todas las componentes de frecuencia de la señal de entrada  $x(t)$
- La transformada de Hilbert  $\hat{x}(t)$  de una señal  $x(t)$  real es real
- La transformada de Hilbert  $\hat{x}(t)$  de una señal  $x(t)$  par es impar.
- La transformada de Hilbert  $\hat{x}(t)$  de una señal  $x(t)$  impar es par
- Una señal  $x(t)$  y su transformada de Hilbert  $\hat{x}(t)$  son ortogonales  $\Rightarrow \rho_{\hat{x}x}(0) = 0$



# Transformada de Hilbert (IV)

---

Transformadas de Hilbert	
$x(t)$	$\hat{x}(t)$
$\cos(\omega_c t)$	$\sin(\omega_c t)$
$\sin(\omega_c t)$	$-\cos(\omega_c t)$
$e^{j\omega_c t}$	$-je^{j\omega_c t}$
$m(t)\cos(\omega_c t)$	$m(t)\sin(\omega_c t)$
$m(t)\sin(\omega_c t)$	$-m(t)\cos(\omega_c t)$
$x(t)e^{j\omega_c t}$	$-jx(t)e^{j\omega_c t}$
$\delta(t)$	$\frac{1}{\pi t}$
$\frac{1}{t}$	$-\pi\delta(t)$

<sup>a</sup>En los dos primeros pares de transformadas se ha considerado que  $m(t)$  está limitada en banda en el intervalo  $-W \leq f \leq W$  con  $W < f_c$



# Señales analíticas (I)

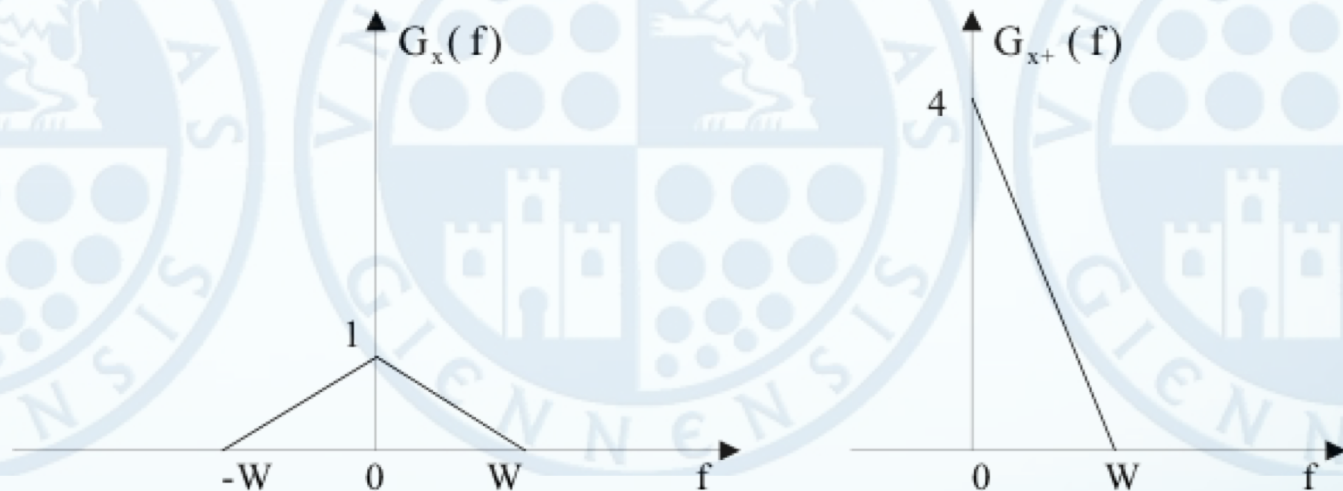
- Sea la señal  $x(t)$  definida en **energía o potencia**. Se define la **señal analítica positiva**  $x_+(t)$  (paso bajo) de la señal  $x(t)$  *paso-bajo* a la siguiente señal compleja,

$$x_+(t) = x(t) + j \cdot \hat{x}(t)$$

- La transformada de Fourier  $X_+(f)$  de la señal analítica  $x_+(t)$ ,

$$\begin{aligned} X_+(f) &= X(f) + j \cdot \hat{X}(f) = X(f) + j \cdot X(f) \cdot (-j \cdot \text{sgn}(f)) \\ &= X(f) \cdot (1 + \text{sgn}(f)) \end{aligned}$$

$$X_+(f) = \begin{cases} 2 \cdot X(f), & f > 0 \\ X(f), & f = 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} \Rightarrow S_{x_+}(f) = \begin{cases} 4 \cdot S_x(f), & f > 0 \\ 2 \cdot S_x(f), & f = 0 \\ 0, & f < 0 \end{cases} \Rightarrow S_{x_+}(f) = 2 \cdot S_x(f) \cdot (1 + \text{sgn}(f))$$



