PRUEBA DE AUTOEVALUACIÓN. Tema 3

Complementos Matemáticos de la Ingeniería Industrial. Máster en Ingeniería Industrial.

Pregunta 1. Consideramos la hélice circular dada por las ecuaciones paramétricas $x = \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t$, $y = \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2}t$, $z = \frac{\sqrt{2}}{2}t$. Para el punto correspondiente a $z = 0$, señale cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

a. Un vector director de su recta tangente es $(0, 1, 1)$.

b. La ecuación de la recta tangente es $x = -1, z = 1 - \frac{y}{\pi}$.

c. El vector curvatura es $\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$.

d. No se puede calcular porque no está parametrizada por el arco.

e. Ninguna de los anteriores.

Solución. Son ciertas la opción a) y la opción c). Primero comprobamos que está parametrizada por el arco. Tenemos

$$\mathbf{x}(s) = \left(\cos \frac{\sqrt{2}}{2}t, \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2}t\right),$$

$$\mathbf{x}'(s) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos \frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}'(s)\| &= \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\sqrt{2}}{2}t + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cos^2 \frac{\sqrt{2}}{2}t + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1.\end{aligned}$$

Como el vector tangente es unitario, está parametrizada por el arco y la opción **d)** es falsa.

Por otro lado, el valor $z = 0$ corresponde a $t = 0$ y a $x = \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}0\right) = \cos 0 = 1$, $y = \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}0\right) = \operatorname{sen} 0 = 0$. El punto de la hélice será $(1, 0, 0)$. El vector tangente es

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(0) &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2}0, \frac{\sqrt{2}}{2}\cos \frac{\sqrt{2}}{2}0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).\end{aligned}$$

Pero cualquier vector paralelo a este es un vectgor director de la recta tangente. Por eso, $(0, 1, 1)$ es un vector director de la recta tangente y es correcta la primera opción.

Sin embargo, un vector director de la recta indicada en la segunda opción es $(0, 1, -1)$, que no es paralelo a $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. por eso, la opción **b)** no es correcta.

Por otro lado, como

$$\mathbf{x}''(t) = \left(-\frac{1}{2}\cos \frac{\sqrt{2}}{2}t, -\frac{1}{2}\operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{2}t, 0\right),$$

el vector curvatura está dado, en $t = 0$, por

$$\mathbf{x}''(0) = \left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right).$$

Por eso, la opción **c)** es correcta.

Pregunta 2. Seleccione la opción o las opciones correctas.

a. La curvatura de una curva regular no puede valer 0.

b. La curvatura de una curva regular no puede ser negativa.

c. El radio de curvatura es siempre mayor que 0.

d. Ninguna de los anteriores.

Solución. Es correcta la opción c.

La primera opción no es correcta, porque como la curvatura está definida por

$$k(t) = \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.$$

Este valor puede ser 0 o menor que 0, por eso, las dos primeras opciones son falsas.

Por otro lado, el radio de curvatura es

$$r(t) = \frac{1}{|k(t)|},$$

que es siempre mayor que 0. Y la opción c es correcta.

Pregunta 3. Sea C la curva definida por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = \left(e^t, t^2\right).$$

Entonces

a. Su radio de curvatura en $(1,0)$ es 1.

b. Su curvatura en $(1,0)$ es 2.

c. El vector curvatura en $(1,0)$ es $(0,2)$.

d. Ninguna de los anteriores.

Solución. Son correctas las opciones b y c.

Un vector tangente a la curva en un punto $\mathbf{x}(t)$ es

$$\mathbf{x}'(t) = \left(e^t, 2t\right).$$

Además:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}'(t)\| &= \sqrt{\left(e^t\right)^2 + (2t)^2} = \sqrt{e^{2t} + 4t^2},\\ \mathbf{x}''(t) &= \left(e^t, 2\right).\end{aligned}$$

Con estos datos, calculamos la curvatura.

$$\begin{aligned}k(t) &= \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}\\ &= \begin{vmatrix} e^t & 2t \\ e^t & 2 \end{vmatrix}\frac{1}{\left(\sqrt{e^{2t}+4t^2}\right)^3}\\ &= \frac{2e^t - 2te^t}{\left(e^{2t}+4t^2\right)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

