Probabilidad

Grado en Matemáticas

Curso 2018-2019

Hoja de Problemas 5

Fecha de Entrega: **Miércoles, 6 de Marzo**

1. El número de pétalos de las margaritas (*Leucanthemum vulgare*) es una variable aleatoria, N, con la siguiente función de distribución:

$$F_N(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 14, \\ 0.1 & \text{si } 14 \leq t < 15, \\ 0.3 & \text{si } 15 \leq t < 16, \\ 0.7 & \text{si } 16 \leq t < 17, \\ 0.95 & \text{si } 17 \leq t < 18, \\ 1 & \text{si } t \geq 18. \end{cases}$$

(a) Un enamorado ha seleccionado aleatoriamente una margarita y ha comenzado a arrancarle los pétalos de uno en uno mientras dice alternativamente: "me quiere", "no me quiere", "me quiere"... ¿Cuál es la probabilidad de que concluya que su amada no le corresponde?

(b) Un botánico ha comentado que la margarita que está analizando tiene más de 15 pétalos. ¿Cuál es la probabilidad de que sean un número par?

(c) ¿Cuál es el número medio de pétalos de las margaritas? ¿Y su varianza?

(d) Amaia ha recogido un ramillete de 10 margaritas para regalárselas a su *aita*. ¿Cuál es la probabilidad de que la mitad de ellas tengan un número par de pétalos y la otra mitad un número impar?

(e) ¿Cuál es el número esperado de margaritas con 18 pétalos en el ramillete recogido por Amaia?

(f) Martín y Leo quieren encontrar una margarita de 15 pétalos para su abuela, para lo cual salen al campo y van contando pétalos de margaritas que eligen al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que tengan que contar los pétalos de 4 margaritas hasta dar con la que buscan? ¿Y la probabilidad de que tengan que contar los pétalos de más de 6 margaritas?

(Examen Parcial de 2016)

Solución: N es una variable aleatoria discreta. Su soporte está formado por los puntos de discontinuidad de F_N, y es por tanto el conjunto

$$S_N = \{14, 15, 16, 17, 18\},$$

y su función de masa de probabilidad viene dada por

$$\begin{aligned} f_N(14) = P(N = 14) &= F_N(14) - F_N(14-) = 0.1 - 0 = 0.1, \\ f_N(15) = P(N = 15) &= F_N(15) - F_N(15-) = 0.3 - 0.1 = 0.2, \\ f_N(16) = P(N = 16) &= F_N(16) - F_N(16-) = 0.7 - 0.3 = 0.4, \\ f_N(17) = P(N = 17) &= F_N(17) - F_N(17-) = 0.95 - 0.7 = 0.25, \\ f_N(18) = P(N = 18) &= F_N(18) - F_N(18-) = 1 - 0.95 = 0.05. \end{aligned}$$

De forma abreviada podemos expresar S_N y f_N matricialmente:

$$N \equiv \begin{pmatrix} 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.25 & 0.05 \end{pmatrix}$$

(a) Puesto que el enamorado comienza a deshojar la margarita diciendo ”me quiere”, la probabilidad de que concluya que su amada no le corresponde es la probabilidad de que la flor tenga un número par de pétalos:

$$P(N \text{ par}) = P(N = 14) + P(N = 16) + P(N = 18) = 0.1 + 0.4 + 0.05 = \boxed{\mathbf{0.55}}$$

(b) La probabilidad de que la margarita que está analizando el botánico tenga un número par de pétalos sabiendo que tiene más de 15 es

$$\begin{aligned} P(N \text{ par} \mid N > 15) &= \frac{P\left(\{N \text{ par}\} \bigcap \{N > 15\}\right)}{P(N > 15)} \\ &= \frac{P(N = 16) + P(N = 18)}{P(N = 16) + P(N = 17) + P(N = 18)} \\ &= \frac{0.4 + 0.05}{0.4 + 0.25 + 0.05} \\ &= \frac{0.45}{0.7} \\ &= \boxed{\mathbf{0.6429}} \end{aligned}$$

(c) El número medio de pétalos de las margaritas es

$$E(N) = \sum_{k=14}^{18} k \times P(N = k) = 14\times0.1+15\times0.2+16\times0.4+17\times0.25+18\times0.05 = \boxed{\mathbf{15.95 \text{ pétalos}}}$$

