SOLUCIONES CAPÍTULO 5

Ejercicio 1

La tasa del código es

$$R = \frac{1}{2}.$$

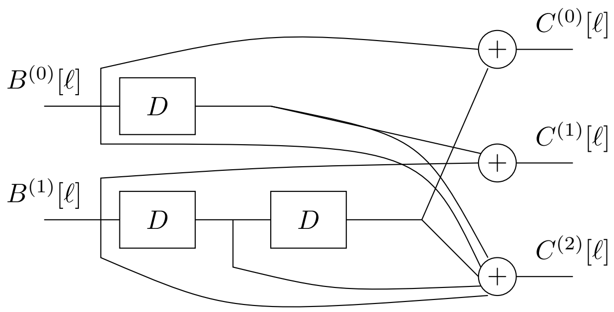
La distancia mínima $d_{min} = 4$, y una posible tabla de síndromes es

e	**s**
0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0
1 0 0 0 0 0 0 0	1 1 0 1
0 1 0 0 0 0 0 0	1 0 1 1
0 0 1 0 0 0 0 0	1 1 1 0
0 0 0 1 0 0 0 0	0 1 1 1
0 0 0 0 1 0 0 0	1 0 0 0
0 0 0 0 0 1 0 0	0 1 0 0
0 0 0 0 0 0 1 0	0 0 1 0
0 0 0 0 0 0 0 1	0 0 0 1
0 0 0 0 0 0 1 1	0 0 1 1
0 0 0 0 0 1 0 1	0 1 0 1
0 0 0 0 0 1 1 0	0 1 1 0
0 0 0 0 1 0 0 1	1 0 0 1
0 0 0 0 1 0 1 0	1 0 1 0
0 0 0 0 1 1 0 0	1 1 0 0
1 0 0 0 0 0 1 0	1 1 1 1

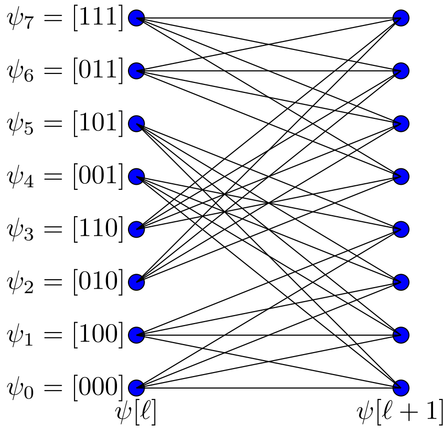
Ejercicio 2

a) La tasa del código es $R = 2/3$

b) La representación esquemática se muestra en la figura



c) El diagrama de rejilla se muestra en la figura



$\psi[\ell]$	$\psi[\ell+1]$	Etiquetas
ψ_7	ψ_7	$11\|001$
	ψ_6	$01\|100$
	ψ_5	$10\|010$
	ψ_4	$00\|111$
ψ_6	ψ_7	$11\|010$
	ψ_6	$01\|111$
	ψ_5	$10\|001$
	ψ_4	$00\|100$
ψ_5	ψ_3	$11\|000$
	ψ_2	$01\|101$
	ψ_1	$10\|011$
	ψ_0	$00\|110$
ψ_4	ψ_3	$11\|011$
	ψ_2	$01\|110$
	ψ_1	$10\|000$
	ψ_0	$00\|101$

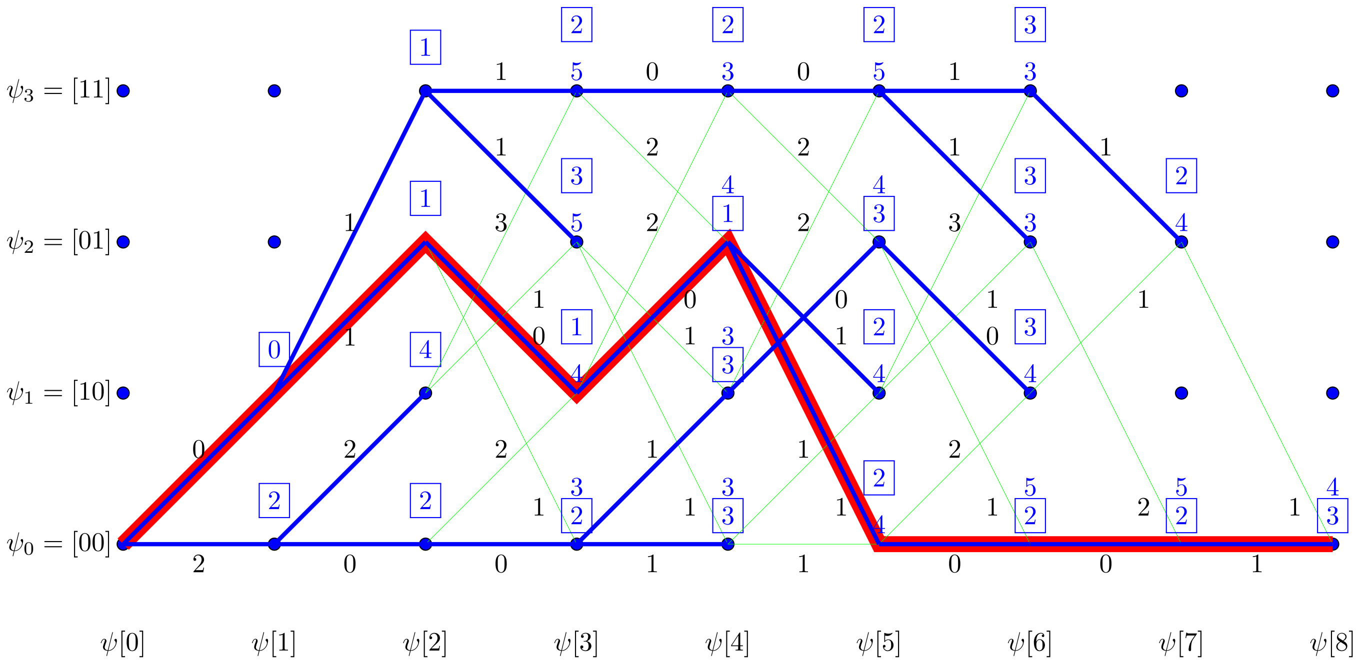
$\psi[\ell]$	$\psi[\ell+1]$	Etiquetas
ψ_3	ψ_7	$11\|110$
	ψ_6	$01\|001$
	ψ_5	$10\|111$
	ψ_4	$00\|010$
ψ_2	ψ_7	$11\|111$
	ψ_6	$01\|010$
	ψ_5	$10\|100$
	ψ_4	$00\|001$
ψ_1	ψ_3	$11\|101$
	ψ_2	$01\|000$
	ψ_1	$10\|110$
	ψ_0	$00\|011$
ψ_0	ψ_3	$11\|110$
	ψ_2	$01\|011$
	ψ_1	$10\|101$
	ψ_0	$00\|000$

d) Mínima distancia del código $D^H_{min} = 4$.