Entonces el radio de curvatura en $\mathbf{x}(t)$ es

$$r(t) = \frac{1}{|k(t)|} = \frac{\left(e^{2t}+4t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2e^t - 2te^t}.$$

En el punto $(1,0) = \mathbf{x}(0)$ tenemos:

$$\begin{aligned}k(0) &= \frac{2e^0 - 2\cdot 0\cdot e^0}{\left(e^0 + 4\cdot 0^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{1^{3/2}} = 2,\\ r(0) &= \frac{1}{|k(t)|} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Por otro lado, el vector tangente es

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{e^{2t}+4t^2}}\left(e^t, 2t\right).$$

Entonces, el vector normal es

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{e^{2t}+4t^2}}\left(-2t, e^t\right)$$

y el vector curvatura es

$$\begin{aligned}\mathbf{k}(t) = k(t)\,\mathbf{n}(t) &= \frac{2e^t - 2te^t}{\left(e^{2t}+4t^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\sqrt{e^{2t}+4t^2}}\left(-2t, e^t\right)\\ &= \left(-2\frac{2e^t-2te^t}{\left(e^{2t}+4t^2\right)^2}t, \frac{2e^t-2te^t}{\left(e^{2t}+4t^2\right)^2}e^t\right).\end{aligned}$$

En $t = 0$, tenemos:

$$\mathbf{k}(0) = k(0)\,\mathbf{n}(0) = 2\frac{1}{\sqrt{e^0+0}}\left(0, e^0\right) = (0, 2).$$

Pregunta 4. Tenemos la siguiente familia de circunferencias

$$x^2 + \left(y - \lambda^2\right)^2 = \lambda^2, \qquad \lambda > 1.$$

Entonces:

a. No tiene envolvente.

b. La envolvente es la curva $x = 2y + 1$.

c. La envolvente es la curva $x^2 = y + \frac{1}{4}$.

d. Ninguna de los anteriores.

Solución. Es correcta la opción c. Primero tenemos que escribir la familia en forma paramétrica. Estas son

$$\mathbf{x}(\lambda, t) = \left(\lambda\cos t, \lambda\operatorname{sen} t + \lambda^2\right).$$

Entonces, es

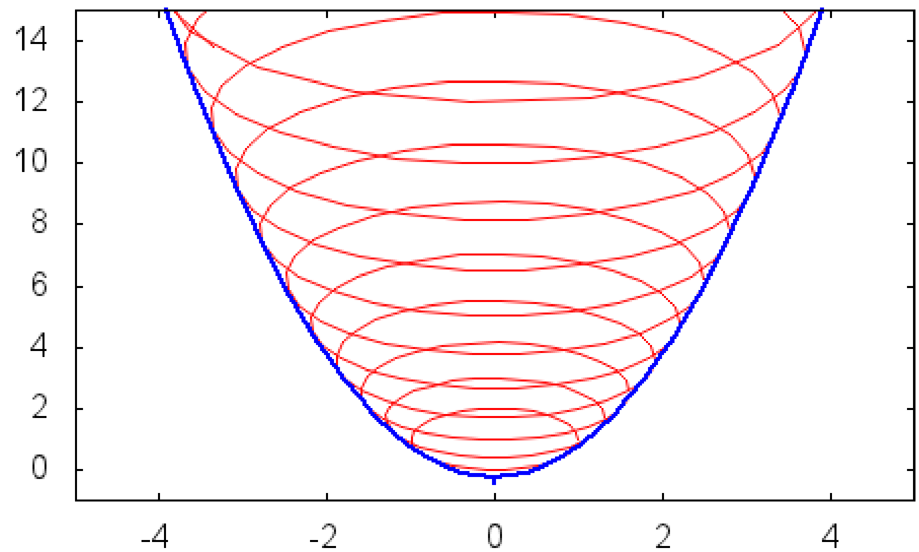
$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\lambda}(\lambda, t) &= (\cos t, \operatorname{sen} t + 2\lambda),\\ \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t}(\lambda, t) &= (-\lambda\operatorname{sen} t, \lambda\cos t).\end{aligned}$$