# Señales analíticas (II)

---

- La **autocorrelación**  $\rho_{x_+}(\tau)$  de la señal analítica positiva  $x_+(t)$  (**análogo a potencia**):

$$x_+(t) = x(t) + j \cdot \hat{x}(t)$$

$$\begin{aligned}\rho_{x_+}(\tau) &= x_+(\tau) * x_+^*(-\tau) = (x(\tau) + j \cdot \hat{x}(\tau)) * (x^*(-\tau) - j \cdot \hat{x}^*(-\tau)) = \\ &= \rho_x(\tau) - j \cdot \rho_{x\hat{x}}(\tau) + j \cdot \rho_{\hat{x}x}(\tau) + \rho_{\hat{x}}(\tau) = \\ &= 2 \cdot \rho_x(\tau) + j(\rho_{\hat{x}x}(\tau) - \rho_{x\hat{x}}(\tau)) = \\ &= 2 \cdot \rho_x(\tau) + j(\rho_{\hat{x}x}(\tau) - \rho_{\hat{x}x}^*(-\tau)) = \\ &= 2 \cdot \rho_x(\tau) + j(\hat{\rho}_x(\tau) - \hat{\rho}_x^*(-\tau))\end{aligned}$$

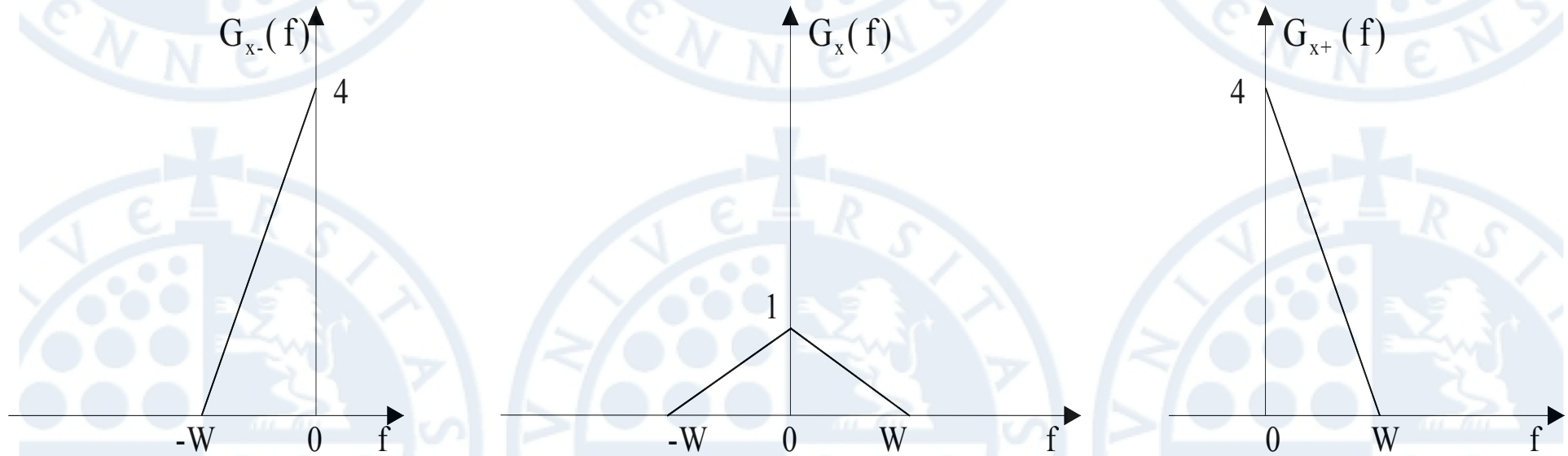
- Si la señal  $x(t)$  es real  $\Rightarrow \rho_x(\tau)$  es real y par  $\Rightarrow \hat{\rho}_x(\tau)$  es real e impar. Teniendo en cuenta esto último:

$$\begin{aligned}\rho_{x_+}(\tau) &= 2 \cdot \rho_x(\tau) + j(\hat{\rho}_x(\tau) - \hat{\rho}_x^*(-\tau)) = 2 \cdot \rho_x(\tau) + j \cdot (\hat{\rho}_x(\tau) - \hat{\rho}_x(-\tau)) = \\ &= 2 \cdot \rho_x(\tau) + j \cdot (\hat{\rho}_x(\tau) + \hat{\rho}_x(\tau)) = 2 \cdot (\rho_x(\tau) + j \cdot \hat{\rho}_x(\tau))\end{aligned}$$

# Señales analíticas (III)

- A veces se utiliza la señal analítica negativa  $x_-(t)$  definida de la manera siguiente:

$$x_-(t) = x(t) - j \cdot \hat{x}(t)$$



Espectros de potencia de las señales analíticas de la señal  $x(t)$

- La **autocorrelación**  $\rho_{x_-}(\tau)$  de la señal analítica negativa  $x_-(t)$  (**análogo a potencia**):

$$\rho_{x_-}(\tau) = 2 \cdot (\rho_x(\tau) - j \cdot \hat{\rho}_x(\tau))$$

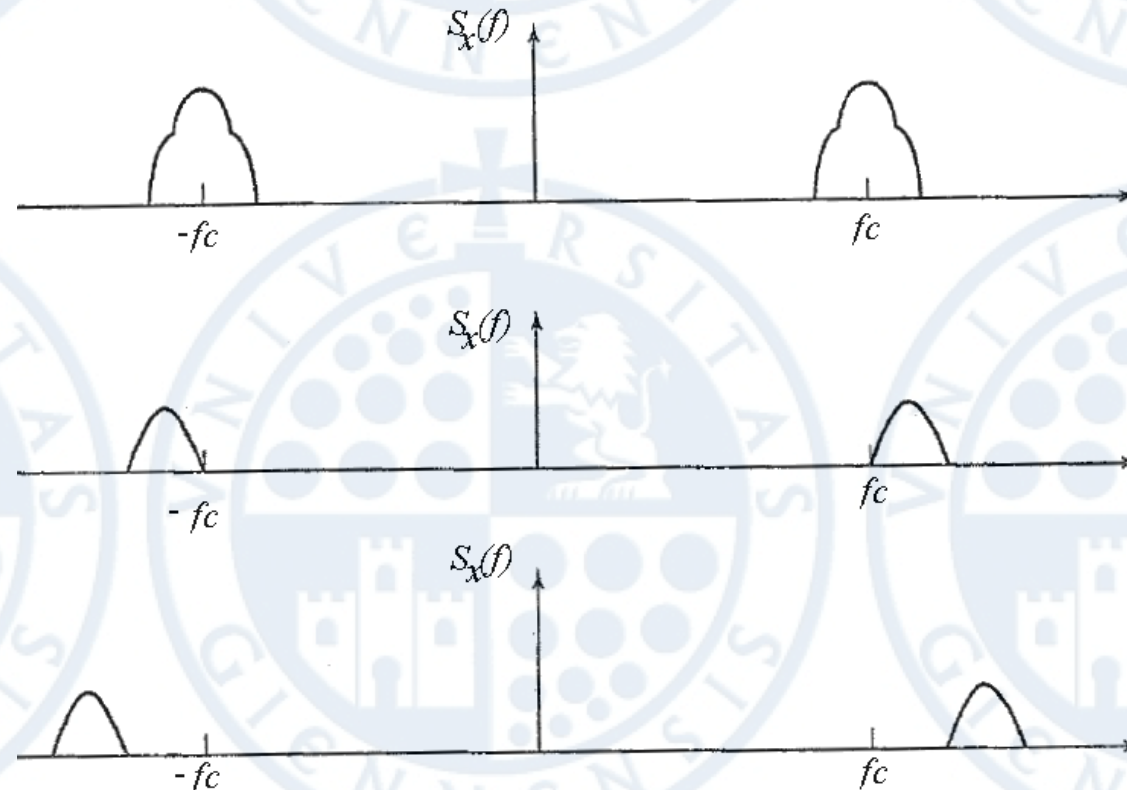


# Señales paso-banda (I)

- Las señales  $x(t)$  con las que se suele trabajar en un sistema de comunicación son **reales paso-banda de banda estrecha** ( $W \ll f_c$ ), donde el espectro es **no nulo** en un rango de frecuencias alrededor de una frecuencia  $\uparrow f_c$  (**portadora**).