Ejercicio 3

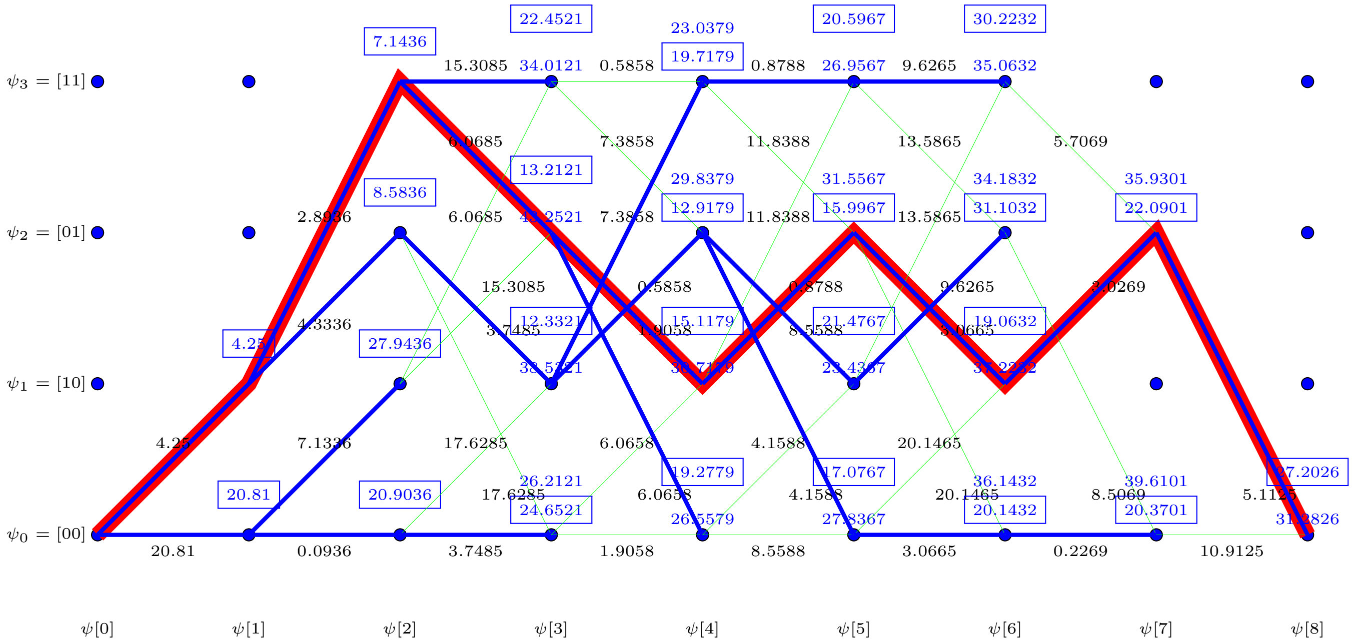
a) Secuencia decodificada con salida dura

ℓ	0	1	2	3	4	5
$B[\ell]$	1	0	1	0	0	0



b) Secuencia decodificada con salida blanda

ℓ	0	1	2	3	4	5
$B[\ell]$	1	1	0	1	0	1



Ejercicio 4

a) Para el código bloque

i) La distancia mínima del código es $d_{min} = 2$.

ii) Es posible obtener una posible matriz en forma sistemática tanto por el principio como por el final

$$\mathbf{G}'_1 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right], \quad \mathbf{G}'_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

iii) La matriz de chequeo, para cada caso sería

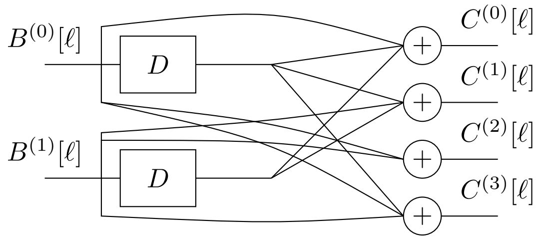
$$\mathbf{H}_1 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \mathbf{H}_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

iv) Las tablas de síndromes para cada matriz serían

e	**s**	**e**	**s**
0 0 0 0	0 0	0 0 0 0	0 0
1 0 0 0	1 0	1 0 0 0	1 0
0 1 0 0	1 1	0 1 0 0	0 1
0 0 0 1	0 1	0 0 0 1	1 1

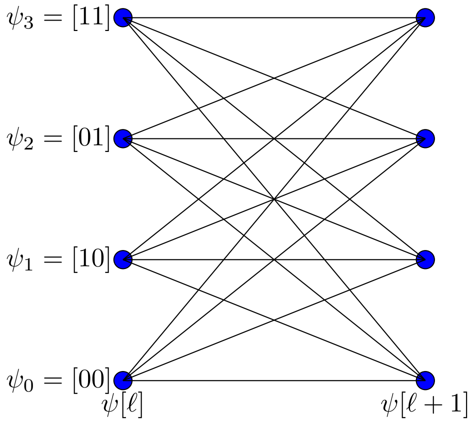
b) Para el código convolucional

i) La representación esquemática se muestra en la figura



ii) El diagrama de rejilla se muestra en la figura Se pueden obtener las etiquetas a partir de la tabla siguiente:

$B^{(0)}[\ell]$	$B^{(1)}[\ell]$	$B^{(0)}[\ell-1]$	$B^{(1)}[\ell-1]$	$C^{(0)}[\ell]$	$C^{(1)}[\ell]$	$C^{(2)}[\ell]$	$C^{(3)}[\ell]$
1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0



$\psi[\ell]$	$\psi[\ell+1]$	Etiquetas
ψ_3	ψ_3	11|1101
	ψ_2	01|0110
	ψ_1	10|1010
	ψ_0	00|0001
ψ_2	ψ_3	11|0000
	ψ_2	01|1011
	ψ_1	10|0111
	ψ_0	00|1100
ψ_1	ψ_3	11|0001
	ψ_2	01|1010
	ψ_1	10|0110
	ψ_0	00|1101
ψ_0	ψ_3	11|1100
	ψ_2	01|0111
	ψ_1	10|1011
	ψ_0	00|0000

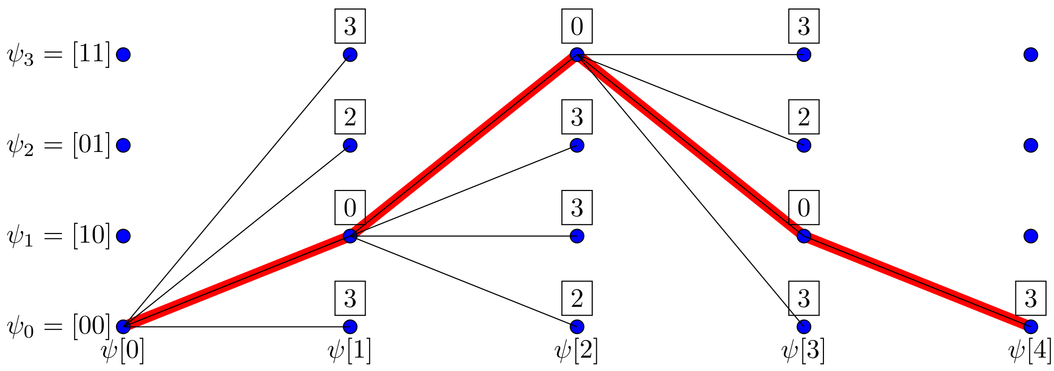
iii) La mínima distancia del código es $D^H_{min} = 3$

iv) La secuencia decodificada es

ℓ	0	1	2	3	4	5
$B[\ell]$	1	0	1	1	1	0

Las métricas acumuladas (camino superviviente en negrita) en cada estado durante el algoritmo de Viterbi son

	$\psi[1]$	$\psi[2]$	$\psi[3]$	$\psi[4]$
$\psi_3 = [1,1]$	3	5|3|**0**|6	**3**|5|6|4	–
$\psi_2 = [0,1]$	2	6|4|**3**|5	**2**|4|3|5	–
$\psi_1 = [1,0]$	0	6|4|**3**|5	**0**|6|5|3	–
$\psi_0 = [0,0]$	3	3|5|**2**|4	**3**|5|6|4	6|4|**3**|5



c) En el caso del código bloque la probabilidad de error es

$$P_e = \varepsilon\ (1-\varepsilon)^3 + \sum_{e=2}^{4} \binom{4}{e}\ \varepsilon^e\ (1-\varepsilon)^{4-e}.$$

Con el código convolucional

$$P_e \approx c \sum_{e=1}^{8} \binom{8}{e}\ \varepsilon^e\ (1-\varepsilon)^{8-e},$$

