PROBABILIDAD

GRADO EN MATEMÁTICAS

CURSO 2018-2019

HOJA DE PROBLEMAS 2

FECHA DE ENTREGA: **Martes, 12 de Febrero**

1. Sea $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espacio probabilístico y sean dos sucesos $A, B \in \mathscr{A}$. Razonar si **es siempre cierta la siguiente afirmación**:

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

(**Examen parcial de 2017**)

Solución: **SÍ, esta afirmación siempre es cierta**. Para probarlo observemos que, para cualquier par de sucesos $A, B \in \mathscr{A}$ se verifica

$$P(A \cup B) \leq 1,$$

o expresado de otra forma,

$$-P(A \cup B) \geq -1,$$

y también que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

de donde, despejando, obtenemos que

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq P(A) + P(B) - 1.$$

c.q.d.

2. Consideremos una sucesión infinita de tiradas de un dado de parchís. Para cada $i \in \mathbb{N}^+$ definimos el suceso

$$A_i = \text{ en la i-ésima tirada sale 5.}$$

Utilizando las operaciones básicas de conjuntos (uniones, intersecciones y complementaciones), **expresar los siguientes sucesos en función de la sucesión de conjuntos $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$**:

(a) $S =$ el resultado 5 ocurre en infinitas tiradas.

(b) $I =$ el resultado 5 ocurre en todas las tiradas excepto, a lo sumo, en una cantidad finita de ellas.

¿Qué relación existe entre los conjuntos S e I?

Solución: Observemos que dado cualquier elemento del espacio muestral, $\omega \in \Omega$, se tiene que

(a)

$$\omega \in S \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^+ \quad \exists \quad i \geq n \quad \text{t.q.} \quad \omega \in A_i \Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right).$$

Luego

$$S = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right).$$

(b)

$$\omega \in I \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^+ \quad \text{t.q.} \qquad \forall \ i \geq n \ \ \omega \in A_i \Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \right).$$

Luego

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \right)$$

Nótese que siempre se verifica $I \subset S$, ya que si sucede I, es decir, si el resultado 5 ocurre en todas las tiradas excepto, a lo sumo, en una cantidad finita de ellas, entonces necesariamente el resultado 5 ocurre en infinitas tiradas, y por tanto ocurre el suceso S.

La inclusión contraria ($S \subset I$) solo se da bajo determinadas condiciones. .

3. Sea Ω un conjunto infinito numerable, y sea $\mathscr{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Definimos la función $P : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ tal que, para cada $A \in \mathscr{A}$,

$$P(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ A \ \text{ finito,} \\ & \\ 1 & \text{si } \ A \ \text{ infinito.} \end{cases}$$

¿**Puede** ser P una probabilidad sobre $\mathscr{A}$?

<u>*Solución*</u>: **No, P no puede ser una función de probabilidad**, ya que no verifica los axiomas de Kolmogorov.

Lo demostraremos por **reducción al absurdo**.

Supongamos que P fuese una probabilidad.

Observemos que, dado que Ω es un conjunto **infinito numerable** siempre podemos encontrar un conjunto $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ que tenga infinitos elementos, y que además verifique que A^c también tenga infinitos elementos.

Para tales conjuntos se tendrá que

$$\begin{aligned} P(A) &= 1, \\ P(A^c) &= 1, \end{aligned}$$

por lo que se tendría que

$$P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = 1 + 1 = 2 > 1,$$

lo que contradice el axiioma (iii) de Kolmogorov ($P(\Omega) = 1$).

De este modo **hemos llegado a un absurdo**, por lo que **P no puede ser una función de probabilidad**.

Observación: Para fijar ideas podemos considerar, por ejemplo, que $\Omega = \mathbb{N}^+$ y que A es el conjunto de los números pares, por lo que A^c seriá el conjunto de impares.

Ambos conjuntos tienen infinitos elementos, por lo que se tendría $P(A) = P(A^c) = 1$ y en consecuencia $P(\mathbb{N}^+) = 2$, lo cual evidentemente es absurdo.

No obstante es importante que señalar que, encontar un contraejemplo en el que no se cumplan las condiciones para que P sea probabilidad **no nececesariamente implica que nunca pueda serlo**.

4. Demostrar que para cualquier $a \in \mathbb{R}$, el conjunto $(-\infty, a]$ es un elemento de la σ-álgebra de Borel, definida como

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma \left\{ (a, b) \subset \mathbb{R} \ : \ a < b \right\}.$$

Solución: Observemos en primer lugar que, para cualquier $b \in \mathbb{R}$, el conjunto $(-\infty, b)$ es un boreliano, ya que puede expresarse como una unión numerable de intervalos abiertos:

$$(-\infty, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (b - n, b).$$

Una vez probado esto, basta observar que cualquier intervalo de la forma $(-\infty, a]$ es una interseción numerable de conjuntos del tipo $(-\infty, b)$:

$$(-\infty, a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, a + \frac{1}{n}\right).$$

Luego, efectivamente, para todo $a \in \mathbb{R}$,

$$(-\infty, a] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

c.q.d.

Observación: otra posibilidad para demostar este resultado de manera más directa, es tener en cuenta que la intersección numerable de una unión numerablede borelianos es también un boreliano, y que el el intervalo $(-\infty, a]$ puede expresarse como

$$(-\infty, a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \left(a - k, a + \frac{1}{n}\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, a + \frac{1}{n}\right).$$

5. Consideremos un espacio probabilístico $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ y dos sucesos $A, B \in \mathscr{A}$ tales que $P(A) = 1/3$ y $P(B) = 1/2$.

   Calcular $P(A^c \cap B)$ en las siguientes situaciones:

   (a) Si A y B son incompatibles,
   (b) Si $A \subset B$,
   (c) Si $B \subset A$,
   (d) Si $P(A \cap B) = 1/8$,
   (e) Si $P(A \cup B^c) = 3/4$.

   Solución:

   (a)
   $$A, B \text{ incompatibles } \Rightarrow B \subset A^c \Rightarrow A^c \cap B = B \Rightarrow P(A^c \cap B) = P(B) = \boxed{\mathbf{\frac{1}{2}}}$$

   (b)
   $$A \subset B \Rightarrow P(A^c \cap B) = P(B/A) = P(B) - P(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \boxed{\mathbf{\frac{1}{6}}}$$

   (c) Esta situación **no puede darse** con los datos del problema, ya que

   $$B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A),$$

   y en nuestro caso se tiene que

   $$P(B) = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = P(A).$$

(d)

$$P(A^c \cap B) = P(B/A) = P(B/(B \cap A)) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \boxed{\mathbf{\frac{3}{8}}}$$

(e) Por la leyes de Morgan se tiene que $(A \cup B^c)^c = A^c \cap B$. Luego

$$P(A^c \cap B) = 1 - P(A^c \cap B)^c = 1 - P(A \cup B^c) = 1 - \frac{3}{4} = \boxed{\mathbf{\frac{1}{4}}}$$