$$S_x(f) = 0 \quad \text{para } |f - f_c| \geq W \text{ con } f_c > W$$

$$G_x(f) = 0 \quad \text{para } |f - f_c| \geq W \text{ con } f_c > W$$



DEE de señales reales paso banda de banda estrecha

# Señales paso-banda (II)

---

- Sea la señal analítica  $x_+(t)$  (paso-banda) de una señal  $x(t)$  **paso-banda**,

$$x_+(t) = x(t) + j \cdot \hat{x}(t) = v_x(t) \cdot e^{j \cdot 2\pi f_c \cdot t}$$

, donde  $v_x(t)$  (compleja y paso bajo) es la **envolvente compleja** o **equivalente paso bajo** de la señal  $x(t)$ . La señal  $v_x(t)$  es una señal **compleja** (aún siendo  $x(t)$  real) y **paso-bajo** y se puede descomponer en parte real y parte imaginaria o módulo-fase.

$$v_x(t) = x_F(t) + j \cdot x_C(t) = r_x(t) \cdot e^{j\varphi_x(t)}, \quad |v_x(t)| = r_x(t)$$

$v_x(t)$  (compleja y paso bajo) es la **envolvente compleja** o **equivalente paso bajo** de la señal  $x(t)$

$x_F(t)$  (real y paso bajo) es la **componente en fase** de señal  $x(t)$

$x_C(t)$  (real y paso bajo) es la **componente en cuadratura** de  $x(t)$

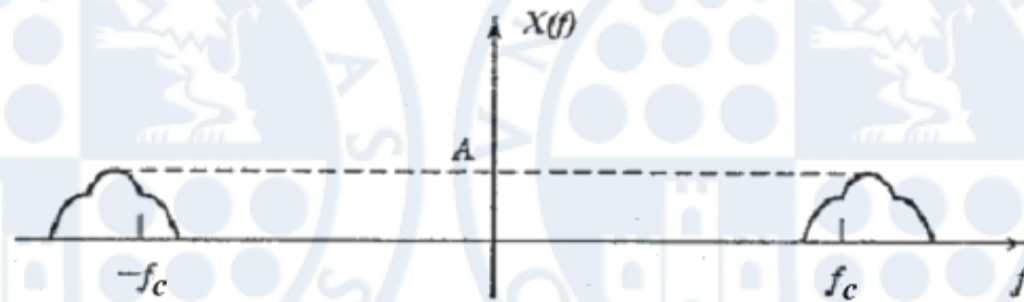
$r_x(t)$  (real y paso bajo) es la **envolvente real**, envolvente natural o simplemente envolvente de  $x(t)$

$\varphi_x(t)$  (real y paso bajo) es la **desviación de fase** de  $x(t)$  respecto de  $\omega_c \cdot t$

Resumiendo, una  $x(t)$  señal paso-banda se puede expresar mediante señales paso bajo



# Señales paso-banda (III)



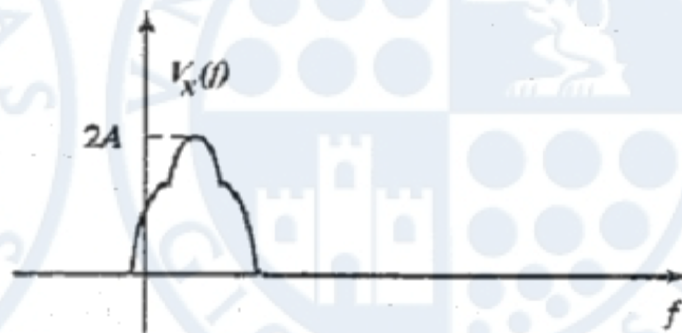
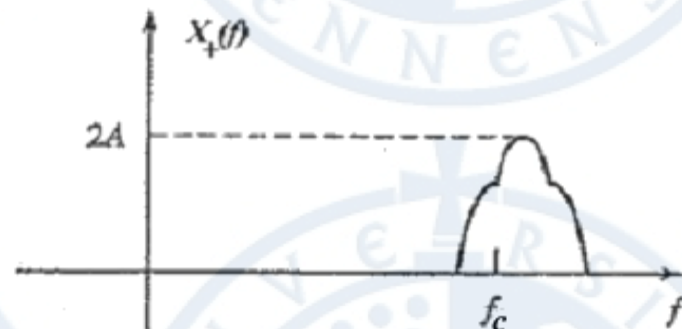
$$S_x(f) = |X(f)|^2$$