Ejercicio 5

a) Para el código bloque

i) Los valores que ofrecen las máximas prestaciones ($d_{min} = 3$) son

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = 1, \quad d = 0$$

ii) La tabla de síndromes es

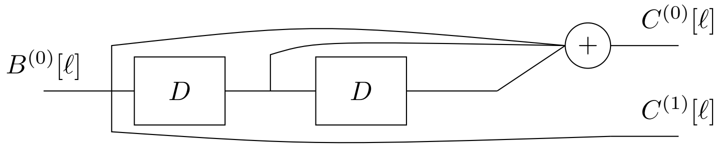
e	**s**
0 0 0 0 0	0 0 0
1 0 0 0 0	1 1 1
0 1 0 0 0	1 0 1
0 0 1 0 0	1 0 0
0 0 0 1 0	0 1 0
0 0 0 0 1	0 0 1
1 0 0 0 1	1 1 0
0 0 0 1 1	0 1 1

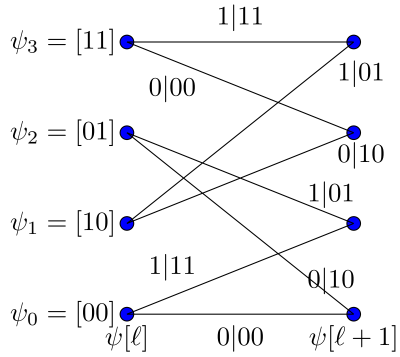
iii) Las palabras decodificadas son

$$\mathbf{b}_0 = 00, \quad \mathbf{b}_1 = 01, \quad \mathbf{b}_2 = 11$$

b) Para el código convolucional

i) La representación esquemática y el diagrama de rejilla del código se muestran en la figura





ii) La secuencia codificada es

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$C[m]$	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0

iii) Las prestaciones con salida dura son

$$P_e \approx c \sum_{e=2}^{6} \binom{6}{e} \varepsilon^e \, (1-\varepsilon)^{6-e},$$

donde ε es la tasa de error binario asociada a una constelación 4-QAM

$$\varepsilon = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) - \frac{1}{2}Q^2\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

Con salida blanda

$$P_e \approx c\, Q\left(\frac{2}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

iv) La secuencia decodificada es

m	0	1	2	3
$B[m]$	1	0	1	1

Ejercicio 6

a) Los dos códigos son sistemáticos, uno por el principio y otro por el final.

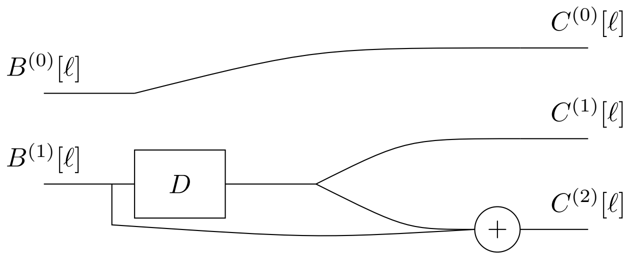
b) La distancia mínima del código 1 es $d_{min} = 3$, y por tanto tiene la capacidad para detectar patrones de hasta $d = 2$ errores y corregir todos los patrones de hasta $t = 1$ error. Para el código 2 la distancia mínima es $d_{min} = 2$, y por tanto puede detectar hasta $d = 1$ error, y corregir los patrones de $t = 0$ errores.

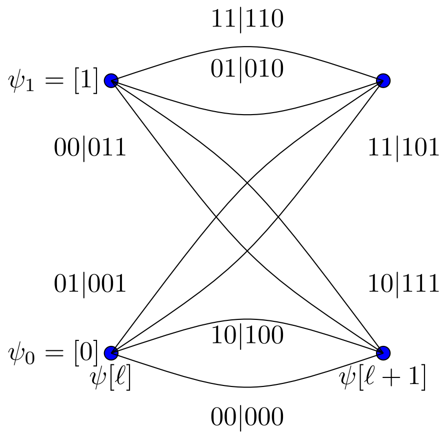
c) Las palabras decodificadas son

$$\hat{\mathbf{b}}_a = 01,\ \hat{\mathbf{b}}_b = 11.$$

Ejercicio 7

a) La tasa del código es $R = \frac{2}{3}$, y la representación esquemática es





b) El diagrama de rejilla se muestra también en la figura de arriba. La distancia mínima es

$$D^H_{min} = 3.$$

c) La secuencia codificada es

$$C[m'] = 101\ 010\ 111\ 000 \mid 000\ 000$$

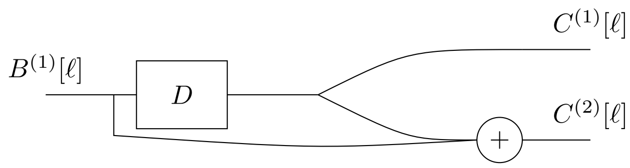
Los 6 últimos bits corresponderían a la parte de la cabecera de ceros transmitida tras la secuencia de bits de información.

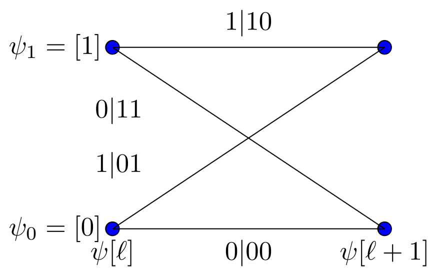
d) Sí, es una secuencia posible en este codificador, correspondiente al fragmento

$$B[m] = \cdots 11\ 01\ 10\ 00\ \cdots$$

siempre y cuando se transmita después de $B[m] = \cdots 01$ o de $B[m] = \cdots 11$ (es decir, partiendo del estado $\psi_1 = 1$).

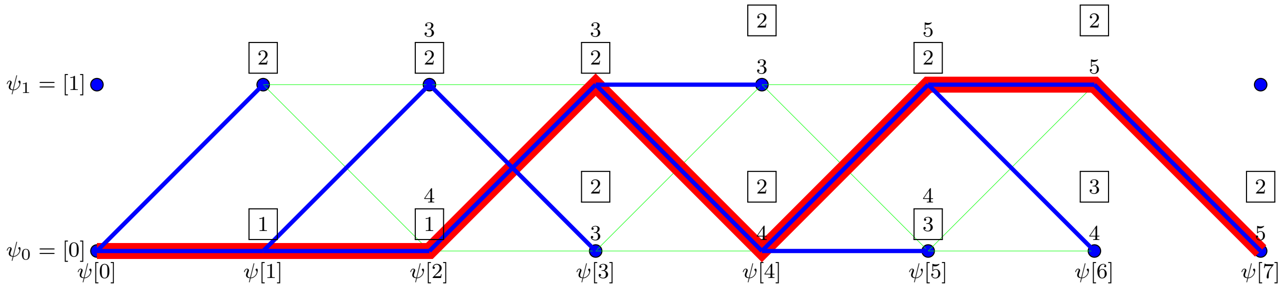
e) Ahora el convolucional es





La secuencia decodificada es

ℓ	0	1	2	3	4	5
$B[\ell]$	0	0	1	0	1	1



Ejercicio 8

a) Se presentan los resultados código a código.

   1) Para el primer código, la tasa de codificación es $R = \frac{1}{2}$, y la distancia mínima es dos.
   2) En el segundo código, la tasa de codificación es $R = \frac{1}{5}$, y la distancia mínima es también dos.
   3) En el tercer código, la tasa de codificación es $R = \frac{2}{5}$, y la distancia mínima es dos.

b) El primer código no es lineal. El segundo código sí es lineal, y su matriz generadora es

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

El tercer código es lineal y su matriz generadora puede ser por ejemplo (no es la única opción)

$$G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Los únicos códigos que pueden ser sistemáticos son los códigos $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$.

d) Para aumentar la distancia mínima, se puede cambiar la segunda palabra por 11111, con lo que se tendría una distancia mínima de cinco.

e) En el caso del código $\mathcal{C}_2$ es la segunda, 01010, y en el código $\mathcal{C}_3$ hay dos palabras con la misma verosimilitud, 01111 y 11011, por lo que se puede decidir cualquiera.