La varianza de N puede calcularse como

$$V(N) = E\left(N^2\right) - E^2(N)$$

Hemos visto en el apartado anterior que $E(N) = 15.95$. Por otra parte

$$E\left(N^2\right) = \sum_{k=14}^{18} k^2\times P(N = k) = 14^2\times0.1+15^2\times0.2+16^2\times0.4+17^2\times0.25+18^2\times0.05 = 15.95 \ \mathbf{pétalos}^2$$

Luego

$$V(N) = E\left(N^2\right) - E^2(N) = 255.45 - 15.95^2 = \boxed{\mathbf{1.0475 \text{ pétalos}^2}}$$

(d) Llamemos P al número de margaritas recogidas por la niña que tienen un número par de pétalos. Para cada flor, la probabilidad de tener un número par de pétalos es

$$P(N \text{ par}) = 0.55$$

y la de tener un número impar

$$P(N \text{ impar}) = 0.45$$

Además, el número de pétalos de cada margarita es independiente del de las demás. Luego la distribución de P es

$$P \sim Bin(n = 10, p = 0.55),$$

y la probabilidad de que la mitad de las margaritas tengan un número par de pétalos y la otra mitad un número impar es

$$P(P = 5) = \binom{10}{5} \times 0.55^5 \times 0.45^5 = \frac{10!}{5! \times 5!} \times 0.55^5 \times 0.45^5 = 252 \times 0.55^5 \times 0.45^5 = \boxed{\mathbf{0.2340}}$$

(e) Sea

$$D = \text{número de margaritas del ramillete con 18 pétalos}$$

Para cada margarita, la probabilidad de tener 18 pétalos es

$$P(N = 18) = 0.05$$

y la de no tener 18 pétalos es

$$P(N \neq 18) = 1 - 0.05 = 0.95$$

Además, el número de pétalos de cada margarita es independiente del de las otras. Por tanto, la distribución de la variable D es

$$D \sim Bin(n = 10, p = 0.05),$$

y en consecuencia, el número esperado de margaritas con 18 pétalos en el ramillete recogido por Amaia es

$$E(D) = 10 \times 0.05 = \boxed{\textbf{0.5 margaritas}}.$$

(f) Consideremos ahora la variable aleatoria

$$L = \text{número de margaritas examinadas hasta encontrar una con 15 pétalos}$$

Cada vez que Leo y Martín seleccionan una margarita, la probabilidad de que tenga 15 pétalos es

$$P(L = 15) = 0.2,$$

y la de que no tenga 15 pétalos es

$$P(L \neq 15) = 1 - 0.2 = 0.8.$$

Además, el número de pétalos de cada margarita es independiente del de las otras. Por tanto, la probabilidad de que tengan que contar los pétalos de 4 margaritas hasta dar con la que buscan es

$$P(L = 4) = 0.8^3 \cdot 0.2 = \boxed{\textbf{0.1024}}$$

y la probabilidad de que tengan que contar los pétalos de más de 6 margaritas es

$$P(L > 6) = 0.8^6 = \boxed{\textbf{0.2621}}$$

2. Sea X cualquier variable aleatoria discreta y sea σ_X^2 su varianza, definida como

$$\sigma_X^2 = E\left[(X - \mu_X)^2\right],$$

donde μ_X es la esperanza de X.

(a) Demostrar que siempre se verifica $\sigma_X^2 \geq 0$.

(b) Razonar en casos puede ocurrir que $\sigma_X^2 = 0$.

Solución: **Resuelto en clase.**

3. A una convocatoria abierta de partido amistoso acuden 12 jubilados y 8 personas que siguen en activo. Antes del partido se les divide al azar en dos equipos con el mismo número de jugadores.

¿Cuál es la probabilidad de que cada uno de los dos equipos resultantes tenga el mismo número jubilados? **(Examen Parcial de 2018)**

Solución: La probabilidad de que cada uno de los dos equipos resultantes tenga el mismo número de jubilados es la probabilidad de que cada equipo (de 10 personas) tenga 6 jubilados y 4 que no lo son.

Dicha probabilidad puede calcularse mediante la **Regla de Laplace**

$$P(\text{mismo número de jubilados en ambos grupos}) = \frac{\binom{12}{6}\cdot\binom{8}{4}}{\binom{20}{10}} = \frac{64680}{184756} = \mathbf{0.35}$$

Observación: Esta probabilidad también puede calcularse utilizando la **regla de la multiplicación**.