$$S_{v_x}(f) = |V_x(f)|^2$$

$$S_x(f) = \frac{1}{4} [S_{v_x}(f - f_c) + S_{v_x}(-f - f_c)]$$

(Couch 234)

Se puede observar como el espectro en energía  $S_x(f)$  paso banda de la señal paso banda  $x(t)$  se puede construir a partir del espectro  $S_{v_x}(f)$  paso bajo de la envolvente compleja  $v_x(t)$



El espectro de la envolvente compleja no tiene que ser par ya que la envolvente compleja es una señal compleja

Espectro de amplitud de: (top) señal  $x(t)$  real paso-banda; (middle) señal analítica  $x_+(t)$  asociada; (bottom) envolvente compleja  $v_x(t)$  asociada



# Señales paso-banda (IV)

---

- Considerando la señal  $x(t)$  real paso-banda de banda estrecha,

$$x_+(t) = x(t) + j \cdot \hat{x}(t) = v_x(t) \cdot e^{j \cdot 2\pi f_c \cdot t} \quad x(t) = \operatorname{Re} \left[ v_x(t) \cdot e^{j \cdot 2\pi f_c \cdot t} \right]$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{Re} \left[ v_x(t) \cdot e^{j \cdot 2\pi f_c \cdot t} \right] = \operatorname{Re} \left[ (x_F(t) + j \cdot x_C(t)) \cdot e^{j \cdot 2\pi f_c \cdot t} \right] = \\ &= \operatorname{Re} \left[ (x_F(t) + j \cdot x_C(t)) \cdot (\cos(2\pi f_c \cdot t) + j \cdot \sin(2\pi f_c \cdot t)) \right] = \\ &= x_F(t) \cdot \cos(2\pi f_c \cdot t) - x_C(t) \cdot \sin(2\pi f_c \cdot t) \end{aligned}$$

$$\boxed{x(t) = x_F(t) \cdot \cos(2\pi f_c \cdot t) - x_C(t) \cdot \sin(2\pi f_c \cdot t)}$$

- Expresión que permite determinar la señal  $x(t)$  a partir de la envolvente real y de la fase:

$$x(t) = \operatorname{Re} \left[ v_x(t) \cdot e^{j \cdot 2\pi f_c \cdot t} \right] = \operatorname{Re} \left[ r_x(t) \cdot e^{j \cdot (2\pi f_c \cdot t + \varphi_x(t))} \right] = \operatorname{Re} \left[ r_x(t) \cdot e^{j \cdot \psi(t)} \right]$$

$$x(t) = r_x(t) \cdot \cos(2\pi f_c \cdot t + \varphi_x(t)) = r_x(t) \cdot \cos(\psi(t))$$

, donde la variable  $\psi(t)$  se denomina **fase instantánea** de  $x(t)$

- En las modulaciones lineales, la información de la moduladora está codificada en  $r_x(t)$  mientras que en las modulaciones angulares se encuentra en  $\varphi_x$  (Seminario II)

# Señales paso-banda (V)

La **relación** existente entre estas descripciones de las señales paso-banda

$$\begin{aligned}
 x(t) &= r_x(t) \cdot \cos(2\pi f_c \cdot t + \varphi_x(t)) = \\
 &= r_x(t) \cdot \cos(\varphi_x(t)) \cdot \cos(2\pi f_c \cdot t) - r_x(t) \cdot \sin(\varphi_x(t)) \cdot \sin(2\pi f_c \cdot t)
 \end{aligned}$$

