Probabilidad

Grado en Matemáticas

Curso 2018-2019

Hoja de Problemas 7

Fecha de Entrega: **Miércoles, 3 de Abril**

1. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$,

$$X \sim U(0, 1).$$

(a) Determinar la distribución de la variable aleatoria

$$Y = -5 \ln(X).$$

¿Se trata de una distribución conocida?

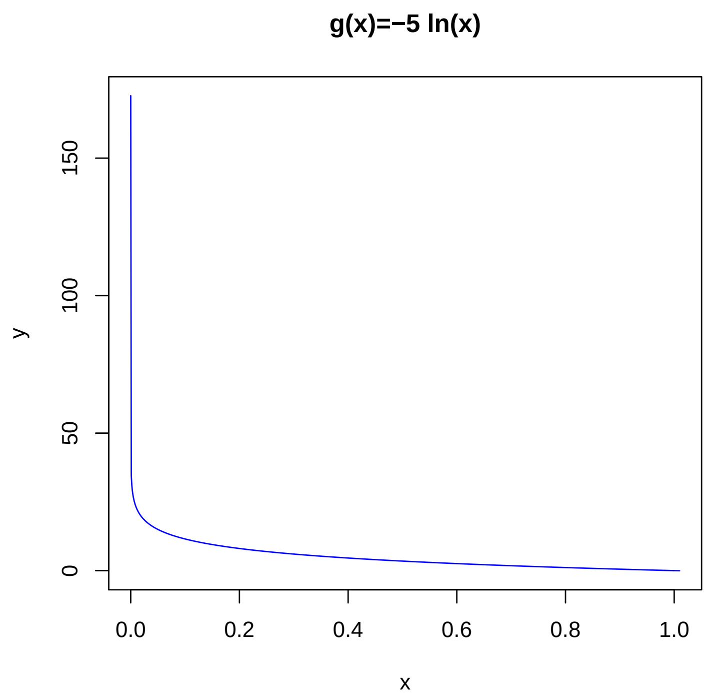
(b) Calcular $P(2 < Y < 4)$.

(c) ¿Cuál es la esperanza de Y? ¿Cuál es su desviación típica?

Solución: Puesto que $X \sim U(0, 1)$, su función de distribución es

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ x & \text{si } 1 < x < 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Queremos determinar la función de densidad de la variable aleatoria $Y = -5\ln(X)$. Para ello comenzaremos por encontrar su función de distribución.
El gráfico siguiente representa la función $g(x) = -5\ln(x)$ en el intervalo (0,1), que es el soporte de X. En él puede apreciarse que el **soporte** de $Y = -5\ln(X)$ será el intervalo $(0, \infty)$.



Por tanto sabemos que $F_Y(t) = 0$ para todo $t < 0$. Para $t \geq 0$ tenemos que

$$F_Y(t) = P(T \leq t) = P\left(-5\ln(X) \leq t\right) = P\left(\ln(X) \geq -\frac{t}{5}\right) = P\left(X \geq e^{-\frac{t}{5}}\right) = 1 - F_X\left(e^{-\frac{t}{5}}\right) = 1 - e^{-\frac{t}{5}}$$

Juntando ambos tramos tenemos que, la expresión completa de la función de distribución de Y es

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ \\ 1 - e^{-\frac{t}{5}} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Como puede observarse, esta función de distribución corresponde a una variable aleatoria con parámetro $\lambda = \dfrac{1}{5}$, es decir,

$$Y \sim Exp\left(\frac{1}{5}\right).$$

Su función de densidad, que se obtiene derivando $F_Y(t)$, es

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ \\ \dfrac{1}{5}\, e^{-\frac{t}{5}} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Observación: Dado que la tranformación

$$g(x) = -5\ln(x),$$

es **estrictamente decreciente**,también se puede determinar directamente la función de densidad de Y aplicando el **teorema sobre la función de densidad transformaciones estrictamente monotonas de variables aleatorias continuas** (Teorema 2 del Tema 3).
Recordemos que la función de densidad de $X \sim U(0, 19)$ es

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0,1), \\ \\ 0 & \text{si } x \notin (0,1). \end{cases}$$