Ejercicio 9

a) El diccionario del código es

i	$\mathbf{b}_i$	$\mathbf{c}_i$
0	0 0 0	0 0 0 0 0 0
1	0 0 1	0 0 1 0 1 1
2	0 1 0	0 1 0 1 0 1
3	0 1 1	0 1 1 1 1 0
4	1 0 0	1 0 0 1 1 0
5	1 0 1	1 0 1 1 0 1
6	1 1 0	1 1 0 0 1 1
7	1 1 1	1 1 1 0 0 0

La matriz de chequeo de paridad es

$$\mathbf{H} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

y la distancia mínima es $d_{min} = 3$.

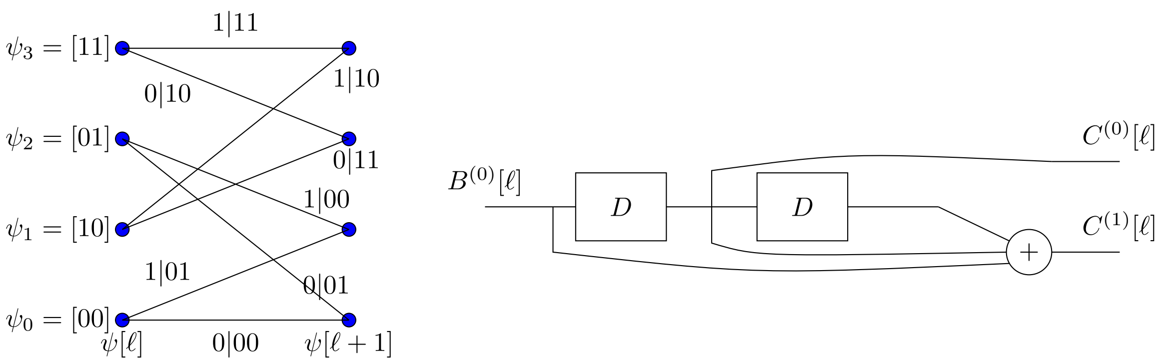
b) La probabilidad de error del código es

$$P_e = 14\, \varepsilon^2\, (1-\varepsilon)^4 + \sum_{e=3}^{6} \binom{6}{e}\, \varepsilon^e\, (1-\varepsilon)^{6-e},$$

donde

$$\varepsilon = Q\left(\frac{d_{min}^{BPSK}}{2\sqrt{N_0/2}}\right).$$

c) El diagrama de rejilla del convolucional (y su representación esquemática)



d) La probabilidad de error es

$$P_e \approx c\, \sum_{e=2}^{6} \binom{6}{e}\, \varepsilon^e\, (1-\varepsilon)^{6-e},$$

donde ε es la tasa de error binario asociada a la constelación BPSK (o 2-PAM), en este caso

$$\varepsilon = Q\left(\frac{1}{2\sqrt{N_0/2}}\right)$$

El resultado tiene en cuenta que para este convolucional $D_{min}^{H} = 4$, y dicha distancia se alzanza en $z = 3$ transiciones sobre la rejilla.

e) La secuencia de bits transmitidos es

$$C[m] = 100110\ 110011$$

La secuencia decodificada puede ser cualquiera de las siguientes:

$$B[\ell] = 100\ 110, \quad B[\ell] = 001\ 110, \text{ o } B[\ell] = 010\ 110$$

f) La secuencia codificada es

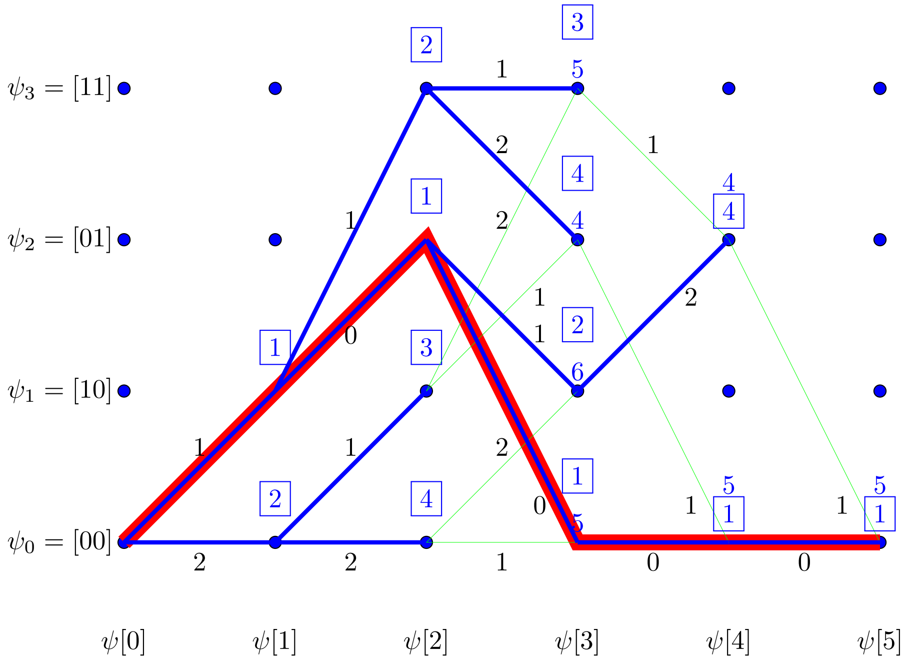
$$C[m] = 01\ 11\ 01\ 00\ 00$$

por lo que la secuencia recibida será

$$R[m] = 11\ 11\ 01\ 00\ 00$$

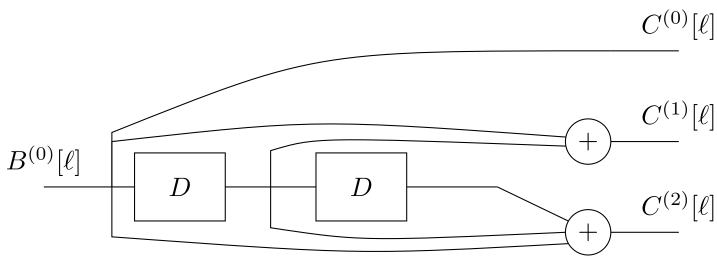
La secuencia decodificada dada esta secuencia recibida es

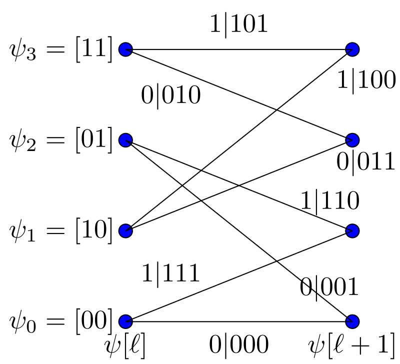
$$B[\ell] = 100$$



Ejercicio 10

a) La representación esquemática y el diagrama de rejilla del código se muestran en la figura