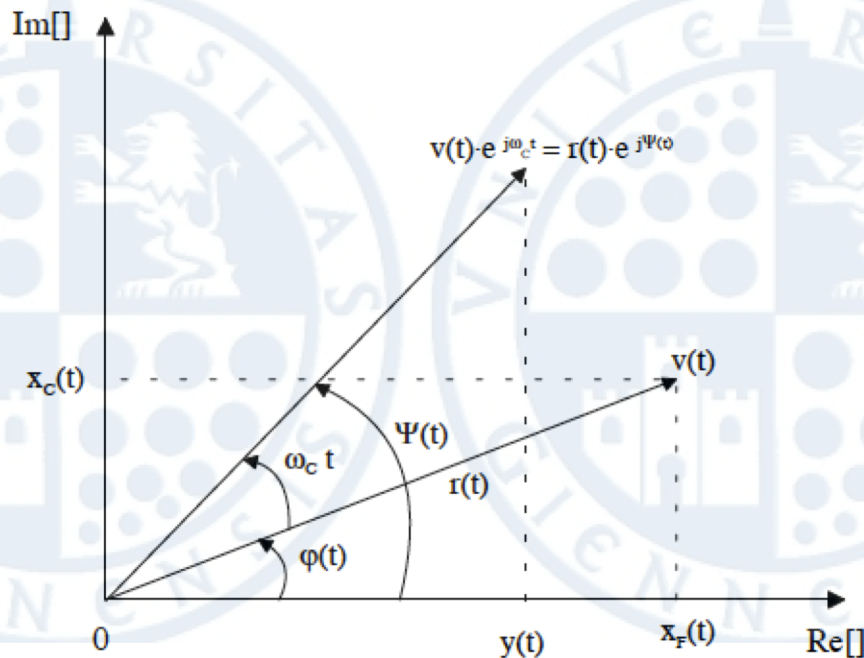
de donde se tiene que:

$$x_F(t) = r_x(t) \cdot \cos(\varphi_x(t))$$

$$x_C(t) = r_x(t) \cdot \sin(\varphi_x(t))$$

$$r_x(t) = \sqrt{x_F^2(t) + x_C^2(t)}$$

$$\varphi_x(t) = \tan^{-1} \left( \frac{x_C(t)}{x_F(t)} \right)$$



Representación fasorial de una señal paso-banda  $x(t)$  con sus señales paso-bajo asociadas.



# Señales paso-banda (VI)

---

- Determinando la transformada de Hilbert  $\hat{x}(t)$  a partir de las componentes en fase y cuadratura,

$$x_+(t) = x(t) + j \cdot \hat{x}(t) = v_x(t) \cdot e^{j \cdot 2\pi f_c \cdot t} \quad \hat{x}(t) = \text{Im} \left[ v_x(t) \cdot e^{j \cdot 2\pi f_c \cdot t} \right]$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \text{Im} \left[ v_x(t) \cdot e^{j \cdot 2\pi f_c \cdot t} \right] = \text{Im} \left[ (x_F(t) + j \cdot x_C(t)) \cdot e^{j \cdot 2\pi f_c \cdot t} \right] = \\ &= \text{Im} \left[ (x_F(t) + j \cdot x_C(t)) \cdot (\cos(2\pi f_c \cdot t) + j \cdot \sin(2\pi f_c \cdot t)) \right] \end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{x}(t) = x_F(t) \cdot \sin(2\pi f_c \cdot t) + x_C(t) \cdot \cos(2\pi f_c \cdot t)}$$

- **Determinando** la transformada de Hilbert  $\hat{x}(t)$  a partir de envolvente real y la fase,

$$x_+(t) = x(t) + j \cdot \hat{x}(t) = v_x(t) \cdot e^{j \cdot 2\pi f_c \cdot t} \quad \hat{x}(t) = \text{Im} \left[ v_x(t) \cdot e^{j \cdot 2\pi f_c \cdot t} \right]$$

$$\hat{x}(t) = \text{Im} \left[ r_x(t) \cdot e^{j \cdot (2\pi f_c \cdot t + \varphi_x(t))} \right]$$