Además, para nuestra trasformación se tiene que

$$\alpha = \min\{\, g(x) \ : \ x \in S_X\} = 0,$$

$$\beta = \max\{\, g(x) \ : \ z \in S_X\} = \infty.$$

$$h(t) = g^{-1}(t) = e^{-\frac{t}{5}},$$

$$h'(t) = -\frac{1}{5}e^{-\frac{t}{5}}.$$

Luego, para $t \leq 0$ se tiene $f_Y(t) = 0$, y para $t > 0$

$$f_Y(t) = f_X\left(h(t)\right) \cdot |h'(t)| = 1 \times \left| -\frac{1}{5}e^{-\frac{t}{5}} \right| = \frac{1}{5}e^{-\frac{t}{5}}.$$

Por tanto la expresión completa de la **función de densidad de Y** es

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \\ \frac{1}{5}\, e^{-\frac{t}{5}} & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

que se corresponde con la densidad de una **distribución exponencial con intensidad $\lambda = \frac{1}{5}$**.

(b) $P(2 < Y < 4) = e^{-\frac{2}{5}} - e^{-\frac{4}{5}} = \mathbf{0.221}$

(c) Puesto que $Y \sim Exp\left(\frac{1}{5}\right)$, su esperanza es

$$E(Y) = \frac{1}{\frac{1}{5}} = \mathbf{5},$$

su varianza

$$E(Y) = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = 25,$$

por lo que la desviación típica es

$$\sigma_Y = \mathbf{5}.$$

Recuérdese que **la distribución exponencial es la única para la cual la esperanza y la desviación típica coinciden**.

2. En cierto restaurante un tercio de los clientes son españoles y el resto son extrajeros. La cantidad de dinero que gastan los clientes españoles en dicho restaurante sigue una distribución normal con media 100 euros y desviación típica 7 euros, mientras que la cantidad consumida por los clientes extranjeros es también normal con media 91 euros y varianza 81 euros^2.

(a) Sean E la cantidad que gasta en el restaurante un español elegido al azar, y X la que consume un cliente extranjero seleccionado aleatoriamente. ¿Es mayor $P(E > 100)$ o $P(X > 100)$?

(b) Razonar si la siguiente afirmacion es verdadera o falsa: "cualquier español gasta en este restaurante más dinero que cualquier extranjero".

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente que entra al restaurante gaste más de 100 euros?

(d) Un cliente del restaurante ha consumido más de 100 euros. ¿Cuál es la probabilidad de que se trate de un extranjero?

(e) Un cliente español ha entregado un billete de 100 euros para pagar su cena, por lo que se sabe que el importe de su consumición es menor o igual que esta cantidad. ¿Cuál es la probabilidad de que haya consumido más de 84 euros?

(f) El restaurante decide rifar botellas de cava entre todos sus clientes, y continuar el sorteo hasta que un cliente extranjero consiga una botella.

i. Calcular la probabilidad de que el restaurante tenga que sortear más de 3 botellas.

ii. Hallar la probabilidad de que el restaurante rife exactamente 3 botellas.

Solución:

(a) Sean las variables aleatorias
E = cantidad que gasta en el restaurante un español elegido al azar $\sim N(\mu = 100, \sigma^2 = 49)$,
X = cantidad que gasta en el restaurante un extranjero elegido al azar $\sim N(\mu = 91, \sigma^2 = 81)$.
Se tiene que

$$\frac{E - 100}{7} \sim N(0,1),$$
$$\frac{X - 91}{9} \sim N(0,1),$$

Llamemos Z a una variable aleatoria con distribución normal estándar ($Z \sim N(0,1)$).

$$\begin{aligned} P(E > 100) &= P(Z > 0) = 0.5, \\ P(X > 100) &= P\left(\frac{X - 91}{9} > \frac{100 - 91}{9}\right) = P(Z > 1) = 1 - \Phi(1) = 0.1587. \end{aligned}$$

Luego

$$\mathbf{P(E > 100) > P(X > 100)}.$$

En este caso es también posible razonar cuál de las dos probabilidades es mayor sin necesidad de calcularlas: puesto que

$$E(E) = 100,$$

y

$$E(X) < 100,$$

se tiene que

$$P(E > 100) = 0.5,$$

y

$$P(X > 100) < 0.5,$$

por lo que

$$\mathbf{P(E > 100) > P(X > 100)}.$$

Esto se puede ver también de forma gráfica.

