Probabilidad

Grado en Matemáticas

Curso 2018-2019

Hoja de Problemas 4

Fecha de Entrega: **Miércoles, 27 de Febrero**

1. Un señor muy cotilla está espiando a su nueva vecina. Sabe que tiene dos hij@s, pero deconoce su sexo.

   (a) En una de sus sesiones de espionaje consigue ver a una niña jugando al fútbol. ¿Cuál es la probabilidad de que su herman@ sea un varón?

   (b) Su mujer, que es también muy cotilla, le pone al corriente de que la niña que ha visto es la menor de l@s dos herman@s. ¿Cuál es en este caso la probabilidad de que su herman@ sea un varón?

Solución: Puesto que al cotilla le consta que su vecina tiene dos hij@s, el espacio muestral de partida es

$$\Omega = \{(\text{niña,niña}),\ (\text{niña,niño}),\ (\text{niño,niña}),\ (\text{niño,niño})\}$$

(a) Si el cotilla comprueba que al menos un@ de los descendientes de su vecina es niña, el espacio muestral se reduce a

$$\Omega' = \{(\text{niña,niña}),\ (\text{niña,niño}),\ (\text{niño,niña})\},$$

con tres casos posibles, de los que hay dos favorables a que sean un niño y una niña. Luego

$$P(\text{un niño y una niña}|\text{al menos una niña}) = \mathbf{\frac{2}{3}}.$$

(b) Cuando el cotilla se entera de que la niña que ha visto es la menor de l@s herman@s, el espacio muestral se reduce a

$$\Omega'' = \{(\text{niña,niña}),\ (\text{niño,niña})\},$$

con dos casos posibles, de los que hay uno favorable a que sean un niño y una niña. Luego

$$P(\text{un niño y una niña}|\text{la menor es niña}) = \mathbf{\frac{1}{2}}.$$

2. Sea $(\Omega, \mathscr{A})$ un espacio probalístico y sean dos sucesos $A, B \in \Omega$. Razonar **si siempre es cierta** la siguiente afirmación:

$$P(A \cap B) \geq 1 - P(A) - P(B).$$

Solución: **De forma general esta afirmación no es cierta**. Para probarlo debemos encontrar un contraejemplo.

Tomemos, por ejemplo, el experimento consistente en extraer al azar una bola de una urna que tiene 10 bolas numeradas del 1 al 10, cuyo espacio muestral es

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\},$$

y sean los sucesos

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2\} \\ B &= \{2, 3, 4\} \end{aligned}$$

En este caso tenemos que

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.2, \\ P(B) &= 0.3, \\ P(A \cap B) &= P(\{2\}) = 0.1, \end{aligned}$$

por lo que

$$1 - P(A) - P(B) = 1 - 0.2 - 0.3 = 0.5,$$

y por tanto se verifica

$$P(A \cap B) = 0.1 < 0.5 = 1 - P(A) - P(B) = 1 - 0.2 - 0.3.$$

Observación: esto no supone que la desigualdad nunca se dé, sino que no es cierta en todos los casos. Pueden encontrarse múltiples ejemplos en los que la desigualdad sí se cumple.

3. Niko ha preparado 6 tarjetas de invitación de cumpleaños dirigidas a 6 de sus amigus, y ha escrito sus nombres y direcciones en 6 sobres.

   Sin embargo, a la hora de introducir las tarjetas en los sobres, lo ha hecho completamente al azar.

   ¿Cuál es la probabilidad de que **ninguna** de las tarjetas esté en el sobre que le corresponde?

   Solución: Consideremos los sucesos,

   $$A_i = \text{la } i\text{-ésima carta redactada por Niko coincide con su sobre,}$$

   para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

   Debemos calcular la probabilidad

   $$P\left(\text{ninguna de las tarjetas está en el sobre que le corresponde}\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^{6} A_i^c\right).$$

   Por la **leyes de Morgan** se tiene que

   $$P\left(\bigcap_{i=1}^{6} A_i^c\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{6} A_i\right),$$

   y aplicando el Teorema del Tema 3 sobre la probabilidad de la unión de m sucesos tememos que la probabilidad de que ocurra alguno de estos 6 sucesos responde a la fórmula

   $$\begin{aligned} & P\left(\bigcup_{i=1}^{6} A_i\right) \\ = & \sum_{i=1}^{6} P(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le 6} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le 6} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) - \ldots \\ \ldots & -P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_6). \end{aligned}$$

   Observemos que, para cada $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ se tiene

   $$P(Ai) = \frac{5!}{6!},$$

   para cada par $i \neq j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

   $$P(A_i \cap A_j) = \frac{4!}{6!},$$

   etcetera.

Por tanto

$$\begin{aligned}
&P\left(\bigcup_{i=1}^{6} A_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{6}\frac{5!}{6!} - \sum_{1\leq i_1<i_2\leq 6}\frac{4!}{6!} + \sum_{1\leq i_1<i_2<i_3\leq 6}\frac{3!}{6!} - \ldots\ldots - \frac{1!}{6!} \\
&= 6\times\frac{5!}{6!} - \frac{6!}{4!\,2!}\times\frac{4!}{6!} + \frac{6!}{3!\,3!}\times\frac{3!}{6!} - \ldots\ldots - \frac{1!}{6!} \\
&= \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} \\
&= 0.6319.
\end{aligned}$$

Luego

$$P\,(\text{ninguna de las tarjetas está en el sobre que le corresponde}) = P\left(\bigcap_{i=1}^{6} A_i^c\right) = 1 - 0.6319 = \mathbf{0.3681}$$

4. Lerzan contesta la verdad el 80% de las veces que le hacen una pregunta y miente el resto de las ocasiones, mientras que Cheick miente el 30% de las veces que se le pregunta.

