ÁLGEBRA LINEAL
Matemáticas e Informática

Apellidos...**Nombre**.......................**Nº Matrícula**............

EJERCICIO 1 **(2.5 puntos)**

En el espacio vectorial $\Re^4$, se consideran los siguientes subespacios

$$S = L\,(\{(-2,2,3,-3),(1,-2,-1,2),(1,0,-2,1)\}) \quad \text{y} \quad T:\begin{cases} x-2z+2t=0 \\ x-y+3t-5z=0 \\ x+2y+4z=0 \end{cases}$$

a) Obtener la base más sencilla del subespacio S y las ecuaciones implícitas de S.

A partir del sistema de generadores de S buscamos la base más sencilla de S:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+(F_1+F_2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

Luego las ecuaciones paramétricas de S serán: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y eliminando los parámetros **a** y **b** obtendremos

las ecuaciones implícitas de S:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ -2 & -\frac{1}{2} & z \\ 1 & -\frac{1}{2} & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z+2x+\frac{1}{2}y \\ 0 & 0 & t-x+\frac{1}{2}y \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} 4x+y+2z=0 \\ 2x-y-2t=0 \end{cases} \text{ Ecs. Implíc. de S}$$

b) Obtener una base del subespacio *S+T*.

Como **S+T=L{B$_S$ ∪ B$_T$}** buscamos, a partir del sistema de generadores **B$_S$ ∪ B$_T$** de **S+T**, una base de S+T. Para ello previamente necesitamos una base de **T**. Para obtener una base de **T** necesitamos resolver el sistema homogéneo dado por las ecuaciones implícitas de **T**:

$$\begin{cases} x-2z+2t=0 \\ x-y-5z+3t=0 \\ x+2y+4z=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{3} & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2\alpha - 2\beta \\ y = -3\alpha + \beta \\ z = \alpha \\ t = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B_T = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Observaciones:

- Tiempo: 3horas.
- No está permitido el uso de dispositivos electrónicos.

$$\begin{matrix} B_S \left\{ \right. \\ B_T \left\{ \right. \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 7/2 & -7/2 \\ 0 & 0 & -7/2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B_{S+T} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

c) Obtener ecuaciones implícitas y una base del subespacio $S \cap T$.

$$\text{Ecs. Implíc. de } S \cap T : \begin{cases} \left.\begin{matrix} 4x + y + 2z = 0 \\ 2x - y - 2t = 0 \end{matrix}\right\} \text{Ecs. Implíc. de } S \\ \left.\begin{matrix} x - 2z + 2t = 0 \\ y + 3z - t = 0 \end{matrix}\right\} \text{Ecs. Implíc. de } T \end{cases}$$

Para obtener una base de $S \cap T$ resolvemos el sistema homogéneo dado por las ecuaciones implícitas de $S \cap T$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 7 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2\alpha \\ z = \alpha \\ t = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B_{S \cap T} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

d) Obtener un subespacio suplementario de T.

$$B_T = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \xrightarrow[\text{una base de } \mathbb{R}^4]{\text{Ampliamos a}} B_{\mathbb{R}^4} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \text{Suplementario de T=}L\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

e) Responder a las siguientes cuestiones razonadamente: ¿Es $S+T$ suma directa?. ¿Son $S \cap T$ y $S+T$ suplementarios?
$S+T$ **NO** es suma directa ya que $S \cap T$ **no** es el s.v. trivial $\{(0,0,0,0)\}$. $S \cap T$ y $S+T$ **NO** son suplementarios ya que $S \cap T \subset S+T$ y $S \cap T \neq \{(0,0,0,0)\}$.

EJERCICIO 2 **(1.5 puntos)**

a) Eliminar los parámetros en la siguiente ecuación paramétrica en $\mathbb{Z}_2^4$: $\begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \overline{x_3} \\ \overline{x_4} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \overline{x_1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \overline{x_2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \overline{x_3} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \overline{x_4} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \overline{x_1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \overline{x_2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \overline{x_3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \overline{x_4} + \overline{x_1} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \overline{x_2} = 0 \\ \overline{x_3} = 0 \end{cases}$$

b) Dado el código lineal C cuya matriz de paridad es $\begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&1&1\\ 0&1&1&0&0&1&1\\ 1&0&1&0&1&0&1 \end{pmatrix}$. ¿Cuál es la longitud del código C? ¿Cuál es la dimensión de C? ¿Cuántas palabras tiene el código C? Razona si C es un código lineal capaz de corregir un error.