4. Dado el espacio muestral $\Omega = \mathbb{R}$ definimos la sucesión de sucesos

$$V_n = \begin{cases} \left(-1, \frac{1}{n}\right], & \text{si } n \text{ impar,} \\ \\ \left(-\frac{1}{n}, 1\right], & \text{si } n \text{ par.} \end{cases}$$

Razonar si en este caso se verifica que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} V_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} V_k$$

Solución: **Resuelto en clase.**

5. El rector de cierta (lejana) universidad ha plagiado el 45% de los artículos que ha publicado.

   (a) Un equipo externo a dicha universidad acude a analizar el trabajo de este rector, y selecciona al azar 6 de sus publicaciones. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los artículos seleccionados haya sido plagiado?

   (b) ¿Cuántas de las publicaciones escogidas por el equipo externo se espera que hayan sido plagiadas?

   (c) Se ha sabido que al menos uno de los 6 artículos seleccionados por el equipo externo fue copiado de otro autor. ¿Cuál es la probabilidad de el total de publicaciones plagiadas sea inferior a 4?

   (d) A un becario se le encarga la tarea de seleccionar artículos de este rector hasta encontrar uno que no esté plagiado. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que seleccionar exactamente 5 publicaciones hasta terminar con su tarea? ¿Y la probabilidad de que tenga que analizar más de 8?

(Examen Final de Mayo de 2017)

Solución: Dado que el rector plagia el 45% de los artículos que publica, la probabilidad de que uno de estos trabajos sea copiado es 0.45, y la probabilidad de que sea original 0.55. Además, el hecho de que sea plagiado u original es independiente de un artículo a otro.

(a) Llamemos P al número de artículos plagiados de las selección de 6 que hace el equipo externo. La distribución de P es

$$P \sim Bin(n = 6, p = 0.45)$$

Por tanto, la probabilidad de que alguno de los papers haya sido copiado es

$$P(\text{algún artículo plagiado}) = 1 - P(\text{ningún artículo plagiado}) = 1 - 0.55^6 = \boxed{\mathbf{0.9723}}$$

es decir,

$$P(P > 0) = 1 - P(P = 0) = 1 - 0.55^5 = \boxed{\mathbf{0.9723}}$$

(b) El número esperado de publicaciones escogidas por el equipo externo que han sido plagiadas es la esperanza de la variable P, que por ser binomial verifica

$$E(P) = n \times p = 6 \times 0.45 = \boxed{\textbf{2.7 artículos}}$$

(c) Si se sabe que al menos uno de los artículos fue plagiado, la probabilidad de que el total de plagios sea inferior a 4 es la probabilidad condicionada

$$P(P < 4|P > 0)$$

que viene dada por

$$P(P < 4|P > 0) = \frac{P\left[(P \geq 1) \cap (P \leq 4)\right]}{P(P > 0)} = \frac{P(P = 1) + P(P = 2) + P(P = 3)}{P(P > 0)}$$

Según hemos visto en el apartado (a), la probabilidad del denominador de esta fracción es

$$P(P > 0) = 0.9723$$

En cuanto al numerador, es

$$\begin{aligned} P(P = 1) + P(P = 2) + P(P = 3) &= \binom{6}{1} \times 0.45 \times 0.55^5 + \binom{6}{2} \times 0.45^2 \times 0.55^4 + \binom{6}{3} \times 0.45^3 \times 0.55^2 \\ &= 0.1359 + 0.2780 + 0.3032 \\ &= 0.7375 \end{aligned}$$

Luego la probabilidad de que el total de plagios sea inferior a 4 sabiendo que hubo al menos uno es

$$P(P < 4|P > 0) = \frac{0.7171}{0.9723} = \boxed{\textbf{0.7375}}$$

(d) Sea N la variable aleatoria que recoge el número de artículos seleccionados por el becario hasta encontrar uno que no esté plagiado.
La distribución de esta variable es

$$N \sim Ge(0.55),$$

y por tanto la probabilidad de que el becario tenga que seleccionar exactamente 5 publicaciones hasta terminar con su tarea es

$$P(N = 5) = 0.45^4 \times 0.55 = 0.0226,$$

y la probabilidad de que tenga que analizar más de 8

$$P(N > 8) = 0.45^8 = 0.0017.$$