(b) La afirmación es **falsa**. Tanto E como X son variables aleatorias con soporte en todo $\mathbb{R}$, y la probabilidad de que E tome valores menores que los de X es positiva ($P(E > X) > 0$), ya que, por ejemplo,

$$P(E < X) > P(E < 91, X > 91) = P(E < 91) \times P(X > 91) = 0.093 \times 0.5 = 0.0496 > 0.$$

(c) Sean los sucesos:

$A =$ el cliente que entra en el restaurante es español,
$B =$ el cliente que entra en el restaurante es extranjero,
$C =$ el cliente que entra en el restaurante gasta más de 100 euros.

Tenemos que calcular $P(C)$. Observemos que

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{3}, \\ P(B) &= \frac{2}{3}, \\ P(C|A) &= P(E > 100) = 0.5, \\ P(C|B) &= P(X > 100) = 0.1587. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de la probabilidad total tenemos que

$$P(C) = P(A) \times P(C|A) + P(B) \times P(C|B) = \frac{1}{3} \times 0.5 + \frac{2}{3} \times 0.1585 = \mathbf{0.2724}.$$

(d) Ahora debemos calcular $P(B|C)$. Aplicando el teorema de Bayes obtenemos:

$$P(B|C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(B) \times P(C|B)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{3} \times 0.1587}{0.2724} = \mathbf{0.3883}.$$

(e)

$$P(X > 84|X \leq 100) = \frac{P(84 < X \leq 100)}{P(X \leq 100)} = \frac{P(X \leq 100) - P(X \leq 84)}{P(X \leq 100)} = \frac{0.5 - 0.0110}{0.5} = \mathbf{0.9780}.$$

$$\left[P(E \leq 84) = P\left(\frac{E - 100}{7} \leq \frac{84 - 100}{7}\right) = P\left(Z \leq -2.29\right) = P\left(Z \geq 2.29\right) = 1 - \Phi(2.29) = 0.0110.\right]$$

(f) Consideremos la variable aleatoria
$N =$ número de botellas sorteadas hasta que el primer cliente extranjero consigue una.
Se tiene que

$$N \sim Ge\left(\frac{2}{3}\right).$$

i. $P(N > 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \mathbf{0.037}$.

ii. $P(N = 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \mathbf{0.074}$.

3. Sea T una variable aleatoria con distribución exponencial con esperanza $\mu_T = 0.5$

(a) Determinar la distribución de la variable aleatoria

$$Y = e^{-2\,T}.$$

¿Se trata de una distribución conocida?

(b) Calcular $P(Y > 0.25)$.

(c) ¿Cuál es la esperanza de Y? ¿Y su varianza?

Solución: Puesto que T sigue una distribución exponencial y su media es

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = 0.5,$$

deducimos que la intensidad de ocurrencias por unidad de tiempo es

$$\lambda = \frac{1}{E(T)} = \frac{1}{0.5} = 2.$$

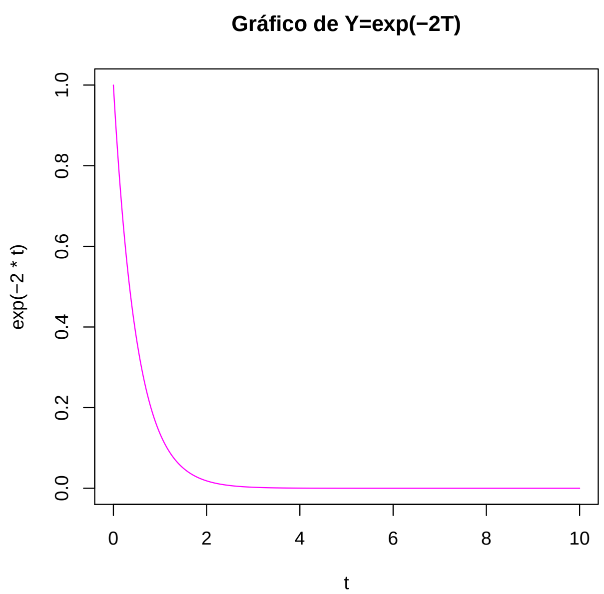
Luego

$$T \sim Exp(\lambda = 2),$$

por lo que su función de distribución es

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - e^{-2t} & \text{si } t \geq 0, \end{cases}$$