Longitud(C) = 7, Dimensión(C) = 7 - rango$\begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&1&1\\ 0&1&1&0&0&1&1\\ 1&0&1&0&1&0&1 \end{pmatrix}$ = 7 – 3 = 4. Número de palabras de C = 2^4 = 16. La matriz de paridad del código lineal C tiene todas las columnas distintas y distintas de la columna toda de ceros, por tanto, C es un código lineal capaz de corregir un error.

EJERCICIO 3 **(2.5 puntos)**

Sea f: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal que verifica:

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ f\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}.$$ Se pide:

a) Determinar la matriz de f respecto de las bases canónicas y las ecuaciones que definen f.

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=f\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$$

Por tanto, $M_f\left(B_c^{\mathbb{R}^4},B_c^{\mathbb{R}^3}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\-1&1&1&0\\-1&1&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\-1&1&1&0\\-1&1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}y_1=x_1-x_4\\y_2=-x_1+x_2+x_3\\y_3=-x_1+x_2+2x_4\end{cases}$

b) Determinar el núcleo de *f*, dando la dimensión y las ecuaciones implícitas y paramétricas del subespacio.

Ecs. Implícitas de *kerf*: $\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\-1&1&1&0\\-1&1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Para obtener las ecs. Paramétricas del *kerf* hay que resolver el sistema dado por las ecuaciones implícitas del *kerf*:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&0\\-1&1&1&0&0\\-1&1&0&2&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&0\\0&1&1&-1&0\\0&1&0&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1&0\\0&1&1&-1&0\\0&0&1&-2&0\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}x_1=\alpha\\x_2=-\alpha\\x_3=2\alpha\\x_4=\alpha\end{cases}\text{Ecs. Par. } kerf \Rightarrow \dim kerf=1$$

c) Determinar el subespacio imagen de *f*. Comprobar la fórmula de las dimensiones para aplicaciones lineales.

$$Im\,f=\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}=\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}=\mathbb{R}^3$$

La fórmula de las dimensiones para aplicaciones lineales aplicada a f es: $\dim ker f + \dim Im\, f = \dim \mathbb{R}^4 = 4$ y como $\dim ker f = 1$ y $\dim Im f = 3$ se verifica la fórmula.

d) Razonar si f es monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo.

La aplicación f es epimorfismo ya que $Im\, f = \mathbb{R}^3$, pero no es monomorfismo, ya que $ker\, f \neq \{(0,0,0,0)\}$. Por tanto, no es isomorfismo, ya que no es monomorfismo.

EJERCICIO 4 **(2 puntos)**

Dada la proyección ortogonal p_S: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, siendo el subespacio vectorial $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x - y + 2z = 0 \right\}$, se pide:

a) Hallar una base ortonormal de S.

Aplicamos el proceso de ortogonalización de G-S a una base cualquiera de S, por ejemplo a $B_S = \{(1,1,0), (2,0,-1)\}$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

. Por tanto, $B_S^{ORN} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

b) Hallar la matriz de p_S respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$.

Método 1: ampliamos la base ortonormal de S, obtenida en el apartado a), con un vector ortogonal a S, de forma que tengamos una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por dos vectores de S y uno de $S^{\perp}$:

$$B_S^{ORN} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \to B_{ORN}^{\mathbb{R}^3} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

. Por tanto,

$$\left. \begin{array}{l} p_S\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ p_S\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ p_S\left(\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow M_{p_S}(B_{ORN}^{\mathbb{R}^3}, B_c^{\mathbb{R}^3}) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{p_S}(B_c^{\mathbb{R}^3}, B_c^{\mathbb{R}^3}) = M_{p_S}(B_{ORN}^{\mathbb{R}^3}, B_c^{\mathbb{R}^3}) C(B_c^{\mathbb{R}^3}, B_{ORN}^{\mathbb{R}^3})$$