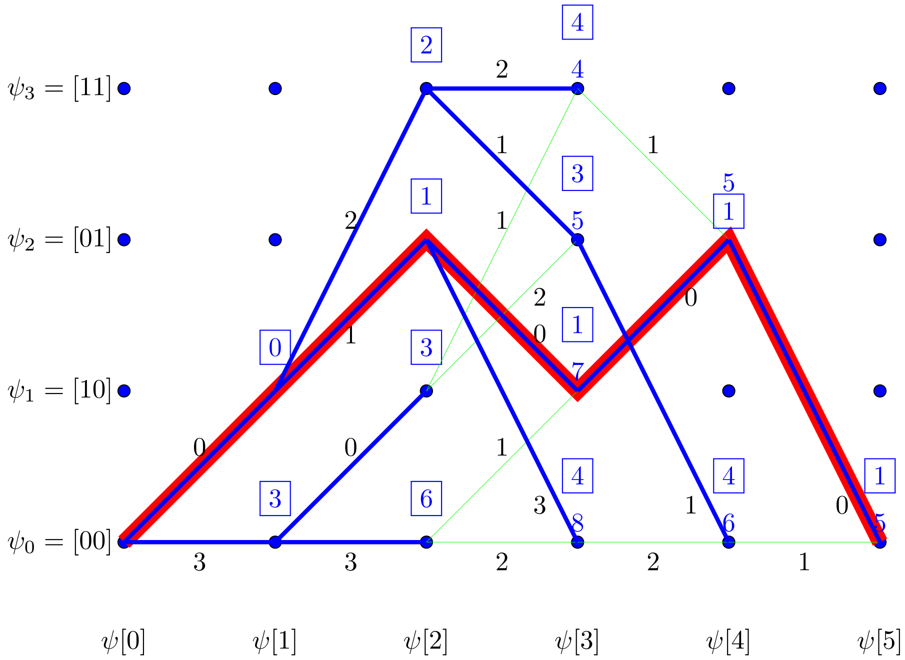
b) Sí, ya que la primera de las salidas es una réplica de la entrada.

c) La secuencia transmitida más verosímil es

m'	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$C[m']$	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1

y la secuencia decodificada es

ℓ	0	1	2
$B[\ell]$	1	0	1



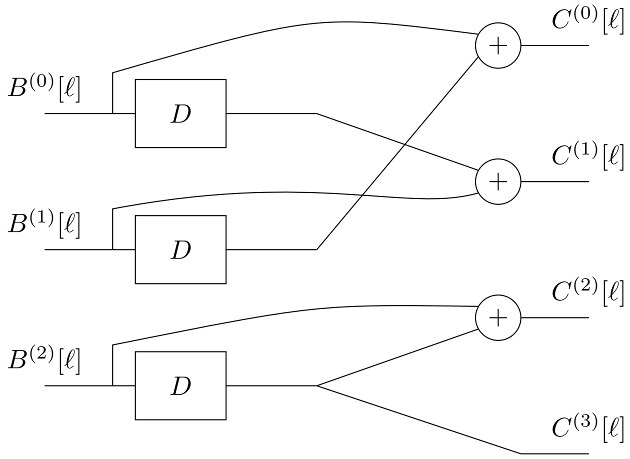
Ejercicio 11

a) El diccionario del código es

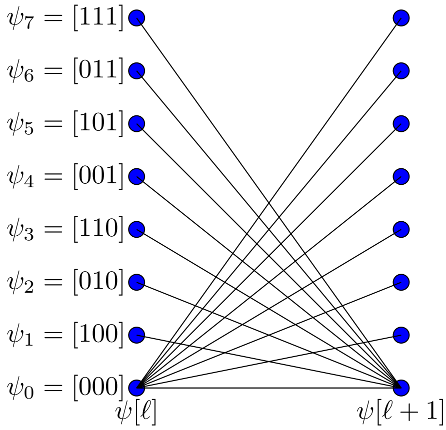
i	$\mathbf{b}_i$	$\mathbf{c}_i$
0	0	0 0 0
1	0	1 1 1

y la distancia mínima $d_{min} = 3$.

b) La representación esquemática se muestra en la figura



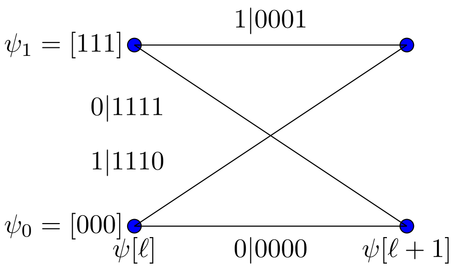
Las ramas que salen y llegan al estado todo ceros del diagrama de rejilla se muestran en la figura



$\psi[\ell]$	$\psi[\ell+1]$	Etiquetas
ψ_0	ψ_7	111|1110
	ψ_6	011|0110
	ψ_5	101|1010
	ψ_4	001|0010
	ψ_3	110|1100
	ψ_2	010|0100
	ψ_1	100|1000
	ψ_0	000|0000
ψ_7	ψ_0	000|1111
ψ_6		000|1011
ψ_5		000|0111
ψ_4		000|0011
ψ_3		000|1100
ψ_2		000|1000
ψ_1		000|0100
ψ_0		000|0000

La distancia mínima del código es $D^H_{min} = 2$.

c) La tasa del código concatenado es $R = \frac{1}{4}$, y su diagrama de rejilla

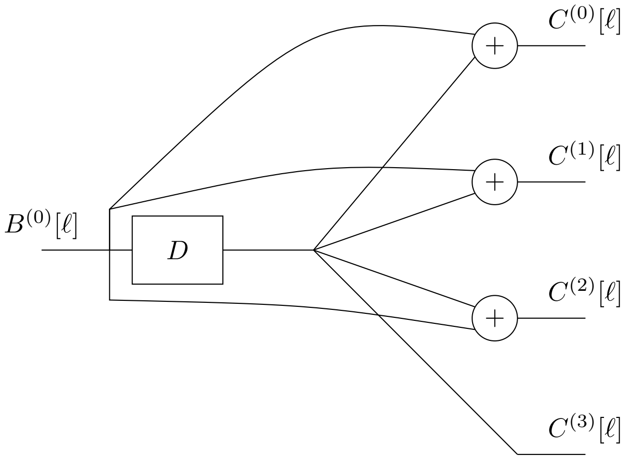


$D^H_{min} = 7$

El código concatenado tiene mejores prestaciones que cada uno de los códigos por separado, ya que su distancia mínima es mucho mayor, por lo que puede corregir hasta 3 errores en cada bloque de 8 bits codificados.

En cuanto a ancho de banda, como la tasa del código concatenado es menor, el ancho de banda para transmitir la misma información es 4/3 veces mayor que la requerida con el código bloque (en este, la tasa binaria final es 3 veces la tasa binaria de información, mientras que en el concatenado es 4 veces la tasa binaria de información).

d) El código equivalente sería



$$\mathbf{G}(D) = [1 + D, 1 + D, 1 + D, D]$$

Ejercicio 12

a) El Código A es un código lineal porque se puede comprobar que cualquier combinación lineal de palabras del código es otra palabra código. El Código B no lo es, ya que hay combinaciones lineales de palabras del código que no forman parte del código. Por poner un ejemplo,

$$\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = 01111 \text{ no está en el código.}$$

El Código A no es un código sistemático, ya que ni los dos primeros ni los dos últimos bits de la palabra codificada $\mathbf{c}_i$ se corresponden con los dos bits de la palabra sin codificar $\mathbf{b}_i$. En cambio, el Código B sí es sistemático, ya que los dos últimos bits de la palabra codificada se corresponden en todos los casos con los dos bits de información.

En cuanto al número de errores que puede corregir cada código

Para el Código A: $t = 1$ error.