(a) Queremos determinar la función de densidad de la variable aleatoria $Y = e^{-2T}$.
El gráfico siguiente representa la función $g(t) = e^{-2t}$ en el intervalo $(0, \infty)$, que es el soporte de T.



En él puede apreciarse que el **soporte** de $Y = e^{-2T}$ es el intervalo $(0,1)$.
Por tanto sabemos que

$$F_Y(z) = 0$$

para todo $z \leq 0$ y que

$$F_Y(z) = 1$$

para todo $z \geq 1$.
Para $z \in [0,1]$ se tiene que

$$\begin{aligned} F_Y(z) = P(Y \leq z) &= P\left(e^{-2T} \leq z\right) = P\left(-2T \leq \ln(z)\right) = P\left(T \geq \frac{\ln(z)}{-2}\right) \\ &= 1 - F_T\left(\frac{\ln(z)}{-2}\right) = e^{-2\dfrac{\ln(z)}{-2}} = e^{\ln(z)} = z \end{aligned}$$

Juntando los tres tramos tenemos que, la expresión completa de la función de distribución de Y es

$$F_Y(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0, \\ z & \text{si } z \in (0,1), \\ 1 & \text{si } z \geq 1. \end{cases}$$

Como puede apreciarse, esta es la función de distribución de una **uniforme en el intervalo (0,1)**.

Observación: Puesto que la tranformación

$$g(x) = e^{-2x},$$

es **estrictamente decreciemte**, otra forma de determinar la distribución de Y es aplicando el **teorema sobre la función de densidad transformaciones estrictamente monotonas de variables aleatorias continuas** (Teorema 2 del Tema 3).
La función de densidad de $T \sim Exp(2)$ es

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 2e^{-2t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

Además, en este caso se tiene que

$$\alpha = \min\{\ g(t)\ :\ t \in S_T\} = 0,$$

$$\beta = \max\{\ g(t)\ :\ t \in S_T\} = 1.$$

$$h(z) = g^{-1}(z) = \frac{\ln(z)}{-2},$$

$$h'(z) = -\frac{1}{2z}.$$

Luego, para $z \notin (0,1)$ se verifica $f_Y(z) = 0$, y para $z \in (0,1)$,

$$f_Y(z) = f_T\left(h(z)\right) \cdot |h'(z)| = f_T\left(-\frac{\ln(z)}{2}\right) \cdot |h'(z)| = 2\, e^{-2\frac{\ln(z)}{-2}} \cdot \left|-\frac{1}{2z}\right| = 2\, e^{\ln(z)}\, \frac{1}{2z} = 2z\, \frac{1}{2z} = 1.$$

Juntando los dos tramos tenemos que la expresión completa de la **función de densidad de Y** es

$$f_Y(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \in (0,1) \\ 0 & \text{si } z \notin (0,1), \end{cases}$$

que se corresponde con la densidad de una **distribución uniforme en el intervalo (0,1)**.

(b) Puesto que $Y \sim U(0,1)$,

$$P(Y > 0.25) = \mathbf{0.75}.$$

(c) La esperanza y la varianza de la distribución **uniforme en el intervalo (0,1)** son

$$E(Y) = \mathbf{0.5},$$

y

$$V(Y) = \mathbf{\frac{1}{2}},$$

respectivamente.

4. Una máquina fabrica chips para ser utilizados en experimentos con microarrays de ADN en los que se mide el nivel de expresión de los genes. Los diámetros de los chips producidos por esta máquina siguen una distribución normal con una media de 2 micras y una varianza de 0.16 micras^2.