Los puntos de la envolvente deben cumplir

$$\begin{aligned}0 = \det\left(\frac{\partial\mathbf{x}}{\partial\lambda}, \frac{\partial\mathbf{x}}{\partial t}\right) &= \begin{vmatrix}\cos t & -\lambda\operatorname{sen} t\\ \operatorname{sen} t + 2\lambda & \lambda\cos t\end{vmatrix}\\ &= \lambda\cos^2 t + \lambda\operatorname{sen}^2 t + 2\lambda^2\operatorname{sen} t\\ &= \lambda + 2\lambda^2\operatorname{sen} t.\end{aligned}$$

Esto se cumple cuando

$$\operatorname{sen} t = -\frac{1}{2\lambda} \iff t = \arcsin\left(-\frac{1}{2\lambda}\right), t = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{2\lambda}\right).$$



Sustituyendo estos valores de t en la ecuación de la familia, tenemos la envolvente, dada por

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1(\lambda) &= \mathbf{x}\left(\lambda, \arcsin\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)\right) = \left(\lambda\cos\arcsin\left(-\frac{1}{2\lambda}\right), \lambda\operatorname{sen}\,\arcsin\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)+\lambda^2\right) \\
&= \left(\lambda\cos\arcsin\left(-\frac{1}{2\lambda}\right), -\frac{\lambda}{2\lambda}+\lambda^2\right) = \left(\lambda\cos\arcsin\left(-\frac{1}{2\lambda}\right), -\frac{1}{2}+\lambda^2\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\lambda\sqrt{4-\frac{1}{\lambda^2}}, -\frac{1}{2}+\lambda^2\right) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda^2-1}, -\frac{1}{2}+\lambda^2\right), \\
\mathbf{e}_2(\lambda) &= \mathbf{x}\left(\lambda, \pi-\arcsin\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)\right) = \left(\lambda\cos\left(\pi-\arcsin\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)\right), \lambda\operatorname{sen}\,\left(\pi-\arcsin\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)\right)+\lambda^2\right) \\
&= \left(-\lambda\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)\right), -\lambda\frac{-1}{2\lambda}+\lambda^2\right) = \left(-\lambda\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)\right), -\frac{1}{2}+\lambda^2\right) \\
&= \left(-\frac{1}{2}\lambda\sqrt{4-\frac{1}{\lambda^2}}, -\frac{1}{2}+\lambda^2\right) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda^2-1}, -\frac{1}{2}+\lambda^2\right).
\end{aligned}$$

Su gráfica es La envolvente es una parábola, porque verifica

$$\begin{aligned}
x^2 &= \left(\frac{1}{2}\sqrt{4\lambda^2-1}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(4\lambda^2-1\right) \\
&= \lambda^2-\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}+\lambda^2+\frac{1}{4} \\
&= y+\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Pregunta 5. La curvatura de la hipérbola dada por la ecuación implícita

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

para $a, b > 0$, es

a. Siempre positiva.
b. Siempre negativa.
c. Vale $-\frac{ab}{\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}^3}$.
d. Ninguna de los anteriores.

Solución. Son correctas las opciones a y b.

Las ecuaciones implícitas de la hipérbola son

$$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Calculamos el gradiente, su norma y la matriz Hessiana:

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= \left(\frac{2x}{a^2}, -\frac{2y}{b^2}\right), \\
\|\nabla f\| &= \frac{2}{ab}\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}, \\
H(f) &= \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{b^2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Entonces la curvatura en un punto (x,y) es

$$\begin{aligned}
k(x,y) &= \frac{(ab)^3}{2^3\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}^3} \begin{pmatrix} \frac{2y}{b^2} & \frac{2x}{a^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2y}{b^2} \\ \frac{2x}{a^2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{(ab)^3}{2^3\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}^3} \left(8\frac{y^2}{b^4a^2} - 8\frac{x^2}{a^4b^2}\right) \\
&= -\frac{8(ab)^3}{2^3a^2b^2\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}^3} \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \\
&= -\frac{ab}{\sqrt{b^2x^2+a^2y^2}^3}
\end{aligned}$$

,

porque los puntos (x,y) verifican la ecuación de la hiperbola.