Para el Código B: $t = 0$ errores.

b) La matriz generadora y la matriz de chequeo de paridad del Código A son

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

c) La tabla de síndromes es

$\mathbf{e}$	$\mathbf{s}$
0 0 0 0 0	0 0 0
1 0 0 0 0	1 1 1
0 1 0 0 0	1 0 1
0 0 1 0 0	1 0 0
0 0 0 1 0	0 1 0
0 0 0 0 1	0 0 1
0 0 1 1 0	1 1 0
0 0 0 1 1	0 1 1

Las palabras decodificadas son

$$\hat{\mathbf{b}}_a = \mathbf{b}_3 = 1\ 1,\ \hat{\mathbf{b}}_b = \mathbf{b}_2 = 1\ 0.$$

Ejercicio 14

a) Las matrices generadoras son

$$\mathbf{G}_1 = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 1 \end{array}\right],\ \mathbf{G}_2 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],\ \mathbf{G}_3 = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

b) Las capacidades de corrección de los códigos son

- Código 1: $d_{min} = 3$, detecta $d = 2$ errores, corrige $t = 1$ error
- Código 2: $d_{min} = 2$, detecta $d = 1$ errores, corrige $t = 0$ errores
- Código 3: $d_{min} = 3$, detecta $d = 2$ errores, corrige $t = 1$ error

Por tanto, el código 3 es mejor que el código 2.

c) Si se concatenan los códigos 1 y 2, tendremos un código de tamaño $k = 1$, $n = 4$, en el que las palabras codificadas tienen la forma siguiente

k	C1	C1+C2
0	000	0000
1	111	1111

La distancia mínima pasa a ser $d_{min} = 4$, lo que permite aumentar en uno la capacidad de detección del código 1, y es mejor que la del código 2.

d) Si ahora se concatenan los códigos C2 y C3, el tamaño del código será $k = 3$ y $n = 4$ La matriz generadora es

$$\mathbf{G}_{2+3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La distancia mínima del código es de nuevo $d_{min} = 4$, por lo que la concatenación mejora los códigos por separado.

e) La tabla de síndromes es en este caso

e	**s**
00000	000
10000	100
01000	010
00100	001
00010	011
00001	101
11000	110
01001	111

La decodificación seguirá los siguientes pasos:

1.- Cálculo del síndrome: $\mathbf{s} = \mathbf{r}\mathbf{H}^T = 001$

2.- Identificación del patrón de error (tabla): $\mathbf{s} = 001 \rightarrow \mathbf{e} = 00100$

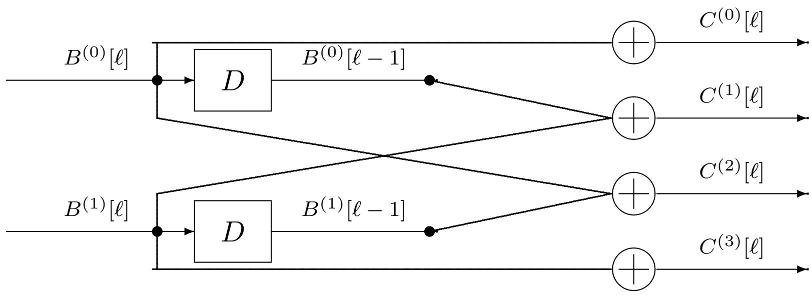
3.- Corrección del patrón de error: $\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{r} + \mathbf{e} = 11011 = \mathbf{c}_3$

4.- Decodificación (diccionario del código): $\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c}_3 \rightarrow \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b}_3 = 11$

Ejercicio 16

a) La matriz generadora en polinomios en D y la representación esquemática son

$$\mathbf{G}(D) = \begin{bmatrix} 1 & D & 1 & 0 \\ 0 & 1 & D & 1 \end{bmatrix}.$$



b) La secuencia codificada es

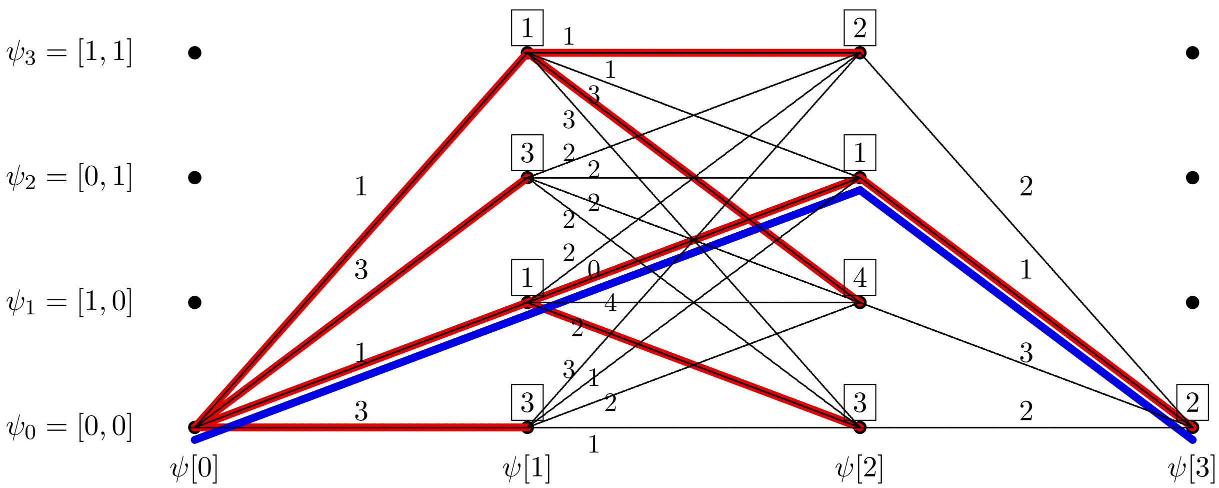
$$C[m] = 1010\ 1011\ 0011\ 0010\ 0000$$

La probabilidad de error aproximada es

$$Pe \approx c \sum_{e=2}^{8} \binom{8}{i} \varepsilon^e \, (1-\varepsilon)^{8-e}$$

c) Para obtener la palabra decodificada hay que aplicar el algoritmo de Viterbi.

En la figura se muestra la métrica de rama para este cálculo, resaltando los caminos supervivientes (línea más ancha) y la solución final (en doble trazo).



y en la tabla las métricas acumuladas en cada estado, resaltando la del camino superviviente, y presentando los valores de los bits decodificados.

	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell = 3$
ψ_3	$\boxed{1}$	$\boxed{2}/5/3/6$	
ψ_2	$\boxed{3}$	$2/5/\boxed{1}/4$	
ψ_1	$\boxed{1}$	$\boxed{4}/5/5/5$	
ψ_0	$\boxed{3}$	$4/5/\boxed{3}/4$	$4/\boxed{2}/7/5$

$\hat{B}^{(0)}[0] = 1$
$\hat{B}^{(1)}[0] = 0$
$\hat{B}^{(0)}[1] = 0$
$\hat{B}^{(1)}[1] = 1$