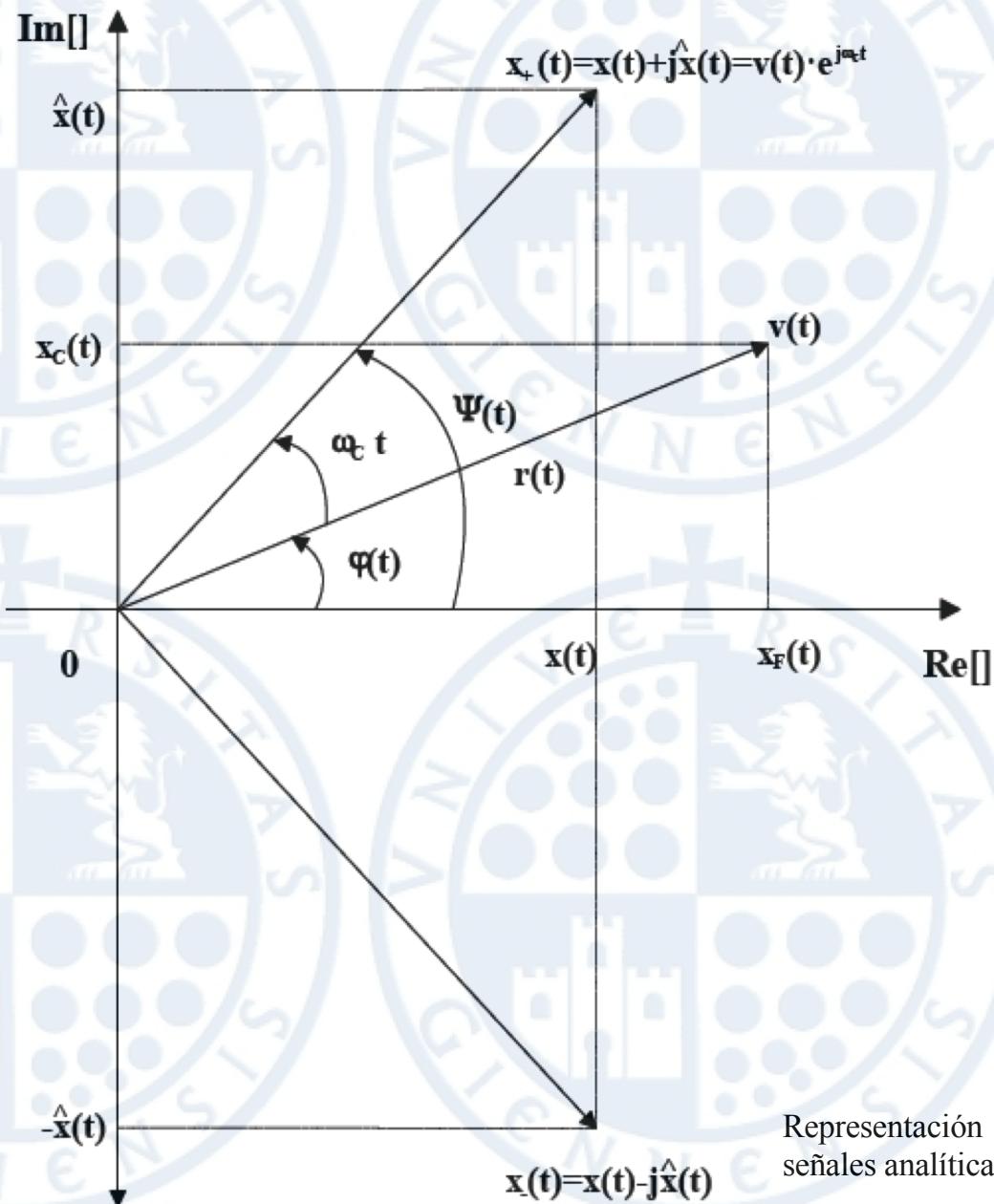
$$\hat{x}(t) = r_x(t) \cdot \sin(2\pi f_c \cdot t + \varphi_x(t)) = r_x(t) \cdot \sin(\psi(t))$$

- La señal analítica negativa  $x_-(t)$  (compleja y paso-banda) se puede expresar como:

$$x_-(t) = x(t) - j \cdot \hat{x}(t) = \left( v_x(t) \cdot e^{j \cdot 2\pi f_c \cdot t} \right)^* = \left( v_x(t) \right)^* \cdot e^{-j \cdot 2\pi f_c \cdot t}$$



# Señales paso-banda (VII)



Representación fasorial de una señal paso-banda  $x(t)$  con sus señales analíticas asociadas.