   (a) Calcular la probabilidad de que uno de estos chips elegido al azar tenga un diámetro superior a 2.5 micras.

   (b) Se ha seleccionado aleatoriamente uno de los chips producidos por esta máquina. No se ha comunicado cuál es su diámetro, pero sí ha transcendido que es superior a 1.6 micras. Calcular la probabilidad de que el diámetro del chip sea superior a 2.5 micras.

   (c) Se seleccionan, de forma aleatoria e independientendientemente, 4 de los chips que produce esta máquina. Hallar la probabilidad de que alguno de ellos tenga diámetro superior a 2.5 micras. ¿Cuál es la probabilidad de que dos de ellos superen las 2.5 y el resto tengan un diametro inferior a 2.5 micras?

   (d) Para cierto experimento sobre un determinado gen de la mosca drosophila se necesita utilizar un chip que mida menos de 1.6 micras. Un empleado va seleccionando chips al azar y comprobando su diámetro hasta que encontra uno con la longitud adecuada.

      i. Calcular la probabilidad de que el empleado tenga que examinar exactamente 5 chips para dar con uno con diámetro inferior a 1.6 micras.

      ii. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que selecionar como mucho 5 chips para encontrar uno con el diámetro deseado?

Solución: Sea

$$D = \text{diámetro en micras de un chip elegido al azar.}$$

Sabemos que

$$D \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 0.16),$$

y por consiguiente

$$Z = \frac{D-2}{0.4} \sim N(0,1).$$

(a)

$$P(D > 2.5) = P\left(\frac{D-2}{0.4} > \frac{2.5-2}{0.4}\right) = P(Z > 1.25) = 1 - \Phi(1.25) = 1 - 0.8944 = \mathbf{0.1056}.$$

(b) Sabemos por el apartado (a) que

$$P(D > 2.5) = 0.1056.$$

Por otra parte,

$$P(D > 1.6) = P\left(\frac{D-2}{0.4} > \frac{1.6-2}{0.4}\right) = P(Z > -1) = P(Z < 1) = \Phi(1) = 0.8413.$$

Por tanto,

$$P(D > 2.5 \,|\, D > 1.6) = \frac{P(D > 2.5, D > 1.6)}{P(D > 1.6)} = \frac{P(D > 2.5)}{P(D > 1.6)} = \frac{0.1056}{0.8413} = \mathbf{0.1255}.$$

(c) Llamemos C al número de chips de los cuatro seleccionados que tienen un diámetro superior a 2.5 micras. Por el apartado (a) sabemos que la probabilidad de que una pieza elegida al azar tenga un diámetro de al menos 2.5 micras es $p = 0.1056$. Puesto que las piezas se han elegido de manera independiente se tiene que

$$C \sim Bin(n = 4, p = 0.1056).$$

En consecuencia,

$$P(C \geq 1) = 1 - P(C = 0) = 1 - (1 - 0.1056)^4 = 1 - 0.8944^4 = 1 - 0.64 = \mathbf{0.3601},$$

y

$$P(C = 2) = \binom{4}{2} \times 0.1056^2 \times (1 - 0.1056)^2 = 6 \times 0.1056^2 \times 0.8944^2 = \mathbf{0.0535}.$$

(d) Sea

N = número de chips examinados para encontrar uno con diámetro inferior a 1.6 micras.

La probabilidad de que el diámetro de un chip sea inferior a 1.6 micras es

$$P(D < 1.6) = P\left(\frac{D - 2}{0.4} < \frac{1.6 - 2}{0.4}\right) = P(Z < -1) = P(Z > 1) = 1 - \Phi(1) = 0.1587.$$

Puesto que los chips se seleccionan de forma independiente hasta encontrar uno con el diámetro adecuado, tenemos que

$$N \sim Ge(0.1587).$$

i. $P(N = 5) = (1 - 0.1587)^4 \times 0.1587 = 0.8413^4 \times 0.1587 = \mathbf{0.0795}$.

ii. $P(N \leq 5) = 1 - P(N > 5) = 1 - (1 - 0.1587)^5 = 1 - 0.8413^5 = \mathbf{0.5785}$.