La solución es

$$\hat{B}[m] = 1\ 0\ 0\ 1$$

Ejercicio 17

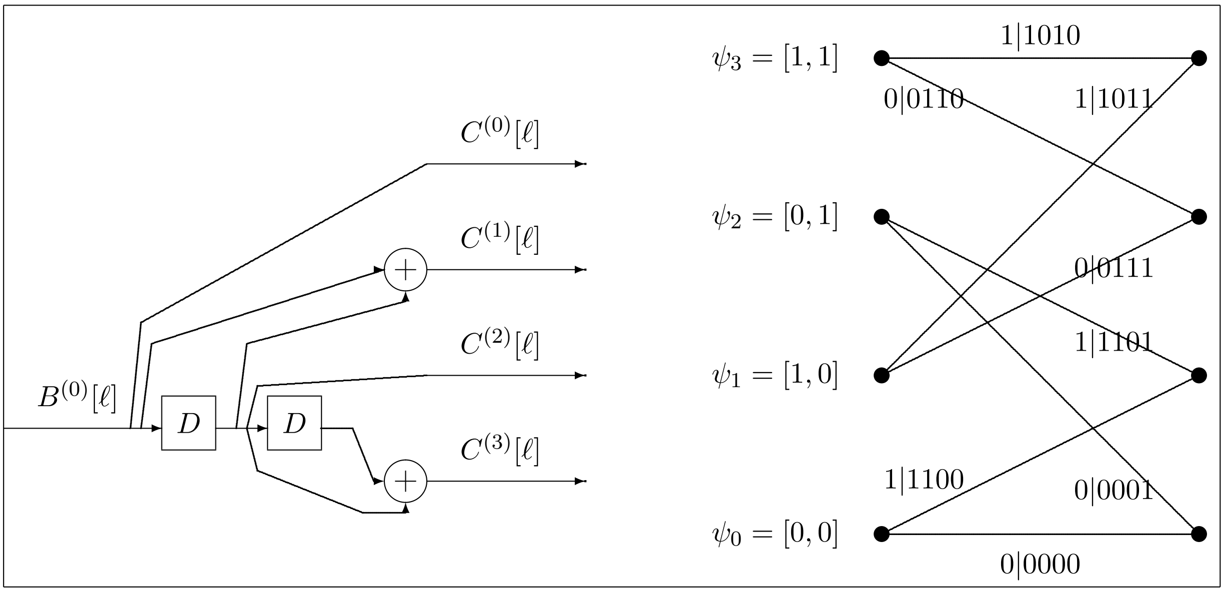
a) Para el primer código

$$P_e \approx c \sum_{e=1}^{4} \binom{4}{e} \varepsilon^e\, (1-\varepsilon)^{4-e}.$$

Para el segundo código

$$P_e \approx c \sum_{e=2}^{8} \binom{8}{e} \varepsilon^e\, (1-\varepsilon)^{8-e}.$$

b) El código concatenado tiene la representación esquemática y el diagrama de rejilla que se muestran en la figura



Ejercicio 18

a) La matriz generadora es

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En ese caso, como el número de errores que se pueden corregir son

$$t = \left\lfloor \frac{d_{min}}{2} \right\rfloor = 0$$

para los dos códigos, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$.

Ninguno de los dos códigos es sistemático, porque ni los primeros k bits ni los últimos k bits de las palabras codificadas se corresponden a los k bits de las palabras sin codificar (siendo $k = 2$ para el código $\mathcal{C}_1$ y $k = 3$ para el código $\mathcal{C}_2$). Eso se traduce en que las primeras k columnas o las últimas k columnas de la correspondiente matriz generadora forma una matriz identidad. Se puede ver que esta condición no se cumple para ninguno de los dos códigos.

b) El diccionario del código concatenado es

$\mathbf{b}_i(\mathcal{C}_1)$	$\mathbf{c}_i(\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)$
00	00000
01	01111
10	10110
11	11001

Y la matriz generadora

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

El código concatenado es un código sistemático: los dos primeros bits de las palabras códificadas son iguales a los bits sin codificar, o lo que es lo mismo, las dos primeras columnas de la matriz generadora son una matriz identidad. El código corrige todos los patrones de

$$t = 1 \text{ error.}$$

c) La matriz de chequeo de paridad es

$$\mathbf{H} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Y la tabla se síndromes

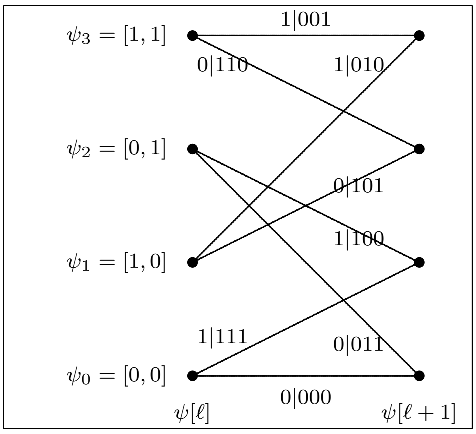
e	**s**
00000	000
10000	110
01000	111
00100	100
00010	010
00001	001
00011	011
00101	101

Ejercicio 19

a) La matriz generadora es

$$\mathbf{G}(D) = [1 + D,\ 1 + D^2,\ 1 + D + D^2]_{1\times 3}.$$

Y el diagrama de rejilla

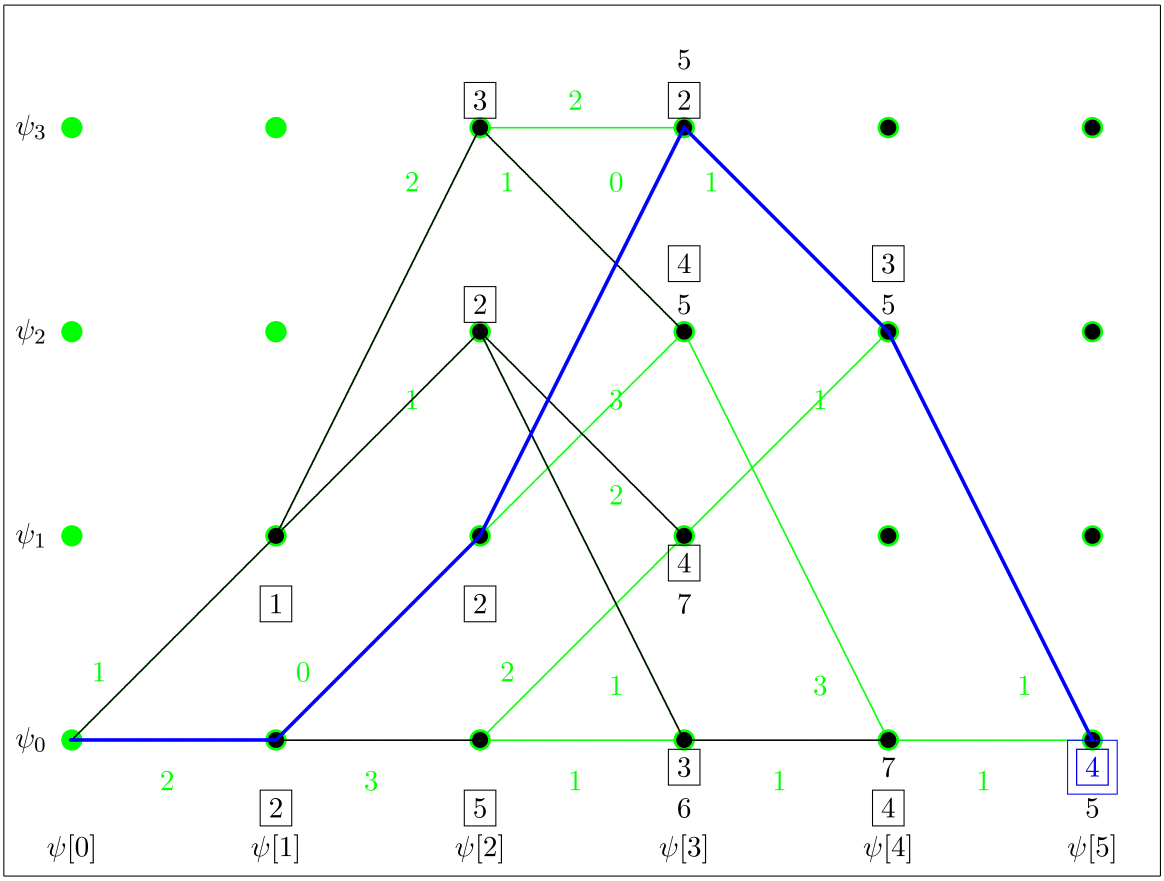


La probabilidad de error será

$$P_e \approx c \sum_{e=4}^{9} \binom{9}{e} \varepsilon^e \, (1-\varepsilon)^{9-e}$$

donde $\varepsilon = 10^{-4}$ en este caso.