Por tanto,

$$M_{p_S}(B_c^{\mathbb{R}^3}, B_c^{\mathbb{R}^3}) = M_{p_S}(B_{ORN}^{\mathbb{R}^3}, B_c^{\mathbb{R}^3}) C(B_c^{\mathbb{R}^3}, B_{ORN}^{\mathbb{R}^3}) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} C(B_{ORN}^{\mathbb{R}^3}, B_c^{\mathbb{R}^3})^t = \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Método 2:

$$p_S(x,y,z)=\left\langle (x,y,z),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\left\langle (x,y,z),\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)\right\rangle \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}(x+y)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{3}(x-y-z)\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5x+y-2z\\x+5y+2z\\-2x+2y+2z\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5&1&-2\\1&5&2\\-2&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Por tanto, $M_{p_S}(B_c^{\mathbb{R}^3},B_c^{\mathbb{R}^3})=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5&1&-2\\1&5&2\\-2&2&2\end{pmatrix}$

c) Teniendo en cuenta la relación que existe entre los subespacios vectoriales S y $S^{\perp}$ con los subespacios propios asociados a los autovalores de p_S, diagonalizar ortogonalmente el endomorfismo p_S .
Sabemos que los autovalores de cualquier proyección ortogonal son 1 y 0, con multiplicidad de 1 igual a la dimensión del subespacio sobre el que se proyecta y, multiplicidad de 0 igual a la dimensión del ortogonal al que se proyecta. Luego, p_S tiene el autovalor 1 con multiplicidad 2 y, el autovalor 0 con multiplicidad 1. Además, se verifica que los subespacios propios asociados a p_S son $S_{\lambda=1}=S$ y $S_{\lambda=0}=S^{\perp}$. Luego, una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de p_S es la base obtenida en el apartado anterior, es decir,

$$B_{autovec}^{ORN}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}\text{ y}$$

$$M_{p_S}(B_{autovec}^{ORN},B_{autovec}^{ORN})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=C(B_c^{\mathbb{R}^3},B_{autovec}^{ORN})M_{p_S}(B_c^{\mathbb{R}^3},B_c^{\mathbb{R}^3})C(B_{autovec}^{ORN},B_c^{\mathbb{R}^3})=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&\sqrt{3}&0\\\sqrt{2}&-\sqrt{2}&-\sqrt{2}\\1&-1&2\end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5&1&-2\\1&5&2\\-2&2&2\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&\sqrt{2}&1\\\sqrt{3}&-\sqrt{2}&-1\\0&-\sqrt{2}&2\end{pmatrix}$$

EJERCICIO 5 **(1.5 puntos)**

Obtener las ecuaciones del giro $G_{\vec{v}}^{\alpha}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ de ángulo α=π/3 y dirección y sentido dados por el vector $\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Tomamos una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por el vector $\vec{v}$ y dos vectores del plano ortogonal a $\vec{v}$, y con la misma orientación que la base canónica.

$$B^{ORN}=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\},\quad \begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{vmatrix}=1.\text{ Por tanto,}$$

$$\left\{\begin{array}{l}G_{\vec{v}}^{\alpha}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\\ G_{\vec{v}}^{\alpha}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=cos(\tfrac{\pi}{3})\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+sen(\tfrac{\pi}{3})\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\ G_{\vec{v}}^{\alpha}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=-sen(\tfrac{\pi}{3})\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+cos(\tfrac{\pi}{3})\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\end{array}\right. \Rightarrow M_{G_{\vec{v}}^{\alpha}}(B^{ORN},B^{ORN})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&cos(\frac{\pi}{3})&-sen(\frac{\pi}{3})\\0&sen(\frac{\pi}{3})&cos(\frac{\pi}{3})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Así, $M_{G_{\vec{v}}^{\alpha}}(B_c,B_c)=C(B^{ORN},B_c)M_{G_{\vec{v}}^{\alpha}}(B^{ORN},B^{ORN})C(B_c,B^{ORN})=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow \text{Ecs. Giro: } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$