   Lerzan y Cheick no se conocen entre sí, por lo que contestan a las preguntas que les son formuladas de manera independiente.

   Se ha lanzado al aire un dado equilibrado y tú puedes elegir si apuestas a que el resultado del lanzamiento ha sido un 5 o si prefieres apostar a que ha sido cualquier otro número.

   Antes de que decidas cuál va ser tu apuesta, debes saber que, tanto Lerzan como Cheick han estado presentes en el lanzamiento, y que ambos han afirmado que ha salido un 5.

   ¿Por cuál de las apuestas te inclinas? **Justifica tu respuesta**.

   Solución: Sean los sucesos,

$$\begin{aligned}
C &= \text{el resultado del lanzamiento es un 5,} \\
\overline{C} &= \text{el resultado del lanzamiento es un número distinto a 5,}
\end{aligned}$$

y

$$A = \text{Lerzan y Cheick afirman que ha salido un 5.}$$

Sabemos que ha ocurrido el suceso A, es decir, que tanto Lerzan como Cheick (que han estado presentes en el lanzamiento del dado) han afirmado que ha salido un 5.

Por tanto, debemos comparar la probabilidad de que la el resultado del lanzamiento del sea un 5 condicionada a la ocurrencia de este suceso, $P(C|A)$, con la probabilidad de que el resultado del lanzamiento sea otro también condicionada por este suceso, $P(\overline{C}|A)$. Es decir, debemos determinar si se verifica

$$P(C|A) > P(\overline{C}|A)$$

o por el contrario

$$P(C|A) \leq P(\overline{C}|A)$$

Esto nos servirá para decidir cuál de las apuestas preferimos.

Sabemos que

$$\begin{aligned} P(C) &= \frac{1}{6} \\ P(\overline{C}) &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Por otra parte, la probabilidad de que ocurra el suceso A suponiendo que ha ocurrido C es la probabilidad de que tanto Lerzan como Cheick digan la verdad. Puesto que Lerzan contesta la verdad el 80% de las veces que le hacen una pregunta y miente el resto de las ocasiones, que Cheick miente el 30% de las veces que se le pregunta, y que sus respuestas son independientes se tiene que

$$\begin{aligned} P(A|C) &= P(\text{Lerzan y Cheick dicen la verdad}) \\ &= P(\text{Lerzan dice la verdad}) \times P(\text{Cheick dice la verdad}) \\ &= 0.8 \times 0.7 \\ &= 0.56 \end{aligned}$$

Del mismo modo, la probabilidad de que ocurra el suceso A suponiendo que ha ocurrido $\overline{C}$ es la probabilidad de que tanto Lerzan como Cheick mientan. Luego

$$P(A|\overline{C}) = P(\text{Lerzan y Cheick mienten}) = P(\text{Lerzan miente}) \times P(\text{ Cheick miente}) = 0.2 \times 0.3 = 0.06$$

Aplicando el teorema de Bayes se obtiene que

$$\begin{aligned} P(C|A) &= \frac{P(C \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C) + P(\overline{C})P(A|\overline{C})} \\ &= \frac{\frac{1}{6} \times 0.56}{\frac{1}{6} \times 0.56 + \frac{5}{6} \times 0.06} \\ &= \frac{0.0933}{0.1433} \\ &= \mathbf{0.6512}, \end{aligned}$$

y por consiguiente

$$P(\overline{C}|A) = 1 - P(C|A) = 1 - 0.6512 = 0.3488.$$

Vemos que se verifica

$$P(C|A) = 0.6512 > 0.3488 = P(\overline{C}|A),$$

y por tanto, con la información disponible, **es mejor estrategia apostar a que el resultado del lanzamiento del dado ha sido un 5**.

5. En un callejón viven 5 gatos y 3 gatas.

   (a) Si eligen al azar cuatro de est@s animales para llevarl@s a una clínica veterinaria y someterl@s a un control, ¿cuál es la probabilidad de que sean tres gatos y una gata?

   (b) Un vagabundo ha acudido al callejón con unas raspas de pescado para l@s felin@s, y los ha repartido entre tres de ell@s. Calcular la probabilidad de que al menos una hembra se haya beneficiado de esta merienda.

(c) Una vecina ha observado que al menos un@o de l@s tres minin@s que se comieron las raspas del vagabundo era una gata. ¿Cuál es la probabilidad de que las espinas se las hayan comido las tres hembras?

Solución:

(a) La probabilidad de que entre el grupo seleccionado para el control haya tres gatos y una gata es

$$P(\text{tres gatos y una gata}) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times 4 = \boxed{\mathbf{0.4286}}$$

(b) La probabilidad de que al menos una hembra probase las raspas es

$$P(\text{al menos una gata}) = 1 - P(\text{tres gatos}) = 1 - \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \boxed{\mathbf{0.8214}}$$

(c) Si se sabe que al menos una gata se benefició de las raspas del vagabundo, la probabilidad de que fueran las tres hembras las que se las comieron es la probabilidad condicionada

$$\begin{aligned} P(\text{tres gatas} \mid \text{al menos una gata}) &= \frac{P(\text{tres gatas} \cap \text{al menos una gata})}{P(\text{al menos una gata})} \\ &= \frac{P(\text{tres gatas})}{P(\text{al menos una gata})} \\ &= \frac{\frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6}}{0.8214} \\ &= \boxed{\mathbf{0.0217}} \end{aligned}$$