b) Para decodificar la secuencia hay que aplicar el algoritmo de Viterbi



La secuencia decodificada es

$$\hat{B}^{(0)}[0] = 0, \;\; \hat{B}^{(0)}[1] = 1, \;\; \hat{B}^{(0)}[2] = 1.$$

Ejercicio 20

a) La tasa del código

$$R = \frac{4}{7}$$

La matriz generadora

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d_{min} = 3$$

el código puede detectar patrones de hasta

$$d = 2 \text{ errores}$$

y corrige todos los patrones de

$$t = 1 \text{ error}$$

Se trata de un código perfecto ya que tiene la mínima redundancia necesaria para corregir un error, lo que significa que cumple la condición

$$\sum_{j=0}^{t} \binom{n}{j} = 2^{n-k} \text{ en este caso } \Rightarrow \binom{7}{0} + \binom{7}{1} = 1 + 7 = 8$$

b) La matriz de chequeo de paridad es

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y la tabla se síndromes

e	**s**
0000000	000
1000000	011
0100000	101
0010000	110
0001000	111
0000100	100
0000010	010
0000001	001

c) La decodificación basada en síndrome consiste en los siguientes pasos

- Cáculo del síndrome

$$\mathbf{s} = \mathbf{r} \times \mathbf{H} = 111$$

- Identificación del patrón de error (en la tabla de síndromes)

$$\mathbf{s} = 111 \rightarrow \mathbf{e} = 0001000$$

- Corrección de los errores

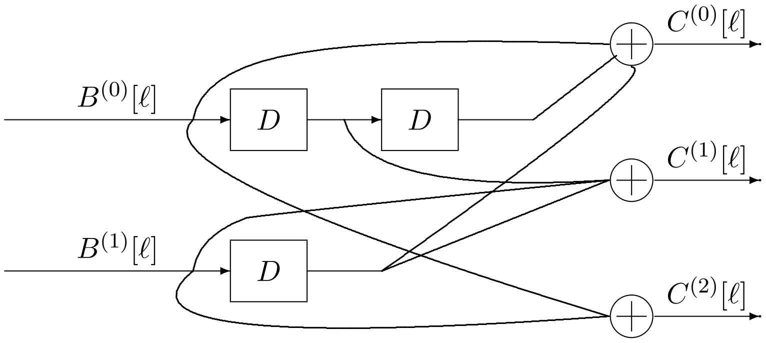
$$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{r} + \mathbf{e} = 0110011$$

- Decodificación (a través del diccionario)

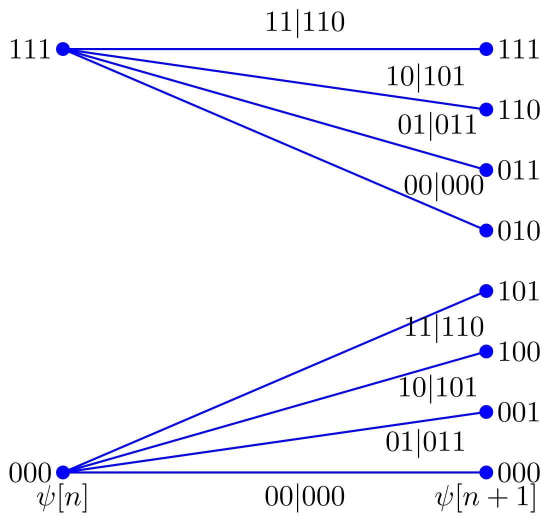
$$\hat{\mathbf{c}} \rightarrow \hat{\mathbf{b}} = 1101$$

Ejercicio 21

a) La representación esquemática es la de la figura



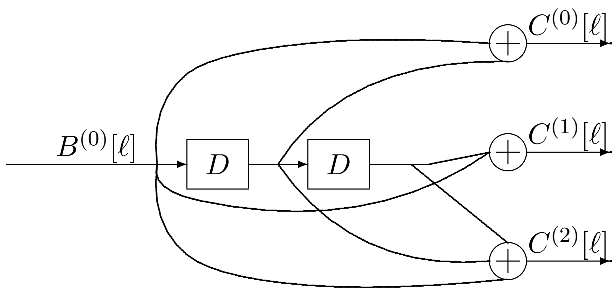
El diagrama de rejilla parcial es el de la figura



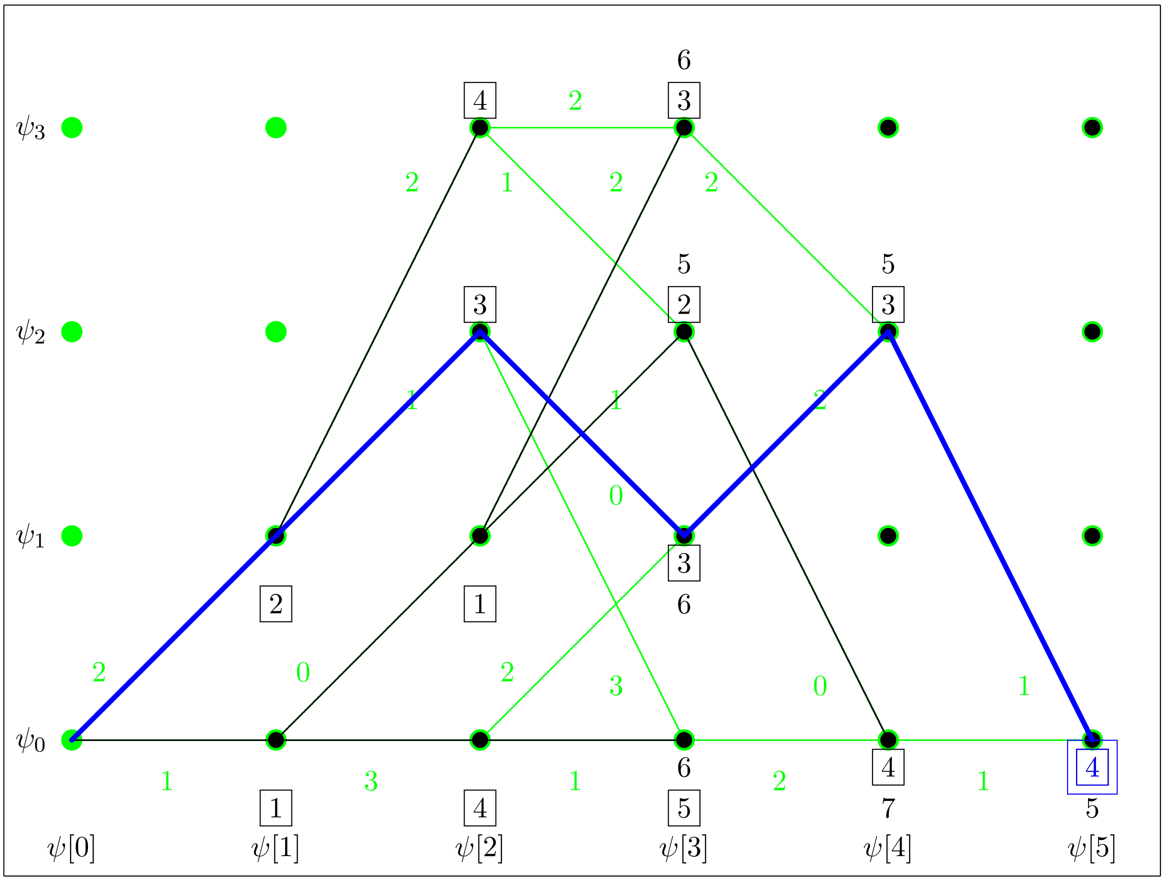
b) La matriz generadora es

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1+D & 1+D^2 & 1+D+D^2 \end{bmatrix}$$

La representación esquemática es la de la figura



c) Se aplica el algoritmo de decodificación, que es el algoritmo de Viterbi. El resultado de la aplicación del algoritmo se muestra en la figura



Por tanto, la secuencia decodificada se obtiene del camino superviviente resaltado, siendo

$$\hat{B}^{(0)}[0] = 1,\ \hat{B}^{(0)}[1] = 0,\ \hat{B}^{(0)}[2] = 1.$$